

4 Modelo proposto

4.1 Definições

De acordo com o que foi antecipado na seção 2.2, pode se considerar como uma primeira etapa para a definição do modelo de programação estocástica a definição dos parâmetros, fatores de risco, variáveis de decisão e os conjuntos nos quais as mesmas estão inseridas. Por isso, para melhor formalizar o modelo proposto, nesta seção foram fornecidas todas as definições necessárias.

Parâmetros escalares:

Primeiramente foram definidos os parâmetros escalares fixos (determinísticos), sendo assim imutáveis em todos os cenários.

- T : Horizonte de planejamento
- S : Número de cenários
- N_I : Número de níveis de insolvência
- N_A : Número de ativos, exceto NTN-Bs e caixa
- N_X : Número de NTN-Bs
- mc : Máximo de investimento dos ativos garantidores em caixa
- mi_{pla} : Máximo de investimento em imóveis incluído no PLA
- CB : Capital Base
- r_{sub} : Proporção inicial entre o montante de capital referente ao risco de subscrição e o montante referente ao risco de crédito
- f_{oper} : Fator de risco operacional
- f_{cred}^{caixa} : Fator de risco de crédito para valores mantidos em caixa
- $C_{inicial}^g$: Montante inicial em R\$ de ativos garantidores mantido no caixa
- $C_{inicial}^l$: Montante inicial em R\$ de ativos livres mantido no caixa
- π : Penalidade para ativos garantidores em excesso à provisão

Conjuntos

Em seguida, foram definidos os conjuntos que determinam os valores possíveis para as variáveis e parâmetros.

- $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$
- $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$
- $\mathcal{I} = \{1, \dots, N_I\}$
- $\mathcal{A} = \{1, \dots, N_A\}$
- $\mathcal{X} = \{1, \dots, N_X\}$
- $\mathcal{Y} = \mathcal{A} \cup \mathcal{X}$

Destaca-se dos conjuntos que \mathcal{A} representa o conjunto de todos os ativos excetuando-se as NTN-Bs e caixa. Sendo composto então por: 1- ações, 2- imóveis e 3- títulos privados remunerados por 105% do DI. Já o conjunto \mathcal{X} contém somente as NTN-Bs com vencimentos estabelecidos. Parâmetros vetoriais:

Após a definição dos conjuntos, foram definidos os parâmetros fixos (determinísticos), sendo assim imutáveis em todos os cenários.

- \emptyset_y : Custo de transação do ativo $y \in \mathcal{Y}$.
- m_a : Máximo de investimento dos ativos garantidores no ativo $a \in \mathcal{A}$
- p_t : Probabilidade de realização dos cenários no estágio $t \in \mathcal{T}$
- f_{cred}^a : Fator de risco de crédito para o ativo $a \in \mathcal{A}$
- $A_{inicial}^{g,a}$: Montante inicial em R\$ de ativos garantidores investido no ativo $a \in \mathcal{A}$
- $A_{inicial}^{l,a}$: Montante inicial em R\$ de ativos livres investido no ativo $a \in \mathcal{A}$
- $X_{inicial}^{g,x}$: Montante inicial em VNA de ativos garantidores investido na NTN-B $x \in \mathcal{X}$
- $X_{inicial}^{l,x}$: Montante inicial em VNA de ativos livres investido na NTN-B $x \in \mathcal{X}$
- θ_i : Penalidade por insolvência no nível $i \in \mathcal{I}$
- φ_i : Percentual limite de insolvência do nível $i \in \mathcal{I}$
- M_x : Vencimento do título $x \in \mathcal{X}$

Fatores de risco:

Em seguida foram definidos os fatores de riscos, que são variantes para os diferentes cenários.

- $l_t(s)$: Valor em R\$ do fluxo de caixa de benefício a pagar em $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $P_t(s)$: Valor em R\$ da provisão no instante $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CR_{sub_t}(s)$: Valor calculado em R\$ para a parcela de capital de risco referente ao risco de subscrição no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $rc_t(s)$: Retorno do caixa no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $r_t^a(s)$: Retorno do ativo $a \in \mathcal{A}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $\psi_t(s)$: Fator de desconto real acumulado do instante inicial do planejamento até o final do estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $\Delta I_t(s)$: Variação do IPCA no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $\vartheta_t^x(s)$: Razão entre o preço e o VNA de uma NTN-B $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $F_t^x(s)$: Fluxo de recebimento (pagamento de cupom e/ou principal) de uma NTN-B $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$

Variáveis de decisão

O conjunto de variáveis de decisão representa a solução ótima do MPE ou desdobramentos das decisões tomadas⁷. Por definição, todas as variáveis de decisão são não negativas a menos que se especifique o contrário.

- $C_t^g(s)$: Valor em R\$ dos ativos garantidores mantido em caixa no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $C_t^l(s)$: Valor em R\$ dos ativos livres mantido em caixa no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CA_t^a(s)$: Valor em R\$ comprado do ativo $a \in \mathcal{A}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $VA_t^a(s)$: Valor em R\$ vendido do ativo $a \in \mathcal{A}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CX_t^x(s)$: Valor em VNA comprado da NTN-B $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$

⁷ Embora a diferença conceitual entre as variáveis de estado e de decisão exista, no programa linear todas são definidas como variáveis de decisão.

- $VX_t^x(s)$: Valor em VNA vendido da NTN-B $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $A_t^{g,a}(s)$: Montante em R\$ de ativos garantidores investido no ativo $a \in \mathcal{A}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $A_t^{l,a}(s)$: Montante em R\$ de ativos livres investido no ativo $a \in \mathcal{A}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $X_t^{g,x}(s)$: Valor Nominal atualizado total em NTN-B $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$ referente à parcela dos ativos garantidores
- $X_t^{l,x}(s)$: Valor Nominal atualizado total em NTN-B $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$ referente à parcela dos ativos livres
- $b_t^g(s)$: Montante total em R\$ de ativos garantidores investido em NTN-B's no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $b_t^l(s)$: Montante total em R\$ de ativos livres investido em NTN-Bs no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $I_t^i(s)$: Montante em R\$ de insuficiência em relação no nível $i \in I$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $AG_t(s)$: Montante total em R\$ de ativos garantidores no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $AL_t(s)$: Montante total em R\$ de ativos livres no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $PLA_t(s)$: Valor em R\$ do Patrimônio Líquido Ajustado no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$, onde $PLA_t(s) \in \mathbb{R}$
- $DI_t(s)$: Montante em R\$ de deduções do PL referentes a imóveis no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CR_t(s)$: Valor calculado em R\$ para o capital de risco no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CMR_t(s)$: Valor calculado em R\$ para o capital mínimo requerido no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CR_{cred_t}(s)$: Valor calculado em R\$ para a parcela de capital de risco referente ao risco de crédito no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $CR_{outros_t}(s)$: Valor calculado em R\$ para todas as parcelas de capital de risco excluindo o risco operacional no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$

- $CR_{oper_t}(s)$: Valor calculado em R\$ para a parcela de capital de risco referente ao risco operacional no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$
- $IAG_t(s)$: Valor em R\$ de excesso de ativos garantidores em relação ao total da provisão no estágio $t \in \mathcal{T}$ no cenário $s \in \mathcal{S}$

4.2 Restrições

As restrições definem toda a lógica do modelo bem como as diretrizes regulatórias. Entre as restrições se destacam como se desenvolve o caixa da companhia, a dinâmica das alocações dos ativos, as mensurações dos níveis de solvência da companhia, entre outras. Como foi antecipado, tais regras se tornam ainda mais difíceis de estabelecer devido a regulamentação necessária, porém complexa, do mercado segurador. Sendo a definição destas uma das grandes contribuições deste trabalho.

4.2.1 Fluxo de Caixa

Primeiramente foram definidas as restrições de fluxo de caixa. Tais restrições são de suma importância, pois são as mesmas que gerenciam todos os fluxos definidos pelo modelo de programação estocástico proposto. Dada a importância das mesmas, foi elaborada a Figura 4.1 abaixo que fornece esquematicamente o racional pra a definição do caixa em cada estágio t .

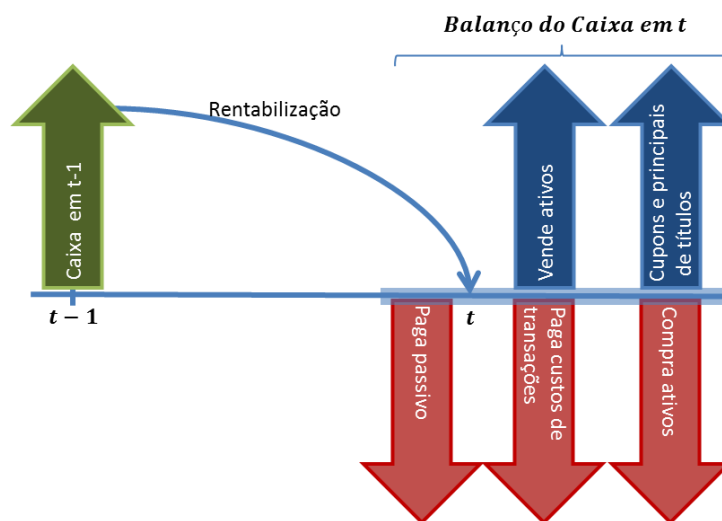


Figura 4.1 – Fluxo de caixa no estágio t

Como se observa no esquema proposto, o modelo foi definido de tal forma que, para cada cenário $s \in \mathcal{S}$, o caixa no estágio $t \in \mathcal{T}$ é definido pela rentabilização do caixa do estágio anterior e em seguida por adições e deduções. Entre as adições no caixa, estão as receitas oriundas de venda de ativos e dos fluxos originados dos títulos (recebimento de cupons e principal) possuídos até o final de $t-1$. Ao passo que das saídas do caixa se destacam as compras de novos ativos, o pagamento das transações de compras e vendas de cada ativo e o pagamento dos passivos (benefícios). Verifica-se na figura que o pagamento das rendas está contido no estágio anterior $t-1$. Isto ocorre, pois as rendas são postecipadas, ou seja, pagas no final dos períodos. Por esse motivo, foi adotado que o último instante de $t-1$ é igual ao início de t sem qualquer prejuízo para o modelo proposto.

Assim como foi detalhado em 3.2 e também será discorrido na seção 4.2.6, frisa-se que foram definidos dois caixas. O primeiro contém os recursos mantidos em caixa referentes aos ativos garantidores enquanto que o segundo mantém os valores referentes aos ativos livres.

Por fim, pondera-se que há diferenças significativas no estágio inicial (alocação inicial) e no último estágio (T). No primeiro estágio, não há passagem de tempo, somente é feita a realocação dos ativos de acordo com a solução ótima do MPE, logo não há qualquer rentabilização. E, além disso, não há pagamento de passivo e nem recebimento de fluxos oriundos das NTN-Bs. Diante disso, foram definidas as seguintes restrições:

Para $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 C_t^g(s) + C_t^l(s) &= C_{inicial}^g + C_{inicial}^l \\
 - \sum_{a \in \mathcal{A}} \phi_a (CA_t^a(s) + VA_t^a(s)) &- \sum_{a \in \mathcal{A}} (CA_t^a(s) - VA_t^a(s)) \\
 - \sum_{x \in \mathcal{X}} \phi_x \cdot \vartheta_t^x(s) \cdot (CX_t^x(s) + VX_t^x(s)) & \quad (4.1) \\
 - \sum_{x \in \mathcal{X}} \vartheta_t^x(s) \cdot (CX_t^x(s) - VX_t^x(s)), & t = 0, \forall s \in \mathcal{S}
 \end{aligned}$$

Para $t \in \mathcal{T} - \{0\}$:

$$\begin{aligned}
C_t^g(s) + C_t^l(s) &= (1 + rc_t(s)) \cdot (C_{t-1}^g(s) + C_{t-1}^l(s)) - l_{t-1}(s) \\
&\quad - \sum_{a \in \mathcal{A}} \phi_a (CA_t^a(s) + VA_t^a(s)) \\
&\quad - \sum_{a \in \mathcal{A}} (CA_t^a(s) - VA_t^a(s)) - \sum_{x \in \mathcal{X}} \phi_x \cdot \vartheta_t^x(s) \cdot (CX_t^x(s) + VX_t^x(s)) \\
&\quad - \sum_{x \in \mathcal{X}} \vartheta_t^x(s) \cdot (CX_t^x(s) - VX_t^x(s)) + \sum_{x \in \mathcal{X}} F_t^x(s), \forall t \\
&\quad \in \mathcal{T} - \{0\} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Destaca-se deste trabalho que na equação de fluxo de caixa acima foram utilizados os fluxos de pagamento de cupons e principais dos títulos públicos determinados em todos os estágios para diferentes cenários adotando desta forma um tratamento totalmente tático para estes ativos.

Frisa-se ainda que todas as variáveis utilizadas foram previamente definidas na seção 4.1 e serão revisitadas nas próximas seções. Contudo, destaca-se que os seguintes valores foram utilizados como custo de transações:

- Custo de títulos públicos (ϕ_x): Foi utilizado para todos os títulos o valor de 0,2%. Tal valor foi selecionado entre as empresas listadas no site do Tesouro Direto. Logo, $\phi_x = 0,002$.
- Custo de ações (ϕ_1): Foi utilizada a taxa de referência do site da BM&F que é de 0,5%. Logo, $\phi_1 = 0,005$.
- Custo de imóveis (ϕ_2): Considerando o alto custo da transação de tais ativos foi adotado o valor de 2%. Logo, $\phi_2 = 0,02$.
- Custo de títulos privados (ϕ_3): Foi utilizado o mesmo valor adotado para os títulos públicos. Logo, $\phi_3 = 0,002$.

4.2.2 Inventário de ativos

A restrição de inventário de ativos garante a coerência dos valores alocados em cada classe de ativos após as compras e vendas em cada nó definido na árvore de decisão. Para isso, esta restrição define basicamente que o valor investido em

um ativo no estágio t será o valor investido neste mesmo ativo em $t-1$ rentabilizado, acrescido das compras e descontado das vendas desse mesmo ativo em t . E, considerando que há distinção entre o que são ativos livres e garantidores esta restrição deve definir estas parcelas separadamente.

Adicionalmente, tendo em vista que na alocação inicial não há passagem de tempo e logo não há rentabilização, é necessário definir separadamente o estágio inicial dos demais estágios. Assim:

Para $t = 0$:

$$\begin{aligned} A_t^{g,a}(s) + A_t^{l,a}(s) &= A_{inicial}^{g,a} + A_{inicial}^{g,l} + CA_t^a(s) - VA_t^a(s), \\ \forall a \in \mathcal{A}, t = 0, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} X_t^{g,x} + X_t^{l,x} &= X_{inicial}^{g,x}(s) + X_{inicial}^{l,x}(s) + CX_t^x(s) - VX_t^{lx}(s), \\ \forall x \in \mathcal{X}, t = 0, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para $t \in \mathcal{T} - \{0\}$:

$$\begin{aligned} A_t^{g,a}(s) + A_t^{l,a}(s) &= (1 + r_t^a(s)) \cdot (A_{t-1}^{g,a}(s) + A_{t-1}^{l,a}(s)) + CA_t^a(s) - \\ &VA_t^a(s), \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} - \{0\}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} X_t^{g,x} + X_t^{l,x} &= (1 + \Delta I_t(s)) \cdot (X_{t-1}^{g,x}(s) + X_{t-1}^{l,x}(s)) + \\ &CX_t^x(s) - VX_t^x(s), \forall x \in \mathcal{X}, t \in \mathcal{T} - \{0\}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Verifica-se acima a distinção entre a restrição de inventário para os investimentos em NTN-B e os demais ativos. Assim como a restrição de inventário estabelecida para os demais ativos, foi definida uma restrição de inventários para as alocações em NTN-B. Contudo, por praticidade de implementação, o inventário foi definido não em unidades de preço (R\$) dos títulos, mas em termos de exposições totais em valores nominais atualizados (VNA).

Para isso, similarmente como foi definido para os demais ativos, esta restrição define que o VNA total de um título $x \in \mathcal{X}$ no estágio t será o total em VNA neste mesmo título em $t-1$ após o acumulo da variação do IPCA do período, acrescido das compras e descontado das vendas desse título em t . E, considerando

que há distinção entre o que são ativos livres e garantidores, esta restrição deve definir estas parcelas separadamente.

4.2.3 Determinação dos fluxos das NTN-Bs

Com as exposições em VNA estabelecidas na restrição de inventário (vide seção 4.2.2), o total dos ativos garantidores investido em títulos em qualquer estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ é:

$$b_t^g(s) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \vartheta_t^x(s) \cdot X_t^{g,x}(s), t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.7)$$

E o total dos ativos livres investido em títulos em qualquer estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ é:

$$b_t^l(s) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \vartheta_t^x(s) X_t^{l,x}(s) \quad t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.8)$$

Onde $\vartheta_t^x(s)$ é a proporção entre o valor presente e o VNA do título $x \in \mathcal{X}$ no estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ como define a equação (5.22).

Em seguida, para definir os fluxos de pagamentos de cupons e principal de cada título $x \in \mathcal{X}$ para qualquer estágio $t \in \mathcal{T} - \{0\}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ se estabelece:

$$F_t^x(s) = (\alpha_t^x(s) + \beta_t^x(s)) \cdot (1 + \Delta I_t(s)) \cdot (X_{t-1}^{g,x}(s) + X_{t-1}^{l,x}(s)), t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.9)$$

Onde $\alpha_t^x(s)$ e $\beta_t^x(s)$ foram definidos pelas equações (5.25) e (5.26) na seção 5.2.2.2.

Vale destacar que em todas as restrições desta seção foi estabelecido que após a alocação num estágio t há a variação da inflação entre os instantes t e $t+1$ e somente após apurada a variação do índice se compra e vende os títulos.

Por fim, considerando que todos os títulos possuem vencimentos estabelecidos, é necessário definir a restrição de limitação de compra após o

vencimento. Assim, para o título $x \in \mathcal{X}$ em qualquer estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$:

$$X_t^{g,x}(s) = X_t^{l,x}(s) = 0, \forall t \geq M_x, s \in \mathcal{S} \quad (4.10)$$

4.2.4

Limites máximos de alocações dos ativos garantidores

Como detalhado na seção 3.2, existem regras claras que restringem os investimentos dos ativos garantidores de provisão técnica. Para isso, foram definidas as restrições abaixo.

- Limite de investimento em depósitos (caixa) de 80% ($mc = 0,80$):

$$C_t^g(s) \leq mc \cdot AG_t(s), \forall t \in \mathcal{T} e s \in \mathcal{S} \quad (4.11)$$

- Limite de investimento em ações de 49% ($m_1 = 0,49$):

$$A_t^{g,1}(s) \leq m_1 \cdot AG_t(s), \forall t \in \mathcal{T} e \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.12)$$

- Limite de investimento em imóveis de 8% ($m_2 = 0,08$):

$$A_t^{g,2}(s) \leq m_2 \cdot AG_t(s), \forall t \in \mathcal{T} e \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.13)$$

- Limite de investimento em títulos privados de 80% ($m_3 = 0,80$):

$$A_t^{g,3}(s) \leq m_3 \cdot AG_t(s), \forall t \in \mathcal{T} e \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.14)$$

Onde o total de ativos garantidores em todos os estágios $t \in \mathcal{T}$ e cenários $s \in \mathcal{S}$, $AG_t(s)$, é definido pelo somatório de todos os diferentes investimentos em ativos garantidores como será detalhado na seção 4.2.6.

4.2.5 Dedução do PL referentes a imóveis

Como previamente definido na seção 3.1, o PLA é definido pelo PL descontado de algumas deduções, sendo que neste trabalho a única dedução identificada foi a referente a imóveis. De acordo com a regra estabelecida qualquer valor investido em imóveis que exceda 14% ($mi_{pla} = 0,14$) do total de ativos deve ser deduzido. Desta forma:

$$DI_t(s) = \max[0; A_t^{g,a}(s) + A_t^{l,a}(s) - mi_{pla} \cdot (AG_t(s) + AL_t(s))], a = 2, \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.15)$$

Contudo, tal restrição é não linear. E, por este motivo, para o programa linear foram definidas as duas inequações lineares abaixo.

$$DI_t(s) \geq 0, \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S}$$

$$DI_t(s) \geq A_t^{g,a}(s) + A_t^{l,a}(s) - mi_{pla} \cdot (AG_t(s) + AL_t(s)), a = 2, \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.16)$$

Sendo AG (montante de ativos garantidores) e AL (montante total de ativos livres) definidos na seção 4.2.6 abaixo.

Considerando que o $DI_t(s)$ terá impacto negativo na função objetivo que deverá ser maximizada como será visto na seção 4.3, seu valor será naturalmente minimizado na solução ótima e com isso será garantida que pelo menos uma das desigualdades de (4.16) será atendida em igualdade, sendo então equivalente a (4.15).

4.2.6 Definição dos montantes totais de ativos garantidores e livres

Como previamente definido na seção 3.2, o valor total dos ativos pode ser dividido em ativos garantidores, definidos por

$$AG_t(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} A_t^{g,a}(s) + b_t^g(s), \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.17)$$

e por ativos livres, representados por

$$AL_t(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} A_t^{l,a}(s) + b_t^l(s), \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.18)$$

O valor total dos ativos garantidores é o montante total dos ativos que lastreiam as provisões, ou seja, $AG_t = \min(P_t; A_t)$. Por outro lado, o valor total de ativos livres é o montante total de ativos que excede os valores das provisões, isto é, $AL_t = \max(A_t - P_t; 0)$. Como os ativos livres são bonificados na função objetivo, a inclusão de uma penalização pela insuficiência de ativos garantidores torna-se necessária para garantir as relações citadas anteriormente. Para todo estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ são incluídas duas restrições lineares e uma variável auxiliar $IAG_t(s)$, que será penalizada na função objetivo (definida na seção 4.3):

$$\begin{aligned} IAG_t(s) &\geq 0, \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \\ IAG_t(s) &\geq P_t(s) - AG_t(s), \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.2.7 Modelagem do Capital Mínimo Requerido (CMR)

Como previamente definido na seção 3.4, o capital mínimo requerido (CMR) para uma empresa que opera no mercado de seguros e previdências é estipulado em norma específica. Tal valor é definido como o máximo entre o capital de risco (CR) e o capital base (CB), sendo o CR calculado, baseado nos riscos assumidos pela companhia, através do modelo padrão definido pela Susep, como também foi detalhado na seção 3.4 e melhor explicado nas subseções seguintes. Já o CB é um montante fixo de capital definido de acordo com a região de operação da empresa, e no caso deste trabalho, foi adotada como premissa que a empresa opera em todo o território nacional e com isso o capital base é igual à R\$ 15.000.000. Diante do exposto o valor do CMR calculado para todos os estágios $t \in \mathcal{T}$ e cenários $s \in \mathcal{S}$ é:

$$CMR_t(s) = \max(CR_t(s); CB), \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.20)$$

Observa-se facilmente que esta equação não é linear. Por isso, para o programa linear proposto foram utilizadas as seguintes inequações lineares:

$$\begin{aligned} CMR_t(s) &\geq CB, \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \\ CMR_t(s) &\geq CR_t(s), \forall t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como será detalhado na seção 4.3, quanto menor CMR maior será a função objetivo, que se baseia numa função utilidade definida pelos possíveis cenários de solvência e insolvência. Como detalhado em 3.1, uma empresa está solvente se o valor do PLA for igual ou superior ao CMR.

Diante disso, embora de acordo com as inequações (4.21) acima qualquer valor superior ao resultado da função convexa definida por (4.20) seja uma solução viável para o $CMR_t(s)$, a solução ótima coincidirá exatamente com (4.20), como destaca a Figura 4.2 abaixo. Isto ocorre, pois de acordo com a função objetivo definida, será ótimo minimizar o $CMR_t(s)$. No gráfico a linha contínua representa a solução ótima, sendo a região viável definida acima da linha, incluindo-a.

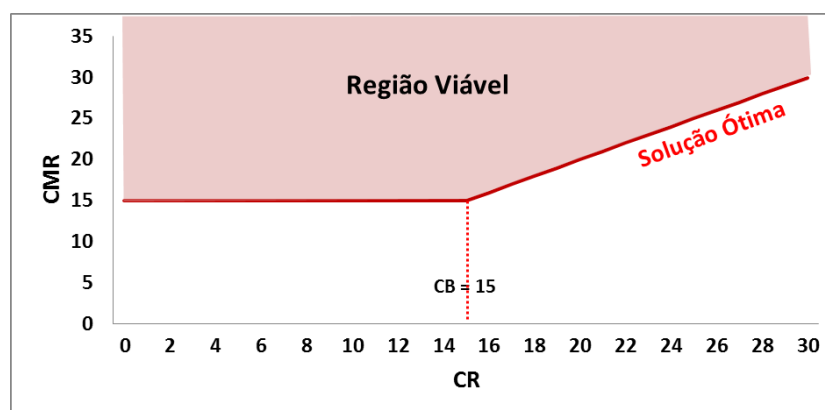


Figura 4.2 – Definição do CMR

4.2.7.1

Modelagem do Capital de Risco (CR)

O valor do capital de risco foi calculado de acordo com os fundamentos da seção 3.4.2. Diante disso, foi definido:

$$CR_t(s) = CR_{outros_t}(s) + CR_{oper_t}(s), \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.22)$$

Onde $CR_{outros_t}(s)$ e $CR_{oper_t}(s)$ foram definidos como detalha as próximas subseções.

4.2.7.2

Modelagem do CR_{outros}

A equação (3.11) definiu o cálculo do capital de risco no instante t , CR_t e a seção 3.4.2.3 definiu que o CR_{outros} é o capital de risco calculado sem a parcela relativa ao risco operacional. Diante disso, define-se esta parcela para qualquer estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ por:

$$CR_{outros_t}(s) = \left(CR_{sub_t}(s)^2 + CR_{cred_t}(s)^2 + CR_{sub_t}(s) \cdot CR_{cred_t}(s) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

$$, \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S}$$

Contudo, como a equação (4.31) formaliza, o valor de $CR_{cred_t}(s)$ é uma função das alocações nas diferentes classes de ativos e caixa no estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$. Então, a equação (4.23) acima representa uma restrição não linear, o que impossibilita a solução através de um modelo de programação estocástica linear como aqui proposto.

Todavia, uma solução aproximada é viável através da expansão de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)(x-\omega)^n}{n!} \quad (4.24)$$

Onde:

$f^{(n)}(\omega)$ é a n -ésima derivada da função f .

ω é um ponto central a definir.

Para tornar a equação linear em $CR_{cred_t}(s)$, será utilizada somente a expansão de primeira ordem, ou seja:

$$f(x) \cong f(\omega) + f^{(1)}(\omega)(x - \omega) \quad (4.25)$$

Logo, é necessário obter a primeira derivada de $CR_{outros_t}(s)$ em relação a $CR_{cred_t}(s)$ que através da regra da cadeia é definida por:

$$\frac{dCR_{outros_t}(s)}{dCR_{cred_t}(s)} = \frac{1}{2} \cdot \left(CR_{sub_t}(s)^2 + CR_{cred_t}(s)^2 + CR_{sub_t}(s) \cdot CR_{cred_t}(s) \right)^{-1/2} \cdot \left(2 \cdot CR_{cred_t}(s) + CR_{sub_t}(s) \right) \quad (4.26)$$

Com isso, o valor aproximado de $CR_{outros_t}(s)$ é definido por:

$$CR_{outros_t}(s) = \left(CR_{sub_t}(s)^2 + \omega^2 + CR_{sub_t}(s) \cdot \omega \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(CR_{sub_t}(s)^2 + \omega^2 + CR_{sub_t}(s) \cdot \omega \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2 \cdot \omega + CR_{sub_t}(s) \right) \cdot \left(CR_{cred_t}(s) - \omega \right), \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.27)$$

Quanto mais próximo o ponto central ω está do verdadeiro valor de $CR_{cred_t}(s)$ melhor será a aproximação, e por este motivo foi definido ω como uma proporção do $CR_{sub_t}(s)$ que é definido antes da otimização, sendo um parâmetro já conhecido. Assim:

$$\omega_t(s) = r_{sub} \cdot CR_{sub_t}(s), \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.28)$$

Onde r_{sub} é definido de acordo com a experiência da empresa, e neste trabalho foi utilizado o valor $r_{sub} = 0,25$, pois observando os dados das empresas do mercado segurador, este é um valor médio da relação entre $CR_{sub_t}(s)$ e $CR_{cred_t}(s)$.

Adicionalmente, de acordo com o que foi definido em (3.12), $CR_{sub_t}(s)$ é o valor da provisão contratual (PC) multiplicada por um fator de risco (f_{sub}). Assim, esta parcela é definida para qualquer estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ por:

$$CR_{sub_t}(s) = f_{sub} \cdot PC_t(s), \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.29)$$

Diante destas definições e rearranjando os termos, o valor de $CR_{outros_t}(s)$ foi definido na programação estocástica linear como:

$$\begin{aligned}
 CR_{outros_t}(s) = & \left[(r_{sub}^2 + 1 + r_{sub}) \left(CR_{sub_t}(s) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{1}{2} \left[(r_{sub}^2 + 1 + r_{sub}) \left(CR_{sub_t}(s) \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\
 & \left((2 \cdot r_{sub} + 1) \cdot CR_{sub_t}(s) \right) \cdot \left(CR_{cred_t}(s) - r_{sub} \cdot CR_{sub_t}(s) \right), \\
 & \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S}
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

Para melhor visualizar a aproximação, vide na Figura 4.3 os valores CR_{outros} exatos e aproximados calculados, por exemplo, para uma empresa com $CR_{sub} = R\$ 100 \text{ milhões}$, com diferentes valores de CR_{cred} e o valor do ponto central $\omega = R\$25 \text{ milhões}$. Mesmo para valores muito distintos de CR_{cred} a aproximação é muito boa.

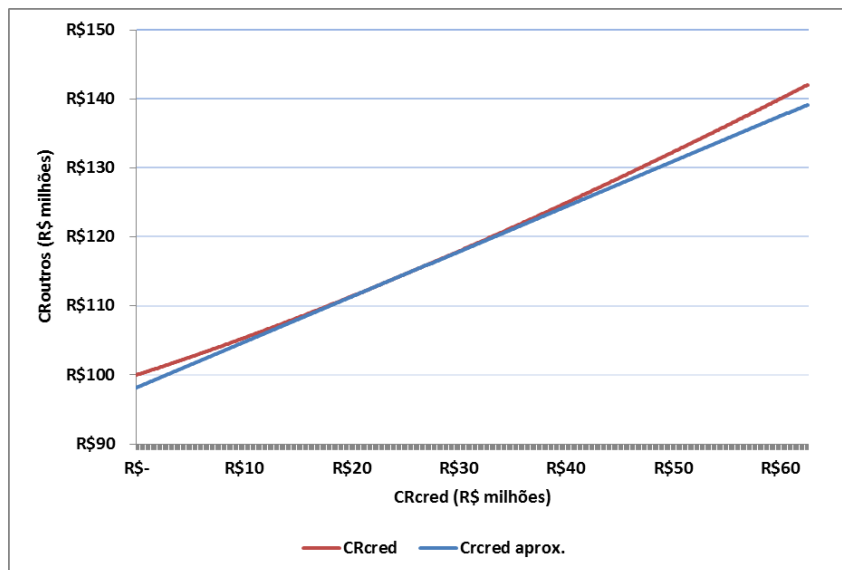


Figura 4.3 – Exemplo da aproximação linear sugerida para o $CR_{outros_t}(s)$

4.2.7.3

Modelagem do capital referente ao risco de crédito CR_{cred}

De acordo com o modelo de mensuração do capital referente ao risco de crédito, definido em 3.4.2.2, excetuando os títulos públicos, todos os demais ativos estão sujeitos a riscos de créditos. Diante disso, utilizando a equação (3.13) para todo estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
CR_{cred_t}(s) = & 0,11 \cdot \left[f_{cred}^{caixa} \cdot (C_t^g(s) + C_t^l(s)) \right. \\
& \left. + \sum_{a \in \mathcal{A}} f_{cred}^a \cdot (A_t^{g,a}(s) + A_t^{l,a}(s)) \right], \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

E de acordo com o que também antecipou a seção 3.4.2.2, $f_{cred}^{caixa} = 0,20$, $f_{cred} = [0,20 \quad 0,20 \quad 0^8]$.

4.2.7.4

Modelagem do capital referente ao risco operacional CR_{oper}

Como definiu a seção 3.4.2.3, o procedimento de mensuração do capital referente ao risco operacional consiste na definição do menor valor entre 30% do capital referente aos demais riscos e um percentual ($f_{oper} = 0,0008$) das provisões do segmento de vida e previdência. Sendo assim, este capital pode ser definido para todos os estágios e cenários por:

$$CR_{oper_t}(s) = \min(0,3 \cdot CR_{outros_t}(s); f_{oper} \cdot P_t(s)), \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S} \tag{4.32}$$

Contudo, tal equação é não linear e, desta forma, foi definida a seguinte restrição para o programa linear proposto:

$$\begin{aligned}
CR_{oper_t}(s) = & \begin{cases} 0,3 \cdot CR_{outros_t}(s), & \text{se } 0,3 \cdot CR'_{outros_t}(s) < f_{oper} \cdot P_t(s) \\ f_{oper} \cdot P_t(s), & \text{se } 0,3 \cdot CR'_{outros_t}(s) \geq f_{oper} \cdot P_t(s), \end{cases} \tag{4.33} \\
& \forall t \in \mathcal{T} \text{ e } \forall s \in \mathcal{S}
\end{aligned}$$

Onde $CR'_{outros_t}(s)$ é calculado de acordo com a (4.23), mas ao invés de utilizar o valor de $CR_{cred_t}(s)$, utiliza-se o valor de $\omega_t(s)$ definido em (4.28) para aproximação via expansão de Taylor. Tal recurso é uma aproximação, para que as condições utilizadas em (4.33) sejam definidas *off-line* (antes da otimização) e que assim sejam viáveis de serem utilizadas na programação linear.

⁸ Os valores investidos em imóveis não são considerados no cálculo do CR_{cred} , contudo para uma maior facilidade de formalização e programação considerou o valor investido em imóvel multiplicado por um fator nulo.

Vale destacar que esta aproximação pode resultar em pequenas distorções para valores de $0,3.CR_{outros_t}(s)$ próximos de $f_{oper}.P_t(s)$ antes da otimização. Contudo, tendo que na prática a parcela $0,3.CR_{outros_t}(s)$ foi introduzida como um mecanismo de evitar altos valores de $CR_{oper_t}(s)$, que tem sua estimação mais imprecisa, comumente $f_{oper}.P_t(s) \ll 0,3.CR_{outros_t}(s)$. Adicionalmente, os valores de $CR_{oper_t}(s)$ são relativamente pequenos ao se comparar com os demais valores de capital, o que reduz significativamente possíveis impactos de aproximações para os casos de valores de $0,3.CR_{outros_t}(s)$ próximos de $f_{oper}.P_t(s)$.

Vale destacar que este recurso para determinar o valor aproximado de $CR_{oper_t}(s)$, bem como outras aproximações ao longo do trabalho, foi utilizado para garantir uma solução via programação linear e assim manter um menor nível de complexidade do mesmo. Caso se buscasse soluções não aproximadas, poderiam ser utilizados mecanismos de programação inteira, por exemplo, fazendo uso de variáveis binárias. Contudo, destaca-se que ao executar o modelo nos exercícios de testes (vide seção 6.2) verificou-se que em 100% dos estágios e cenários o valor de $CR_{oper_t}(s)$ foi definida por $f_{oper}.P_t(s)$, logo não influenciando no resultado a aproximação adotada acima.

4.3

Função objetivo

A função objetivo proposta consiste em três parcelas. A primeira é uma bonificação pelo excesso de ativos livres (AL) para cada estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$. Tal bonificação é coerente, pois o gestor tentará maximizar os ganhos da companhia o que resultará em um maior AL, o que poderá culminar, por exemplo, em maiores bônus e pagamentos de dividendos para os acionistas.

A segunda parcela consiste numa penalização para diferentes níveis de insolvência de acordo com as regras de penalidades propostas pela regulamentação do mercado de seguros e previdência definidas na seção 3.1. Esta parcela da função objetivo tem como meta ao ser definida em conjunto com a primeira parcela estabelecer uma função utilidade côncava, e consequentemente

avessa ao risco para a empresa. Considerando que a empresa prefere retornos menores, porém de menor risco para garantir a sua perpetuidade, nada mais natural do que uma função utilidade avessa ao risco.

A terceira parcela é necessária para a correta totalização dos valores dos ativos garantidores e ativos livres conforme mencionado previamente na seção 4.2.6.

4.3.1

Bonificação para o excesso de AL em relação ao CMR

Considerando ser um objetivo da empresa maximizar os seus ativos livres, é naturalmente coerente inserir na função objetivo um bônus para cada cenário de excesso de ativos livres (AL) em relação ao CMR. Diante disso, definiu-se a bonificação para cada estágio $t \in \mathcal{T}$ e cenário $s \in \mathcal{S}$ para a reta $AL_t(s) - CMR_t(s)$. Sendo o valor de $AL_t(s)$ calculado de acordo com a equação (4.18).

4.3.2

Penalização por nível de insolvência

De acordo com o que foi detalhado na 3.1, pela atual regulação as empresas do mercado segurador estão sujeitas a uma crescente de penalidades e intervenções de acordo com o seu nível de insolvência (NI) ao comparar o PLA com o CMR. Como foi previamente apresentado:

- Se $0 < NI \leq 0,5$ a empresa deverá elaborar um plano de regularização de solvência (PRS);
- Se $0,5 < NI \leq 0,7$ a empresa estará sujeita a regime especial de direção-fiscal;
- Se $NI > 0,7$ a empresa estará sujeita a liquidação extrajudicial.

Diante da necessidade de refletir tais diretrizes de ações, assim como Valladão et al. (2014), foi utilizada neste trabalho uma função linear por partes que aumenta a penalidade na função objetivo para maiores graus de insuficiência. Então, foi criada uma variável indicadora para identificar os valores de insuficiência em cada estágio e cenário que excedeu os três possíveis níveis de acordo com as sanções acima elencadas ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0,5$ e $\varphi_3 = 0,7$). Ou seja:

$$I_t^i(s) = [(1 - \varphi_i) \cdot CMR_t(s) - PLA_t(s)]^+, \forall i \in I, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (4.34)$$

Tal equação é claramente não linear, logo para o programa linear proposto foram utilizadas as seguintes inequações lineares para todo nível de insolvência:

$$I_t^i(s) \geq 0, \forall i \in I, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} \quad (4.35)$$

$$I_t^i(s) \geq (1 - \varphi_i) \cdot CMR_t(s) - PLA_t(s), \forall i \in I, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}$$

Considerando que se busca maximizar a função objetivo, a penalidade será minimizada na solução ótima do problema, e diante disso no ótimo se garante a igualdade entre (4.34) e (4.35). Para tanto foi definido um vetor de penalidades $(\theta_i, \text{para } i = 1, 2, 3)$ e a restrição (4.35) garante que a cada excesso a uma nível de penalidade φ_i , será acrescentado como penalização na função objetivo o valor de $\theta_i \cdot I_t^i(s)$, sendo a penalidade incremental a cada nível de insuficiência. Um exemplo, para $\theta_1 = 2, \theta_2 = 2, \theta_3 = 4$ e $CMR = 100$, é apresentado na Figura 4.4 abaixo. No gráfico, se identifica a penalização para os diferentes valores de PLA pela linha vermelha contínua definida por todas as equações de penalizações para cada nível. E como argumentado acima, tal linha contínua representa a solução ótima.

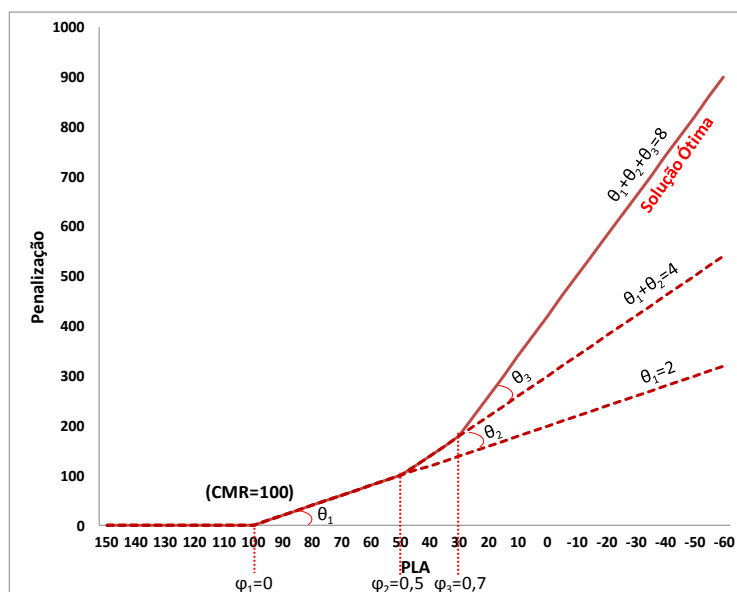


Figura 4.4 – Função de penalidades para diferentes níveis de insolvência

4.3.3

Penalização por insuficiência de Ativos Garantidores (AG)

Diante da necessidade de definir a parcela correta dos ativos que se refere aos ativos garantidores (ativos que lastreiam provisões técnicas) e, conseqüentemente, aos ativos livres (excesso de ativos em relação às provisões técnicas) foi definida a variável indicadora, $IAG_t(s)$, através de (4.19) na seção 4.2.6. Tal variável indicadora será inserida na função objetivo como uma penalização e com isso será ótimo minimizá-la, e assim buscará se garantir que $AG_t(s) = \min(P_t(s); A_t(s))$ de acordo com a sua definição. Para isso, deverá ser utilizado um valor de penalidade (π) bem elevado para ser extremamente onerosa para a função objetivo qualquer distorção dos valores corretos dos ativos garantidores e livres.

Graficamente, se observa a função convexa definida por IAG na Figura 4.5. No gráfico se destaca toda a região acima da linha vermelha que representa a região viável de soluções, contudo o nó ótimo a solução se encontra na linha contínua definida.

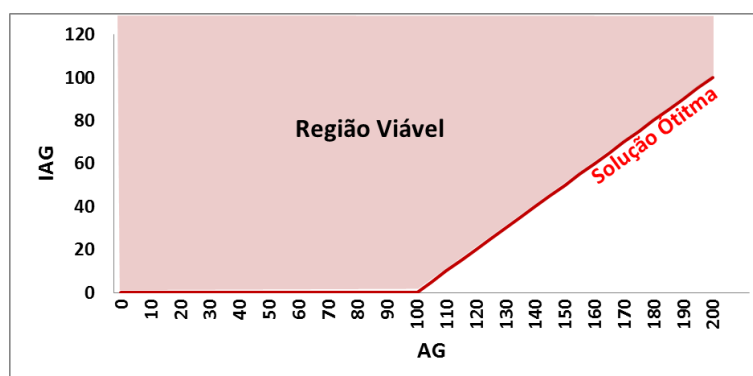


Figura 4.5 – Valores de excesso de ativos garantidores em reação às provisões

4.3.4

Função objetivo definida

Diante das definições propostas acima, a função objetivo finalmente pode ser definida por:

$$\max \sum_{t \in \mathcal{T}} p_s \cdot \left[\sum_{s \in \mathcal{S}} \left((AL_t(s) - CMR_t(s)) - \sum_{i \in I} \theta_i \cdot I_t^i(s) - \pi \cdot IAG_t(s) \right) \cdot \psi_t(s) \right] \quad (4.36)$$

Onde p_s é a probabilidade de ocorrência de cada cenário.

Para este trabalho, após diversos testes que foram detalhados na seção 6, foram definidos os seguintes valores para as penalidades: $\theta_1 = 10, \theta_2 = 10, \theta_3 = 20$ e $\pi = 1000$.

Dado os parâmetros definidos, ilustra-se abaixo para um exemplo com $CMR = 100, \theta_1 = 2, \theta_2 = 2, \theta_3 = 4$ a função côncava resultante que representa a utilidade para a empresa em diferentes níveis de solvência. Considerando a teoria de aversão ao risco, diante da função utilidade côncava, a empresa é considerada avessa ao risco. Isto é, entre um valor de retorno maior, porém mais arriscado, ela opta por um valor menor, mas com um menor risco, sendo este montante considerado o equivalente certo.

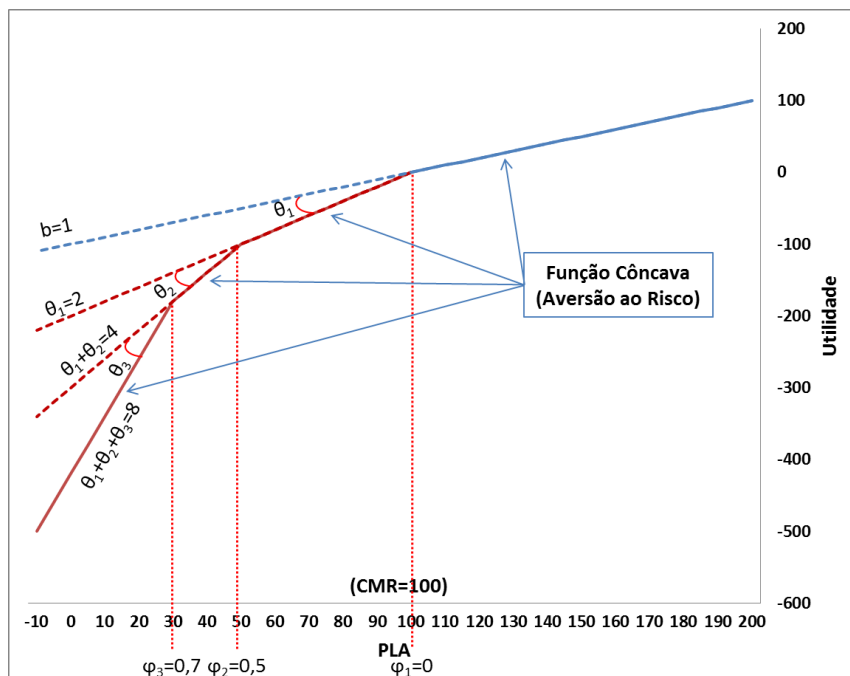


Figura 4.6 – Função utilidade côncava resultante

No exemplo ilustrativo acima, considerou-se que não houve deduções no PLA, para assim garantir que $PLA_t(s) = AL_t(s)$ e com isso melhor compreender

o gráfico. Destaca-se ao analisar a função objetivo definida que as regras impostas pela Susep e demais órgãos reguladores ao redor do mundo naturalmente definem a aversão ao risco das empresas.