

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



João Carlos Virgolino Soares

Formulação Unificada Para a Análise de Cascas Cilíndricas Finas e Espessas pelo Método dos Elementos Finitos

(Unified Finite Element Formulation for Thin and Thick Cylindrical Shell Analysis)

Projeto de Graduação

Trabalho de pesquisa apresentado como requisito parcial para conclusão do curso de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Carlos Alberto de Almeida

Rio de Janeiro,
Dezembro de 2015

Agradecimentos

A Deus, razão da minha vida, que me ajudou na caminhada diária, em meio a todos os obstáculos e dificuldades.

Aos meu pais, meus maiores exemplos. A meu pai João Carlos Pinheiro Soares, que me ensinou a amar o trabalho, a ser responsável, que foi minha maior inspiração a fazer engenharia e, acima de tudo, por ter sido meu melhor amigo. A minha mãe, Imar Marrão Virgolino, por todo amor, carinho, compreensão, ajuda nos momentos mais difíceis e por me ensinar desde cedo que a escola não era uma obrigação, e sim meu maior direito.

A Ana Balthazar, minha grande companheira que sempre esteve no meu lado nos momentos bons e ruins.

Ao meu orientador, Professor Carlos Alberto de Almeida, pela paciência, por todos os ensinamentos e por servir de grande exemplo para mim e para diversos outros alunos de engenharia.

Ao Professor Mauro Speranza, pela oportunidade de estágio que me proporcionou muitas experiências valiosas.

Ao Professor Marco Meggiolaro e a todos os membros da equipe RioBotz, que me acolheram num lugar tão agradável e desafiador, onde aprendi muito e fiz grandes amizades.

A todos os amigos que fiz durante o curso, que sempre fizeram o dia a dia na Puc mais divertido, especialmente Igor Girsas e Gabriel Barsi, por me motivarem a ir mais longe.

A todos os meus amigos de infância e familiares.

A PUC-Rio, pela bolsa concedida que me permitiu concluir meus estudos e por me proporcionar esse período de intenso aprendizado e transformação.

“Learn from yesterday, live for today, hope for tomorrow. The important thing is not to stop questioning”

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma formulação analítica e numérica para análise de cascas cilíndricas finas e espessas, sob carregamentos de pressão interna e externa, empregando-se o método dos elementos finitos unidimensionais com número variável de nós.

No modelo numérico, os deslocamentos associados aos pontos nodais são representados por campos de deslocamentos nas direções longitudinal e radial da casca, verificando as restrições de tensões nulas nas faces interna (pressão externa) e externa (pressão interna) em uma combinação das soluções analíticas para cascas espessas cilíndricas e esféricas. Esses campos de deslocamentos são representados por seis graus de liberdade em cada ponto nodal.

As condições de contorno naturais de cisalhamento nulo nas superfícies interna e externa da casca são garantidas na vinculação entre os graus de liberdade do modelo. A condição de continuidade entre elementos adjacentes e a condição de fixação de um elemento são impostas utilizando o Método das Penalidades.

Os resultados numéricos obtidos com a implementação do modelo proposto são comparados com aqueles fornecidos em um software comercial, para a validação do trabalho.

Palavras-Chave

Cascas Cilíndricas Finas e Espessas, Método dos Elementos Finitos, Método das Penalidades

Abstract

In this work is presented an analytical and numerical formulation for the analysis of thin and thick cylindrical shells, under internal and external pressure loads, utilizing the unidimensional Finite Element Method with variable number of nodes.

In the numerical model, displacements associated to the nodal points are represented by displacement fields in the longitudinal and radial directions of the shell, verifying the restrictions of zero shear stress at the internal and external surfaces of the shell, in a combination of analytical solutions for thick cylindrical and spherical shells. Those displacement fields are represented by six degrees of freedom in each nodal point.

The natural boundary condition of zero shear stress at the internal and external surfaces of the shell are guaranteed through the imposition of the linking between the model's degrees-of-freedom. The continuity between two adjacent elements and the fixation conditions of an element are imposed using the Penalty Method.

The numerical results obtained from the implementation of the proposed model are compared with those provided by commercial software, for the work's validation.

Keywords

Cylindrical Thin and Thick Shells, Finite Elements Method, Penalty Method

Lista de Figuras

Figura 1: Sistemas de Coordenadas em Uma Casca Axissimétrica	4
Figura 2: Elemento Unidimensional	15
Figura 3: Malha de um cilindro de paredes espessas	29
Figura 4: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	30
Figura 5: Tensão Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	30
Figura 6: Deformação Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	31
Figura 7: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	31
Figura 8: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	33
Figura 9: Tensão Radial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	34
Figura 10: Deformação Circunferencial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	34
Figura 11: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	35
Figura 12: Tensão Circunferencial ao longo da espessura no nó do engaste ($p_i = 12$ MPa)	37
Figura 13: Tensão Longitudinal ao longo da espessura no nó do engaste ($p_i = 12$ MPa)	37
Figura 14: Deslocamento Radial ao longo da comprimento ($p_i = 12$ MPa)	38
Figura 15: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	39
Figura 16: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	40
Figura 17: Tensão Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	40
Figura 18: Deformação circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	41
Figura 19: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	41
Figura 20: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	43
Figura 21: Tensão Radial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	43
Figura 22: Deformação circunferencial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	44
Figura 23: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_e = 12$ MPa)	44
Figura 24: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	46
Figura 25: Tensão Longitudinal ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	47
Figura 26: Deslocamento Radial ao longo da comprimento ($p_i = 12$ MPa)	47
Figura 27: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	48
Figura 28: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	49
Figura 29: Tensão Longitudinal ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	49
Figura 30: Deslocamento Radial ao longo da comprimento ($p_i = 12$ MPa)	50
Figura 31: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)	51

Lista de Tabelas

Tabela 1: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões	32
Tabela 2: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações	32
Tabela 3: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões	36
Tabela 4: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações	36
Tabela 5: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões	42
Tabela 6: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações	42
Tabela 7: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões	45
Tabela 8: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações	45

Sumário

1.	Introdução.....	1
2.	Modelo Matemático Analítico.....	3
2.1.	Teoria Geral de Cascas	3
2.2.	Definição das Superfícies.....	3
2.3.	Deslocamentos para o caso de casca espessa.....	5
2.3.1.	Deslocamento na Direção Longitudinal (ξ).....	5
2.3.2.	Deslocamento na Direção Radial (ζ).....	6
2.4.	Relação Deformação-Deslocamento.....	6
2.5.	Simplificações para Cascas Cilíndricas	8
2.6.	Equações Constitutivas	9
2.7.	Condições de Contorno.....	9
3.	Formulação Numérica do Modelo.....	11
3.1.	Princípio dos Deslocamentos Virtuais	11
3.2.	Método dos Elementos Finitos.....	13
3.2.1.	Formulação do Elemento Unidimensional Considerado.....	15
3.3.	Matriz Rigidez Global do Elemento Considerado	18
3.3.1.	Definição da Matriz B (Deformação - Deslocamento)	18
3.3.2.	Definição da Matriz C (Constitutiva).....	19
3.3.3.	Definição da Matriz K (Rigidez Global).....	20
3.4.	Vetor Carregamento.....	21
4.	Condições de Continuidade e de Fixação.....	22
4.1.	Método da Função Penalidade	22
4.1.1.	Aplicação do Método na Formulação Numérica.....	23
4.1.2.	Condição de Continuidade	24
4.1.3.	Condição de Fixação	26
5.	Solução Numérica	28
5.1.	Cilindros de Paredes Finas Livres sob Pressão Interna.....	29
5.2.	Cilindros de Paredes Finas Livres sob Pressão Externa	33
5.3.	Cilindros de Paredes Finas com Engaste Simples sob Pressão Interna	36
5.4.	Cilindros de Paredes Espessas Livres sob Pressão Interna.....	39
5.5.	Cilindros de Paredes Espessas Livres sob Pressão Externa.....	43
5.6.	Cilindros de Paredes Espessas com Engaste Simples sob Pressão Interna.....	46
5.7.	Cilindros de Paredes Espessas com Engaste Duplo sob Pressão Interna.....	49
6.	Conclusão	52
	Apêndice I - Solução Analítica dos Deslocamentos para uma Casca Cilíndrica Espessa	53
	Apêndice II - Condições de Contorno Naturais	55
	Apêndice III – Formulação da Matriz B	56
	Apêndice IV – Matriz de Penalidades da Continuidade.....	60
	Bibliografia.....	63

1. Introdução

Várias estruturas nas áreas de engenharia podem ser classificadas como estruturas axissimétricas. Um caso particularmente importante desse tipo de estrutura é a casca cilíndrica, que geralmente aparece como vasos de pressão ou em recipiente para líquidos. O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta bastante utilizada no cálculo de projeto dessas estruturas.

A utilização do Método de Elementos Finitos para análise de estruturas axissimétricas com modelos de simplificação de malha utilizando elementos unidimensionais é reportada na literatura, como nas referências [1] e [3], com bons resultados quanto à precisão e eficiência numérica.

O objetivo desse trabalho é desenvolver a formulação de um modelo para cascas finas e espessas axissimétricas pelo método dos elementos finitos, através do emprego de um elemento com interpolação unidimensional dos graus de liberdade, utilizando uma parametrização para a representação de cilindros. O modelo apresentado possui seis graus de liberdade, que representam as incógnitas do problema, foi implementado em um programa de computador na linguagem C, e que permite a realização dos testes necessários.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

Na seção 2, são apresentados conceitos básicos de superfícies e cascas e as considerações para cascas cilíndricas do modelo: compatibilidade geométrica, equações constitutivas e as equações dos campos de deslocamento radial e longitudinal, definidos em função dos graus de liberdade. Finalmente, são definidas as condições de contorno naturais do modelo.

Na seção 3 é feita uma introdução aos conceitos básicos do Método dos Elementos Finitos e a sua formulação. Nessa seção é obtida a equação de equilíbrio do sistema invocando-se o Princípio dos Deslocamentos Virtuais, e são obtidas as matrizes e vetores que compõem o

problema: interpolação, compatibilidade geométrica deformação-deslocamento, rigidez e vetor carregamentos.

Na seção 4 é apresentada a utilização do Método das Penalidades para garantir as condições de continuidade entre elementos adjacentes e de fixação de elementos, mostrando as condições necessárias, os cálculos e a resultante modificação da matriz de rigidez obtida na seção anterior.

As seções 5 e 6 destinam-se à exposição dos resultados numéricos obtidos através de simulações e a comparação destes com as soluções fornecidas pelo programa Ansys, um software comercial de elementos finitos. Dessa forma foi possível analisar de forma coerente e consistente as soluções fornecidas pelo modelo numérico simplificado desenvolvido e apresentar-se as devidas conclusões e propostas para desenvolvimentos futuros.

2. Modelo Matemático Analítico

Nessa seção são expostos conceitos sobre superfícies e cascas, necessários para o entendimento da formulação do modelo numérico. Também são apresentadas as equações de compatibilidade geométrica e constitutivas referentes à geometria de casca cilíndrica e as equações dos campos de deslocamento radial e longitudinal.

2.1. Teoria Geral de Cascas

Uma casca é definida como a região delimitada por duas superfícies curvas. Em uma casca de revolução a superfície média é obtida da giração de uma linha (reta ou curva) em torno de um eixo contido no seu próprio plano e é tomada como referência das coordenadas locais, sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes das superfícies interna e externa. A espessura da casca é a distância entre essas superfícies, medida ao longo da direção normal à superfície média, para cada ponto da mesma. A formulação desenvolvida neste trabalho é proposta para aplicações tanto a cascas finas quanto a cascas espessas.

2.2. Definição das Superfícies

Uma superfície é representada matematicamente em um sistema de coordenadas global, tendo um sistema ortogonal local definido por coordenadas curvilíneas, como apresentado na figura 1. Assim, as coordenadas globais do vetor posição de um ponto de uma superfície podem ser expressas segundo a expressão:

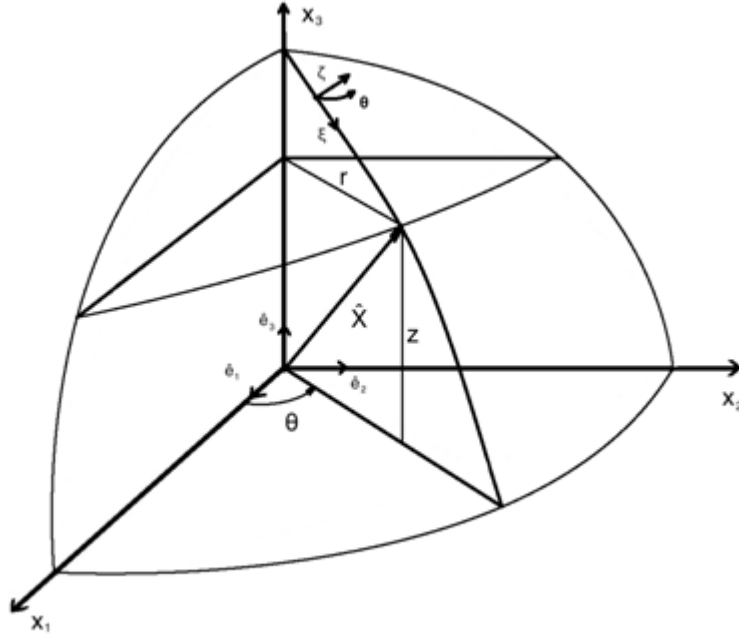


Figura 1: Sistemas de Coordenadas em Uma Casca Axissimétrica

$$\hat{X}(\xi, \theta) = f_1(\xi, \theta)\hat{e}_1 + f_2(\xi, \theta)\hat{e}_2 + f_3(\xi, \theta)\hat{e}_3 \quad (2-1)$$

Onde \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 são os vetores da base canônica do sistema de coordenadas global e f_1, f_2 e f_3 são funções contínuas, definidas pelos parâmetros geométricos da superfície.

Considerando-se uma superfície de revolução, tema de estudo do presente trabalho, obtida através da rotação de uma curva geratriz em torno de um eixo, pode-se definir as coordenadas locais como $r(\xi)$ e $z(\xi)$, representando as coordenadas radial e longitudinal, respectivamente. Desta forma, reescrevendo-se \hat{X} obtém-se, então:

$$\hat{X}(\xi, \theta) = r(\xi) \cos(\theta) \hat{e}_1 + r(\xi) \sin(\theta) \hat{e}_2 + z(\xi) \hat{e}_3 \quad (2-2)$$

De considerações geométricas a variação do comprimento do vetor posição ds e as variações dr e dz das coordenadas $r(\xi)$ e $z(\xi)$, respectivamente, relacionam-se pela equação:

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 = \left(\frac{dr(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2 \quad (2-3)$$

Os raios principais de curvatura R_1 e R_2 na superfície média da casca [1] são expressos pelas equações:

$$R_1 = \frac{s'^3}{r''z' - z''r'} \quad (2-4)$$

$$R_2 = \frac{s'r}{z'} \quad (2-5)$$

em que se utilizam as notações $s' = \frac{ds}{d\xi}$, $r' = \frac{dr}{d\xi}$, $z' = \frac{dz}{d\xi}$.

Para simplificar o desenvolvimento teórico, assume-se que a casca possui espessura constante e também que as coordenadas curvilíneas longitudinal (ξ), circunferencial (θ) são independentes, ou seja, $d\theta/d\xi = d\xi/d\theta = 0$.

2.3.Deslocamentos para o caso de casca espessa

Os campos de deslocamento de cilindros de casca fina são referidos à superfície média. Porém, o mesmo não se aplica para o caso de cascas espessas, pois a hipótese de segmentos normais se manterem retos e perpendiculares à superfície da casca não é mais aplicável. Desta forma, cada uma das coordenadas deverá ser associada a um campo de deslocamento independente.

2.3.1. Deslocamento na Direção Longitudinal (ξ)

U_l é definido como o deslocamento na direção longitudinal ξ da casca e é resultado da adição de um campo de deslocamento constante de membrana a um campo de deslocamentos que representa as condições de cisalhamento nulo nas superfícies da casca.

$$U_1(\xi, \zeta) = U_1^0(\xi) + Y_1(\xi)T + \Phi_1(\xi)T^2 + \Psi_1(\xi)T^3 \quad (2-6)$$

Onde U_1^0 representa o campo de deslocamento de membrana, Y_1 , Φ_1 e Ψ_1 são variáveis de estado generalizadas, ao longo da direção longitudinal (ξ), enquanto T se refere à coordenada local ao longo da espessura, tomada a partir da superfície média da casca.

2.3.2. Deslocamento na Direção Radial (ζ)

O deslocamento na direção radial W é obtido combinando-se as soluções analíticas para cascas cilíndricas e esféricas submetidas à pressão interna e externa na forma seguinte:

$$W(\xi, \zeta) = W_0(\xi) + \frac{W_1(\xi)}{R(\xi, \zeta)} + W_2(\xi)R(\xi, \zeta) + \frac{W_3(\xi)}{[R(\xi, \zeta)]^2} \quad (2-7)$$

com $R(\xi, \zeta) = R_2(\xi) + T(\zeta)$

onde W_0 se refere à solução analítica para cascas de paredes finas. A segunda parcela é a solução para cilindros espessos, cuja forma é $W_1/R + W_2R$, e, finalmente, a solução para esferas espessas, tem a forma $W_2R + W_3/R^2$, conforme mostrado no desenvolvimento analítico apresentado nos Apêndices I e II.

2.4. Relação Deformação-Deslocamento

As equações de deformação da casca espessa são determinadas a partir da definição da extensão ε de uma fibra dS , paralela à superfície média:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} l_i l_j = \frac{(dS^* - dS)}{dS} \quad (2-8)$$

Onde ε_{ij} são as componentes do tensor deformação, dS^* é o comprimento da fibra na superfície deformada e l_i e l_j referem-se aos cossenos diretores do elemento dS .

Pode-se definir o comprimento dS a partir das derivadas $\partial\hat{X}/\partial\theta$ e $\partial\hat{X}/\partial\xi$, onde \hat{X} é o vetor posição de um ponto da casca, como dito anteriormente nesta seção. As relações deformação-deslocamento, explicitadas a seguir, são obtidas a partir das componentes analíticas das deformações lineares e de cisalhamento. [4]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{A_1\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{A_1 W}{R_1} \right) \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{A_2\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \frac{A_2 W}{R_2} \right) \\
\varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial T} \\
\gamma_{\xi\theta} &= \frac{A_2\left(1+\frac{T}{R_2}\right)}{A_1\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{U_2}{A_2\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \right] + \frac{A_1\left(1+\frac{T}{R_1}\right)}{A_2\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{U_1}{A_1\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \right] \\
\gamma_{\xi\zeta} &= \frac{1}{A_1\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial W}{\partial \xi} + A_1 \left(1 + \frac{T}{R_1} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{U_1}{A_1\left(1+\frac{T}{R_1}\right)} \right] \\
\gamma_{\theta\zeta} &= \frac{1}{A_2\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial W}{\partial \xi} + A_2 \left(1 + \frac{T}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{U_1}{A_2\left(1+\frac{T}{R_2}\right)} \right]
\end{aligned} \tag{2-9}$$

Onde

$$A_1 = \frac{ds}{d\xi} \quad A_2 = r \quad T = \frac{h}{2} \zeta \tag{2-10}$$

Nas eq. (2-9) e (2-10), W é o deslocamento radial, U_1 é o deslocamento longitudinal ao longo do meridiano da casca, U_2 é o deslocamento referido à coordenada circunferencial θ e T é a coordenada local ao longo da espessura da casca.

2.5. Simplificações para Cascas Cilíndricas

Para o caso de cascas axissimétricas sob carregamentos axissimétricos, a condição de simetria implica que o deslocamento U_2 na direção circunferencial e as derivadas dos demais deslocamentos em relação à coordenada θ devem ser nulas:

$$U_2 = \frac{dU_1}{d\theta} = \frac{dW}{d\theta} = \frac{ds'}{d\theta} = \frac{dR_1}{d\theta} = \frac{dR_2}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} = 0 \quad (2-11)$$

Além destas condições, também para o caso particular das cascas cilíndricas considerado neste estudo, as seguintes considerações referentes aos raios principais de curvatura devem ser feitas:

$$R_1 \rightarrow \infty$$

$$R_2 = R$$

Aplicando-se essas simplificações nas relações (2-10) e (2-11) e substituindo-se o resultado nas equações (2-9), estas resultam nas seguintes equações para as deformações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{s'} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{W}{(R+T)} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial T} \\ \gamma_{\xi\zeta} &= \frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial T} \\ \gamma_{\xi\theta} &= \gamma_{\theta\zeta} = 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

2.6. Equações Constitutivas

Após as simplificações mostradas na seção anterior, verifica-se que apenas quatro componentes de deformações são não nulas para a geometria de cascas cilíndricas. Utilizando-se a relação linear da Lei de Hooke, associada ao material homogêneo isotrópico, as seguintes equações deformação-tensão para cascas são obtidas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\xi\xi} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\zeta\zeta})] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\zeta\zeta})] \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\zeta\zeta} - \nu(\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\theta\theta})] \\ \gamma_{\xi\zeta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\xi\zeta}\end{aligned}\tag{2-13}$$

correspondentes às seguintes equações da transformação tensão-deformação:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\varepsilon_{\xi\xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\zeta\zeta} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\xi\xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\zeta\zeta} \right] \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\varepsilon_{\zeta\zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\xi\xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\theta\theta} \right] \\ \tau_{\xi\zeta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\xi\zeta}\end{aligned}\tag{2-14}$$

2.7. Condições de Contorno

Um dos objetivos da função interpolação do campo de deslocamento U_1 , como mostrado na seção 2.3.1, é permitir representar-se a condição de cisalhamento nulo nas faces interior e exterior da casca, quando submetida a pressões internas e externas.

Como explicitado na seção 2.6, a deformação angular $\gamma_{\xi\zeta}$ depende da única componente não nula da tensão de cisalhamento, resultando que a mesma também seja nula para a coordenada local $\zeta=\pm 1$.

Com essas informações, a partir das equações de deslocamento impondo-se $\gamma_{\xi\zeta}=0$ para $\zeta=\pm 1$, é possível definir-se as variáveis de estado Φ_1 e Ψ_1 , componentes do deslocamento U_1 da casca em função dos demais campos de deslocamento, conforme está mostrado no Apêndice II.

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=+1} - \frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=-1} \right) \frac{1}{2h} \quad (2-15)$$

$$\Psi_1 = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=+1} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=-1} \right) \frac{2}{3h^2 s'} + 2\gamma_1 \quad (2-16)$$

3. Formulação Numérica do Modelo

A formulação para cascas cilíndricas apresentada na seção 2 é agora implementada através do Método dos Elementos Finitos baseado nos deslocamentos. Nesse método o domínio considerado na análise é dividido em sub-domínios (elementos) compostos por “nós”, onde são calculados os deslocamentos regidos pelas relações geométricas e equações desenvolvidas no capítulo anterior.

Por conta da simetria axial do sólido considerado, é proposta uma discretização unidimensional isoparamétrica ao longo da geratriz da superfície média do cilindro, dividida em elementos segundo a coordenada ξ na direção longitudinal. Estes elementos são representados pelos deslocamentos avaliados em 4 nós, em que o primeiro e o último nós são comuns aos dois elementos adjacentes do elemento considerado. Como usual na formulação numérica por Elementos Finitos, a equação equilíbrio estático do sistema associada aos deslocamentos é obtida através do Princípio dos Deslocamentos Virtuais.

Nesta seção são abordados os conceitos do Método dos Elementos Finitos e o seu desenvolvimento para a solução do modelo proposta no presente trabalho.

3.1. Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Na formulação geral do Método de Elementos Finitos a equação de equilíbrio do sistema associada aos deslocamentos é obtida impondo-se o Princípio dos Deslocamentos Virtuais: “O equilíbrio de um corpo é satisfeito para qualquer campo de deslocamento pequeno e compatível quando o trabalho virtual interno for igual ao trabalho virtual externo”. [6] Desta forma, considerando-se o princípio da conservação da energia (1ª lei da Termodinâmica) para sistemas adiabáticos,

$$W_{interno} = W_{externo} \tag{3-1}$$

Em outras palavras, a condição de equilíbrio estático em um corpo é satisfeita quando o trabalho realizado pelas forças externas (forças de corpo, forças de superfície e cargas concentradas) for igual ao trabalho resultante das tensões e deformações internas do corpo. Essa condição é equivalente à condição de minimização da Energia Potencial Total de um corpo elástico linear contínuo, que imposta resulta na equação de equilíbrio. Assim, de uma forma geral, a Energia Potencial Total é descrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \hat{\epsilon}^T \hat{\sigma} dV - \int_V \hat{U}^T \hat{F}_B dV - \int_A \hat{U}_A^T \hat{F}_A dA - \sum \hat{U}_C^T \hat{F}_C \quad (3-2)$$

em que, $\hat{\epsilon}^T$ e $\hat{\sigma}$ são vetores contendo as componentes dos tensores das deformações e tensões, que em um sistema de coordenadas em 3 dimensões são representados por:

$$\hat{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}] \quad (3-3)$$

$$\hat{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}] \quad (3-4)$$

$\hat{\epsilon}$ e $\hat{\sigma}$ relacionam-se através das equações constitutivas, organizadas na forma matricial através da Matriz Constitutiva C , a qual está explicitada na eq. (3-28), i.e.

$$\hat{\sigma} = C \hat{\epsilon} \quad (3-5)$$

\hat{F}_A , \hat{F}_B e \hat{F}_C , representam os vetores representativos das forças de superfície, forças de corpo e carregamentos concentrados, respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{F}_A &= [F_{Ax} \ F_{Ay} \ F_{Az}] \\ \hat{F}_B &= [F_{Bx} \ F_{By} \ F_{Bz}] \\ \hat{F}_C &= [F_{Cx} \ F_{Cy} \ F_{Cz}] \end{aligned} \quad (3-6)$$

E, finalmente, o vetor \hat{U}^T contém os deslocamentos nas três coordenadas globais de um ponto do corpo:

$$\hat{U}^T = [u \ v \ w] \quad (3-7)$$

Da condição de estacionaridade do funcional Π (minimização da energia), ou seja, fazendo $\delta\Pi = 0$, obtém-se a equação de equilíbrio do sistema:

$$\int_V \delta\hat{\epsilon}^T C \hat{\epsilon} dV = \int_V \delta\hat{U}^T \hat{F}_B dV + \int_A \delta\hat{U}_A^T \hat{F}_A dA - \sum \delta\hat{U}_C^T \hat{F}_C \quad (3-8)$$

Na equação anterior $\delta\hat{U}^T$, $\delta\hat{U}_A^T$ e $\delta\hat{U}_C^T$ são as variações dos deslocamentos associados às forças de corpo, superfície e concentradas, respectivamente, que satisfazem as condições de contorno essenciais do problema. $\delta\hat{\epsilon}^T$ corresponde à variação dos componentes do vetor de deformação do corpo.

3.2. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica numérica de resolução das equações diferenciais parciais representativas das condições de contorno, compatibilidade geométrica e constitutiva. Nesse método o domínio estudado é sub-dividido em elementos conectados por pontos nodais.

As coordenadas dos deslocamentos no interior do elemento são relacionadas com as coordenadas dos deslocamentos dos pontos nodais através de uma matriz de interpolação dos deslocamentos $H_{(x,y,z)}^{(n)}$, definida à priori,

$$\hat{u}_{(x,y,z)}^{(n)} = H_{(x,y,z)}^{(n)} \hat{U}^{(n)} \quad (3-9)$$

onde $\hat{u}^{(n)}$ representa o vetor que contém as componentes dos deslocamentos nas coordenadas globais x,y,z , e $\hat{U}^{(n)}$ é o vetor dos componentes dos deslocamentos dos k nós do elemento (n) .

$$\hat{U}^{(n)T} = [U_1 \ V_1 \ W_1 \ \dots \ U_k \ V_k \ W_k] \quad (3-10)$$

Utilizando-se o campo de deslocamentos na eq. (3-9) obtém-se a equação para as medidas das deformações:

$$\hat{\varepsilon}^{(n)} = B_{(x,y,z)}^{(n)} \hat{U}^{(n)} \quad (3-11)$$

que são obtidas, no problema linear para pequenos deslocamentos, das derivadas das componentes dos deslocamentos $\hat{u}_{(x,y,z)}^{(n)}$, definidos em (3-9), em relação às coordenadas globais.

Na eq. (3-11) $B^{(n)}$ é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais do elemento (n) . Ela é composta por equações que são funções de grandezas geométricas do elemento e dos polinômios de interpolação.

Substituindo-se os campos de deslocamento e deformações na equação de equilíbrio (3-8), para todos os elementos e integrando sobre cada domínio, obtém-se o sistema linear que governa o comportamento da estrutura, na forma:

$$K \hat{U} = \hat{R} \quad (3-12)$$

onde \hat{U} é o vetor dos deslocamentos contendo todos os graus de liberdade associados aos pontos nodais (deslocamentos), K é matriz de rigidez global e \hat{R} é o vetor dos carregamentos nodais equivalentes. Desta forma a matriz de rigidez global K , definida combinando-se a matriz deformação-deslocamento B e a matriz constitutiva C , resulta em:

$$K = \sum_n K^{(n)} = \sum_n \int_{V^{(n)}} B^{(n)T} C^{(n)} B^{(n)} dV^{(n)} \quad (3-13)$$

$$\hat{R} = \hat{R}_B + \hat{R}_A + \hat{R}_C \quad (3-14)$$

O vetor de carregamentos resulta da adição dos vetores das forças de corpo, de superfície e das cargas concentradas, que são expressos, respectivamente, na forma:

$$\hat{R}_B = \sum_n \int_{V^{(n)}} H_B^{(n)T} \hat{F}_B^{(n)} dV^{(n)} \quad (3-15)$$

$$\hat{R}_A = \sum_n \int_{A^{(n)}} H_A^{(n)T} \hat{F}_A^{(n)} dA^{(n)} \quad (3-16)$$

$$\hat{R}_C = \hat{F}_C \quad (3-17)$$

3.2.1. Formulação do Elemento Unidimensional Considerado

Para a definição das equações de equilíbrio e suas respectivas matrizes, é preciso caracterizar-se geometricamente os elementos (sub-domínios) que formam a malha de elementos finitos. No presente estudo, conforme mostrado na Fig. 3, considera-se a geometria de um sólido (casca) axissimétrico em relação ao eixo coordenado-z cujos graus-de-liberdade são referidos à superfície média. Desta forma, a formulação apresentada utiliza elementos unidimensionais com discretização ao longo da geratriz (posicionada na superfície média). O elemento resultante que define uma casca cilíndrica será, consequentemente, uma subdivisão dessa linha média, reta paralela ao eixo-y de simetria.

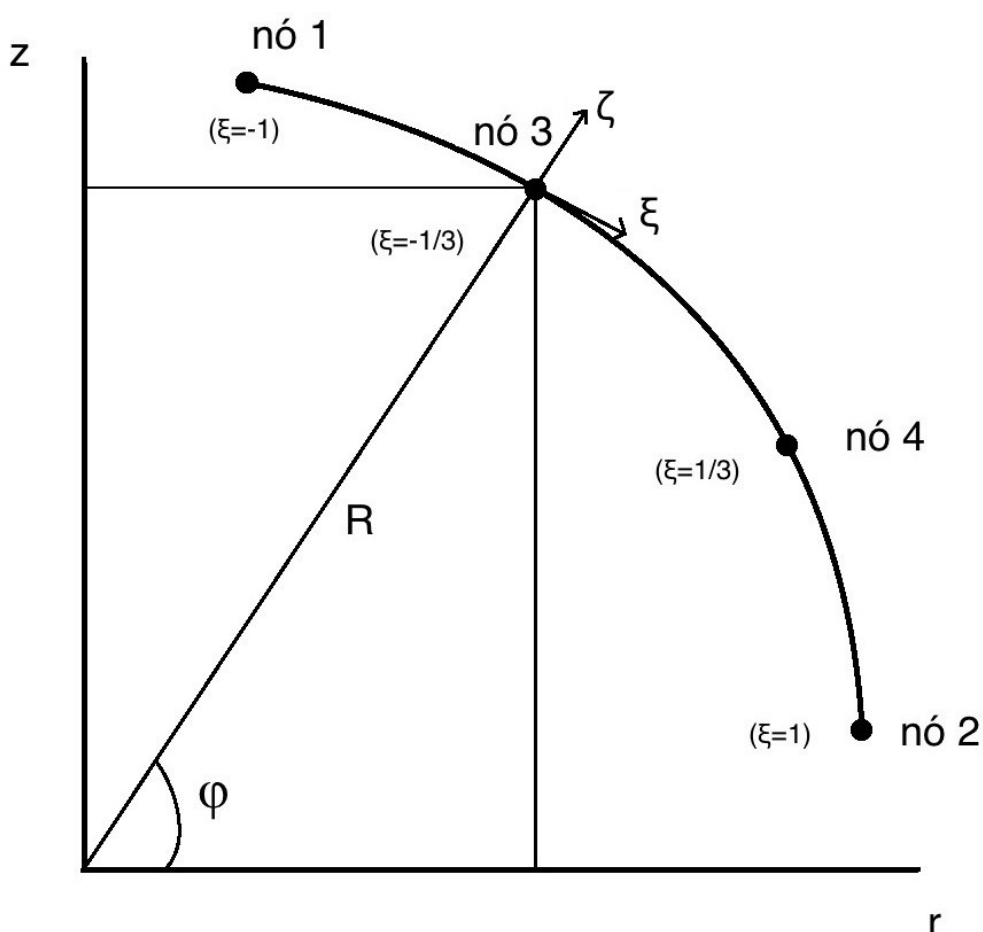


Figura 2: Elemento Unidimensional

Na Fig. 3 um elemento axissimétrico genérico, e seus respectivos quatro nós, estão dispostos na ordem 1-3-4-2. Para o caso particular do cilindro, o ângulo da figura φ de transformação das coordenadas globais e locais é igual a zero.

A cada nó tem-se associados dois campos de deslocamento translacionais, previamente explicitados na Seção 2, nas eqs. (2-6) e (2-7), U_1 e W . U_1 representa o deslocamento do ponto nodal na direção longitudinal ξ , enquanto W é o deslocamento na direção radial ζ . Na formulação lagrangiana considerada, os parâmetros geométricos e os deslocamentos são interpolados por funções polinomiais de terceiro grau que, para um elemento de 4 nós, possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= \frac{(-9\xi^3 + 9\xi^2 + \xi - 1)}{16} \\ h_2(\xi) &= \frac{(9\xi^3 + 9\xi^2 - \xi - 1)}{16} \\ h_3(\xi) &= \frac{(27\xi^3 - 9\xi^2 - 27\xi + 9)}{16} \\ h_4(\xi) &= \frac{(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9)}{16} \end{aligned} \quad (3-18)$$

Com isso, explicitam-se as coordenadas cartesianas globais radial e axial, respectivamente, considerando:

$$r(\xi) = \sum_{i=1}^k h_i(\xi) r_i \quad (3-19)$$

$$z(\xi) = \sum_{i=1}^k h_i(\xi) z_i \quad (3-20)$$

Onde $k=4$ é o número de nós do elemento, ξ é a coordenada longitudinal local isoparamétrica, válida no intervalo $[-1, 1]$ e ζ é a coordenada local que percorre a espessura da casca. Para o caso específico das cascas cilíndricas $r(\xi)$ é constante.

As componentes dos campos de deslocamento são também interpoladas na direção longitudinal da casca. Empregando-se as funções em (3-18) pode-se representar os deslocamentos definidos no capítulo 2, nas equações (2-6) e (2-7), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U_0(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) U_0^i \\
Y_1(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) Y_1^i \\
W_0(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_0^i \\
W_1(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_1^i \\
W_2(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_2^i \\
W_3(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_3^i
\end{aligned} \tag{3-21}$$

Utilizando os campos de deslocamentos acima definidos, as equações das medidas de deformações descritas pelas equações (2-12) podem ser reescritas em função das componentes dos deslocamentos nodais. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{s'} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) U_0^i \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) Y_1^i \right] T + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Phi_1^i \right] T^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Psi_1^i \right] T^3 \right) \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_0 + \frac{\sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_1}{R+T} + \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_2(R+T) + \frac{\sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_3}{[R+T]^2}}{(R+T)} \\
\varepsilon_{\zeta\zeta} &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) \frac{\partial W}{\partial T}
\end{aligned} \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\xi\zeta} &= \frac{1}{s'(R+T)} \sum_{i=1}^k \frac{\partial h_i(\xi)}{\partial \xi} \left(W_0 + \frac{W_1}{R+T} + W_2(R+T) + \frac{W_3}{[R+T]^2} \right) + \left(\left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) Y_1^i \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[2 \sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Phi_1^i \right] T + \left[3 \sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Psi_1^i \right] T^2 \right)
\end{aligned}$$

onde

$$s' = \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad R(\xi, \zeta) = R_2(\xi) + T(\zeta) \quad T = \frac{h}{2} \zeta$$

Assim, os campos de deformação associados ao elemento axissimétrico unidimensional são definidos em função de seus graus de liberdade. A matriz de rigidez global K do elemento e o vetor de carregamentos nodais R são considerados nas seções seguintes.

3.3. Matriz Rigidez Global do Elemento Considerado

3.3.1. Definição da Matriz B (Deformação - Deslocamento)

A relação de compatibilidade geométrica, que relaciona as deformações do elemento com as 6 componentes do deslocamento associados aos quatro nós do mesmo elemento, é representada pela matriz $B^{(n)}$ na forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \gamma_{\xi\zeta} \end{bmatrix}^{(n)} = B^{(n)} \hat{U}^{(n)} \quad (3-23)$$

onde \hat{U} é o vetor contendo os deslocamentos da casca associados aos 4 pontos nodais de cada elemento (n) , tendo portanto um total de 24 graus-de-liberdade.

$$\hat{U}^{(n)T} = [U_0^1 \quad \gamma_1^1 \quad W_0^1 \quad W_1^1 \quad W_2^1 \quad W_3^1 \quad U_0^3 \quad \dots \quad U_0^4 \quad \dots \quad U_0^2 \quad \dots] \quad (3-24)$$

Desta forma, tem-se que a matriz $B^{(n)}$ para um determinado elemento pode ser escrita na forma seguinte:

$$B^{(n)} = [B_1 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_2] \quad (3-25)$$

Com B_1 , B_2 , B_3 e B_4 sendo as sub-matrizes de B obtidas para cada nó do elemento, na seguinte forma:

$$B_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{11}^i & a_{11}^i & a_{11}^i & a_{11}^i & a_{11}^i \\ a_{21}^i & a_{21}^i & a_{21}^i & a_{21}^i & a_{21}^i & a_{21}^i \\ a_{31}^i & a_{31}^i & a_{31}^i & a_{31}^i & a_{31}^i & a_{31}^i \\ a_{41}^i & a_{41}^i & a_{41}^i & a_{41}^i & a_{41}^i & a_{41}^i \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Os elementos de cada coluna da Matriz B referem-se ao grau de liberdade específico de cada nó do elemento (n), conforme explicitado no vetor em (3-24), e cada linha de B se refere a cada uma das componentes de deformação do elemento, conforme listado no vetor de deformações mostrado à eq. (3-23).

Portanto, associado a cada elemento tem-se um vetor de deformações, um vetor de deslocamentos e uma matriz $B(\xi, \zeta)$ correspondente. As derivações das equações para os termos a_{ij} em (3-26) estão descritas no Apêndice IV.

3.3.2. Definição da Matriz C (Constitutiva)

A Matriz Constitutiva representa a relação entre as componentes das tensões e das deformações, em cada ponto da estrutura (casca). Considerando-se a relação linearizada desta relação para materiais homogêneos e isotrópicos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\zeta\zeta} \\ \tau_{\xi\zeta} \end{bmatrix}^{(n)} = C^{(n)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \gamma_{\xi\zeta} \end{bmatrix}^{(n)} \quad (3-27)$$

onde a matriz $C^{(n)}$, resultante da Lei de Hooke, apresenta-se na forma seguinte:

$$C^{(n)} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

onde E e ν são, respectivamente, o Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

3.3.3. Definição da Matriz \mathbf{K} (Rigidez Global)

Considerando-se cada elemento resultante da discretização da estrutura obtém-se a matriz de rigidez \mathbf{K} local, que relaciona o vetor dos deslocamentos com o vetor dos carregamentos nodais, conforme expresso na eq. (3-12). Considerando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, esta matriz é obtida da integração, sobre o volume $V^{(n)}$ do elemento, da combinação das matrizes $B^{(n)}$ e $C^{(n)}$ na forma:

$$K^{(n)} = \int_{V^{(n)}} B^{(n)T} C^{(n)} B^{(n)} dV^{(n)} \quad (3-29)$$

Devido à simetria axial da casca esta equação é, neste estudo, simplificada, realizando-se a integração sobre o volume correspondente ao ângulo central de 1 radiano da casca. Dessa maneira a equação reduz-se à integral sobre a área de revolução da casca cilíndrica, nas coordenadas locais ξ e ζ , na forma:

$$K^{(n)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(\xi, \zeta)^{(n)T} C^{(n)} B(\xi, \zeta)^{(n)} R(\zeta) \frac{dz}{d\xi} d\xi d\zeta \quad (3-30)$$

3.4. Vetor Carregamento

De acordo com a eq. (3-12), além da matriz de rigidez, é também necessário definir-se o vetor dos carregamentos nodais equivalentes, para a obtenção dos deslocamentos. Neste estudo são consideradas as pressões agindo nas superfícies interna e externa do cilindro. Para este tipo de carregamento, o vetor das forças nodais equivalentes associado a um elemento (n) é dado pela expressão:

$$\hat{R}_A^{(n)} = \int_{A(n)} H^{(n)T} p^{(n)} dA \quad (3-32)$$

onde $p^{(n)}$ é o vetor das pressões atuantes e A é a área de atuação da pressão correspondente ao ângulo central de 1 radiano da casca, considerando-se se a pressão é interna ou externa. Já $H^{(n)T}(\xi)$ é a matriz contendo as funções de interpolação associadas às componentes de deslocamento.

Assim, a matriz $H^{(n)T}(\xi)$ possui a seguinte forma, correspondente ao deslocamento radial da casca:

$$H^{(n)T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_1(\xi) & h_1(\xi)/R_A & h_1(\xi)R_A & h_1(\xi)/R_A^2 & 0 & 0 & h_3 & \dots \\ 0 & 0 & h_4(\xi) & \dots & 0 & 0 & h_2(\xi) & h_2(\xi)/R_A & h_2(\xi)R_A & h_2(\xi)/R_A^2 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

Inserindo os termos referentes à área, obtém-se da eq. (3-32):

$$\hat{R}_A^{(n)} = \int_{-1}^1 H^{(n)T}(\xi) p^{(n)} R_A \frac{dz}{d\xi} d\xi \quad (3-34)$$

onde

$$R_A = R_2 + \frac{h}{2} \text{ para pressão externa} \quad (3-35)$$

$$\text{e } R_A = R_2 - \frac{h}{2} \text{ para pressão interna}$$

4. Condições de Continuidade e de Fixação

Na formulação do modelo de Elementos Finitos apresentada na Seção 3, deve-se atentar para a necessidade de serem impostas duas condições: Continuidade e Fixação. A continuidade entre elementos deve ser garantida entre dois elementos adjacentes. As condições de fixação devem ser impostas nos graus de liberdade associados aos nós extremos da casca, na representação da condição de contorno em diferentes situações.

A condição de continuidade do deslocamento radial W entre dois elementos adjacentes é automaticamente garantida ao longo da coordenada longitudinal e ao longo da espessura por meio dos graus de liberdade generalizados no ponto nodal comum aos elementos adjacentes.

A condição de continuidade do deslocamento axial U_1 é garantida pela imposição da condição de contorno natural de deformação angular nula nas faces interna e externa da casca, conforme visto na Seção 2.

Finalmente, faz-se também necessário impor uma condição de fixação na casca. Neste caso, os valores nodais dos graus de liberdade são nulos nos pontos de fixação.

Estas restrições são impostas no presente trabalho através do Método de Penalidades, um método numérico de imposição de restrições amplamente utilizado em problemas de otimização.

4.1. Método da Função Penalidade

O Método de Penalidades ou Método da Função Penalidade é um método usado em problemas de otimização, e consiste em transformar um problema de minimização sujeito a restrições em uma série de problemas de minimização sem restrições. [7]

Define-se inicialmente a função a ser minimizada:

$$\phi(\hat{X}, \alpha) = F(\hat{X}) + \alpha \sum_{i=1}^N [g_i(\hat{X})]^2 \quad (4-1)$$

Onde $F(\hat{X})$ é a função a ser minimizada sujeita às restrições $g_i(\hat{X}) = 0$, \hat{X} é um vetor contendo as variáveis do problema e α é a magnitude do parâmetro de penalidade, assumindo valores maiores ou iguais a 0.

Para que a solução obtida da minimização satisfaça a restrição $g_i(\hat{X}) = 0$, é preciso definir um valor adequado para o parâmetro α . Para valores crescentes de α , a convergência da solução é assegurada.

Deve-se atentar ao fato, porém, de que a escolha de um valor muito elevado para α torna o termo $\sum_{i=1}^N [g_i(\hat{X})]^2$ dominante na equação de minimização, o que resulta na perda da identificação matemática original do problema, definida pela função objetivo $F(\hat{X})$. Para evitar isso, define-se um valor de α que mantenha os dois termos da equação na mesma ordem de grandeza.

4.1.1. Aplicação do Método na Formulação Numérica

Como dito na seção 4.1, o método de penalidades implica em adicionar-se a uma função objetivo, sujeita a restrições e a ser minimizada, um funcional que representa a imposição de restrições de igualdade. Na presente formulação do modelo de cascas cilíndricas, a função objetivo $F(\hat{X})$ a ser minimizada é o funcional da Energia Potencial Π , conforme definido na Seção 3. Portanto, a partir da eq. (4-1), define-se um novo funcional Π^* :

$$\Pi^* = \Pi + \frac{\alpha}{2} (\text{restrição})^2 \quad (4-2)$$

onde tem-se restrições da forma:

$$\text{restrição} = 0 \quad (4-3)$$

Pela minimização do funcional Π^* , i.e., impondo-se a condição de estacionaridade $\delta\Pi^* = 0$, obtém-se o resultado da minimização de Π , satisfazendo as condições prescritas em (4-3). Estas restrições são representativas das condições de continuidade e de fixação.

Embora os deslocamentos radial e longitudinal têm sua continuidade entre elementos garantida por graus de liberdade generalizados e por condições de contorno naturais, como visto no início desta seção, é preciso também garantir a continuidade da primeira derivada do deslocamento radial W , impondo a condição de igualdade entre as derivadas obtidas em dois elementos adjacentes, no nó comum. Já a condição de fixação de um elemento é representada impondo-se valores nulos para as componentes dos campos de deslocamento e para a primeira derivada de W em relação à coordenada ξ .

4.1.2. Condição de Continuidade

Esta condição a ser imposta pelo método das penalidades garante a continuidade da primeira derivada do deslocamento radial W entre elementos adjacentes. Para isso, são definidas duas restrições: nas paredes interna e externa do cilindro, entre os elementos (n) e $(n+1)$.

$$\text{restrição1} = \left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1}^{(n)} - \left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{(n+1)} \right]_{\zeta=+1} \quad (4-4)$$

$$\text{restrição2} = \left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1}^{(n)} - \left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{(n+1)} \right]_{\zeta=-1} \quad (4-5)$$

Aplicando estas restrições na eq. (4-2) e impondo a condição de estacionaridade do funcional Π^* , obtém-se uma nova equação de equilíbrio para o sistema:

$$(K + K_{PT}^C) \hat{U} = \hat{R} \quad (4-6)$$

Os termos K , \hat{U} e \hat{R} são os mesmos vistos na seção 3. O termo K_{PT}^C representa a matriz de penalidades, que impõe a continuidade para N pontos nodais. Essa matriz pode ser expressa pela soma de outras duas, cada uma referente às faces interna ou externa da casca.

$$K_{PT}^C = K_{P1}^C + K_{P2}^C \quad (4-7)$$

Na eq. (4-7), K_{P1}^C representa a matriz para a superfície externa e K_{P2}^C para a superfície interna. Por sua vez, estas matrizes são representadas pelo somatório das matrizes de penalidade definidas para cada ponto nodal j .

$$K_{P1}^C = \sum_{j=1}^N K_{P1j}^C \quad (4-8)$$

$$K_{P2}^C = \sum_{j=1}^N K_{P2j}^C \quad (4-9)$$

Finalmente, cada matriz K_{Pkj}^C pode ser definida como:

$$K_{Pkj}^C = \alpha G_{Ck}^T G_{Ck} \quad (4-10)$$

$$\text{e} \quad G_{Ck} = [G_{1k} \ G_{2k} \ G_{3k}] \quad (4-11)$$

Como visto anteriormente nesta seção, α é a magnitude da penalidade, enquanto G_{Ck} é uma matriz composta pelos graus-de-liberdade nodais de dois elementos adjacentes, Portanto, possui 42 componentes, explicitados a seguir:

$$G_{1k} = [a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1 \ e_1 \ f_1 \ a_3 \ \dots \ a_4 \ \dots] \quad (4-12)$$

$$G_{2k} = [g \ h \ i \ j \ k \ l] \quad (4-13)$$

$$G_{3k} = [u_3 \ v_3 \ w_3 \ x_3 \ y_3 \ z_3 \ u_4 \ \dots \ u_2 \ \dots] \quad (4-14)$$

As componentes da matriz G_{Ck} estão associadas a componentes do vetor dos graus de liberdade globais:

$$\hat{U}^T = [\hat{u}_{(n)}^T \ \hat{u}_{(int)}^T \ \hat{u}_{(n+1)}^T] \quad (4-15)$$

$$\hat{u}_{(n)}^T = [U_o^{1(n)} \ \gamma_1^{1(n)} \ W_o^{1(n)} \ W_1^{1(n)} \ W_2^{1(n)} \ W_3^{1(n)} \ U_o^{3(n)} \ \dots \ U_o^{4(n)} \ \dots] \quad (4-16)$$

$$\hat{u}_{(n+1)}^T = [U_o^{3(n+1)} \ \dots \ U_o^{4(n+1)} \ \dots \ U_o^{2(n+1)} \ \dots] \quad (4-17)$$

$$\hat{u}_{(n)}^T = [U_o^{(int)} \ \gamma_1^{(int)} \ W_o^{(int)} \ W_1^{(int)} \ W_2^{(int)} \ W_3^{(int)}] \quad (4-18)$$

Os graus de liberdade do elemento (n) estão associados com os termos de G_{1k} , assim como os do elemento (n+1) estão associados a G_{3k} . O nó intermediário, comum aos dois

elementos, está associado a G_{2k} . Os termos que preenchem a matriz G_{Ck} estão deduzidos no Apêndice V.

4.1.3. Condição de Fixação

Esta condição se faz necessária nos pontos nodais em que há a condição de engaste da casca cilíndrica. Nesta condição, as componentes do deslocamento são nulas, bem como a primeira derivada do campo de deslocamento radial W , nas faces interna e externa, para o nó fixado, relativamente à coordenada axial da casca.

Anular as componentes do deslocamento é equivalente a remover-se da matriz de rigidez global os graus de liberdade nodais correspondentes. E, para a condição de derivada de W nula, aplicam-se as seguintes restrições, usando o mesmo procedimento usado na condição de continuidade:

$$\text{restrição1} = \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^{(i)}_{\xi=\pm 1} \right]_{\zeta=+1} \quad (4-19)$$

$$\text{restrição2} = \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^{(i)}_{\xi=\pm 1} \right]_{\zeta=-1} \quad (4-20)$$

Aplicando-se essas restrições à eq. (4-2), esta resulta na seguinte equação de equilíbrio:

$$(K + K_{PT}^F) \hat{U} = \hat{R} \quad (4-21)$$

onde os termos K , \hat{U} e \hat{R} são conforme definidos na seção 3 e o termo K_{PT}^F representa a matriz de penalidades de fixação. Essa matriz pode ser expressa pela soma de outras duas, cada uma referente às faces interna ou externa da casca.

$$K_{PT}^F = K_{P1}^F + K_{P2}^F \quad (4-22)$$

Na eq. (4-22), K_{P1}^F representa a matriz para a superfície externa e K_{P2}^F para a superfície interna. Ambas as matrizes podem ser representadas pelo somatório das matrizes de penalidade definidas para cada ponto nodal, na forma:

$$K_{P1}^F = \sum_{j=1}^N K_{P1j}^F \quad (4-23)$$

$$K_{P2}^F = \sum_{j=1}^N K_{P2j}^F \quad (4-24)$$

Com cada matriz K_{Pkj}^F podendo ser definida como:

$$K_{Pkj}^F = \alpha G_{Fk}^T G_{Fk} \quad (4-25)$$

Onde α é a magnitude do fator de penalidade e G_{Fk} pode ser explicitada na forma:

$$G_{Fk} = [m_1 \ n_1 \ o_1 \ p_1 \ q_1 \ r_1 \ m_3 \ \dots \ m_4 \ \dots \ m_2 \ \dots] \quad (4-26)$$

Os termos que compõem essa matriz estão desenvolvidos no Apêndice V e podem ser representados como:

$$m_p = 0$$

$$n_p = 0$$

$$o_p = \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=\pm 1}$$

$$p_p = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta=\pm 1} \quad (4-27)$$

$$q_p = \left(R \frac{\partial h_p}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta=\pm 1}$$

$$r_p = \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial R}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta=\pm 1}$$

O vetor deslocamento associado a essa matriz de penalidades é o mesmo elementar apresentado na eq. (3-24) e, portanto, a combinação das condições de continuidade e fixação resultam na seguinte equação de equilíbrio a ser considerada:

$$(K + K_{PT}^C + K_{PT}^F) \hat{U} = \hat{R} \quad (4-28)$$

5. Solução Numérica

O modelo descrito nesse trabalho foi implementado em um programa de computador utilizando-se a linguagem C. Os valores encontrados no programa foram comparados com aqueles fornecidos no software comercial Ansys, para a validação do trabalho.

Em todos os testes numéricos foram utilizados os seguintes parâmetros geométricos e físicos:

Módulo de Elasticidade (E)	Coefficiente de Poisson (ν)	Pressão (p)	Magnitude da penalidade (α)	Comprimento (L)
200 GPa	0,3	12 MPa	10^{16}	300 mm

Nos casos de cilindros livres (com a condição de fixação nula nas extremidades), os testes numéricos foram realizados para malhas formadas por 1 elemento apenas. Nos casos de cilindros com engaste, os testes numéricos foram realizados com malhas formadas por 80 elementos. A magnitude do parâmetro de penalidade foi estabelecida através da experimentação numérica.

Nas simulações utilizando software, utilizou-se uma malha com elementos sólidos tridimensionais representando $\frac{1}{4}$ do sólido cilíndrico, conforme mostrado na Fig.3. Condições de contorno de apoio simples foram empregadas nas faces paralelas aos eixos x e y, representando a simetria axial do problema, além da condição de contorno simples ou de fixação na base, conforme a condição de cilindro livre ou engastado, respectivamente. A malha utilizada para o caso de cilindros de paredes espessas está mostrada na Fig.3.

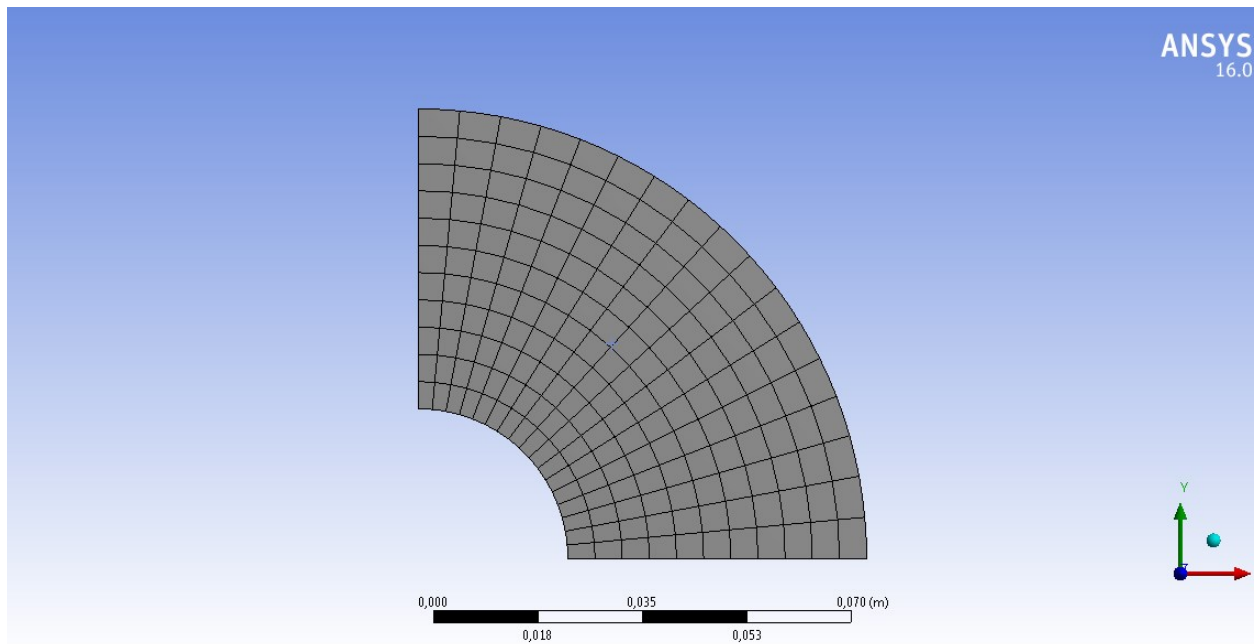


Figura 3: Malha de um cilindro de paredes espessas

5.1. Cilindros de Paredes Finas Livres sob Pressão Interna

Inicialmente considerou-se um cilindro de casca fina, em que $R \gg h$, i.e., no caso em que o raio do cilindro é maior que a espessura em uma ordem de grandeza ou mais. No presente estudo considera-se:

$$\frac{R}{h} \geq 10 \quad (5-1)$$

utilizando-se um cilindro com os seguintes parâmetros:

$$R = 50 \text{ mm} \quad h = 5 \text{ mm} \quad (5-2)$$

As Figuras 4, 5, 6 e 7 a seguir apresentam uma comparação entre as soluções obtidas com o presente estudo e com o programa Ansys para as medidas das tensões e deformações (circunferencial e radial) ao longo da espessura da casca.

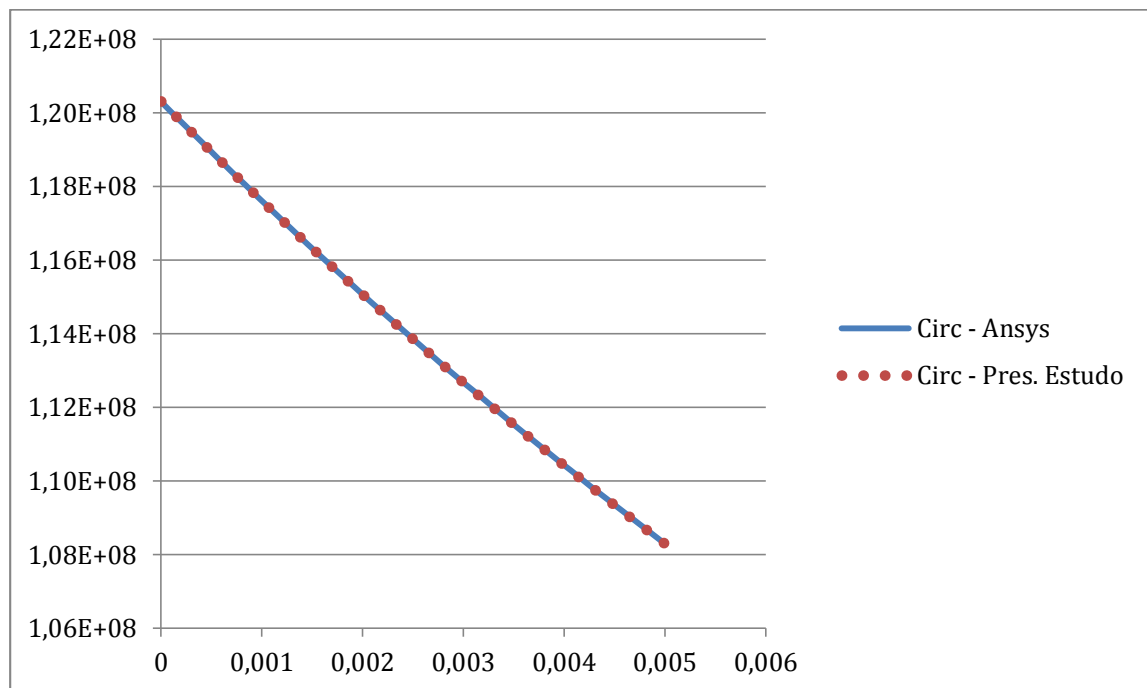


Figura 4: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($\pi = 12 \text{ MPa}$)

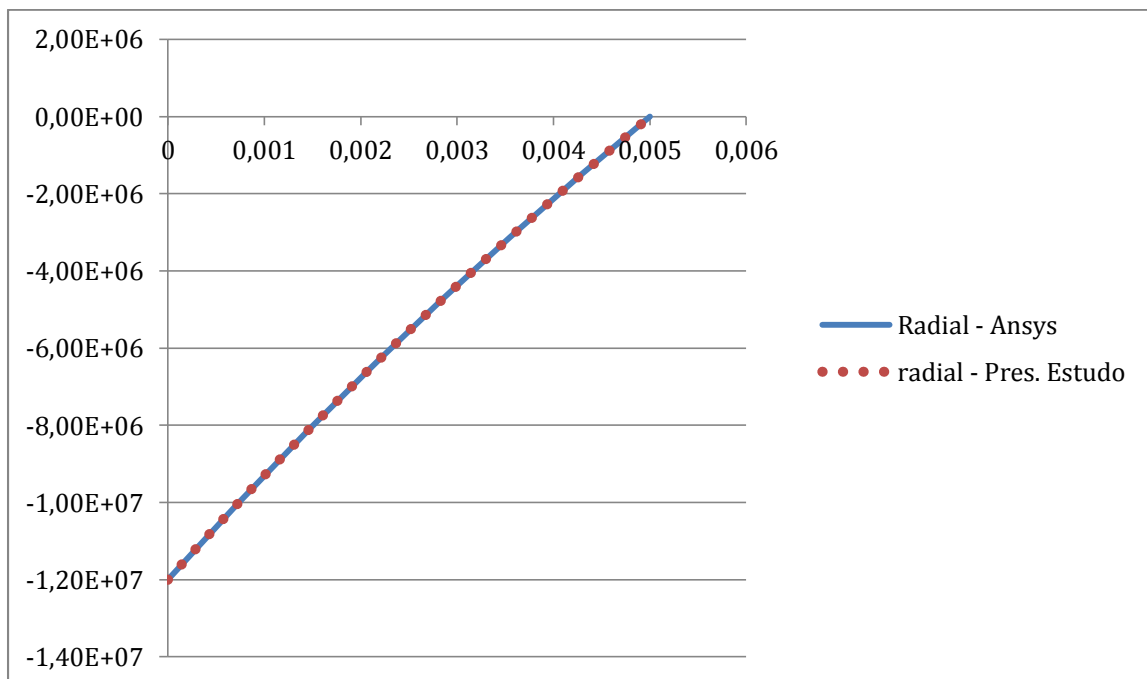


Figura 5: Tensão Radial ao longo da espessura ($\pi = 12 \text{ MPa}$)

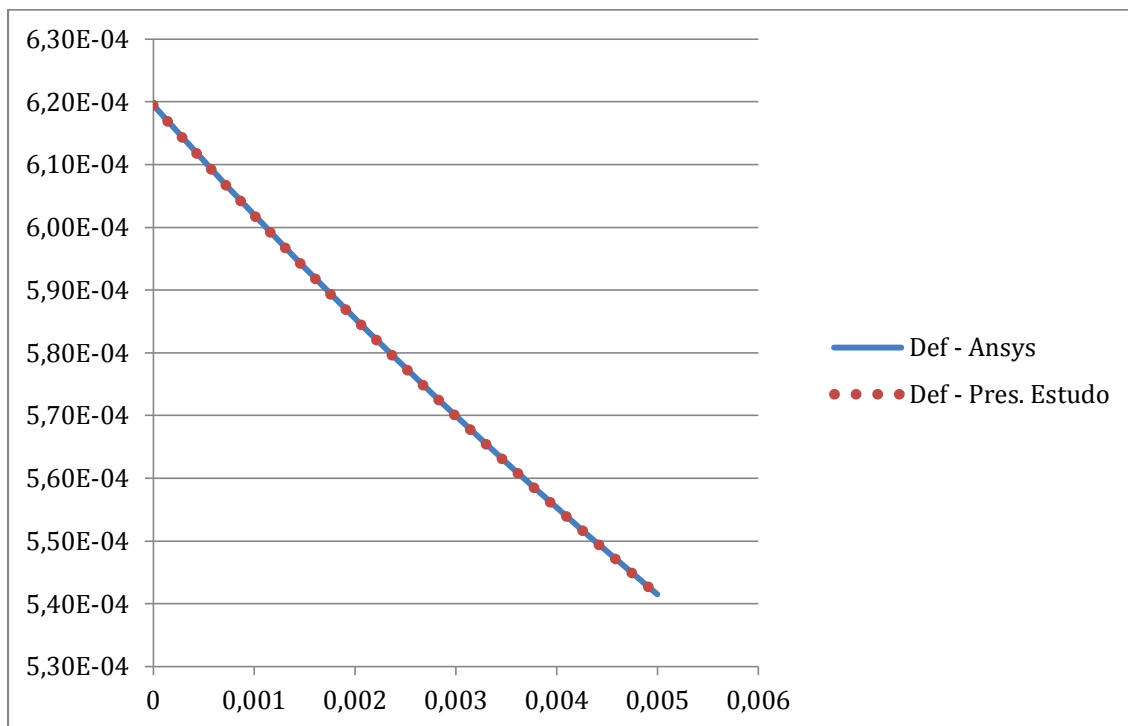


Figura 6: Deformação Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

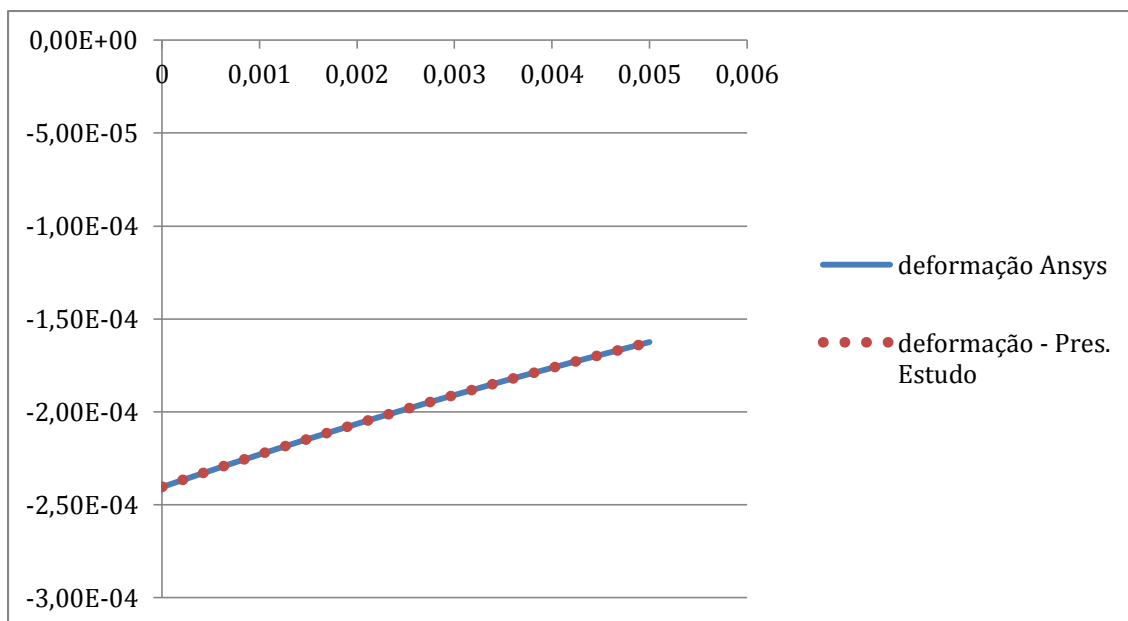


Figura 7: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

Destes resultados, observa-se que as soluções encontradas com o presente modelo estão de acordo com a solução numérica fornecida pelo software Ansys.

Dos resultados nas figs. 4 e 5 observa-se a diferença de uma ordem de grandeza das Tensões Circunferenciais em relação às Tensões Radiais, o que permite comprovar a aproximação usual nas soluções analíticas com as Tensões Radiais nulas em cilindros de paredes finas. Observa-se também na fig.5 a verificação das condições de contorno para as Tensões Radiais: nulas na parede exterior da casca e iguais ao valor negativo da pressão aplicada na pressão interna.

Desta forma, uma comparação dos resultados do presente estudo com a solução analítica do problema está mostrada nas tabelas 1 e 2, onde são comparadas as tensões radiais e circunferenciais e as deformações radiais e circunferenciais, avaliadas nas superfícies interna e externa da casca. Uma muito boa concordância destes resultados pode ser observada.

Cilindro livre, paredes finas, pressão interna	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (MPa)	120.30315	108.30285	-12.00038	-0.000018
Resultado Analítico (MPa)	120.3	108.3	-12	0
Erro (%)	0.00262	0.00263	0.00316	--

Tabela 1: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões

Cilindro livre, paredes finas, pressão interna	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (10^{-4})	6.19516	5.41514	-2.40456	1.62454
Resultado Analítico (10^{-4})	6.19500	5.41500	-2.40450	-1.62450
Erro (%)	0.00258	0.00258	0.00249	0.00246

Tabela 2: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações

Desta forma pode-se concluir que o modelo utilizado apresenta resultados compatíveis para a representação de comportamento de cascas finas axissimétricas livres submetidas à pressão interna. Na seção seguinte considera-se a validação para o carregamento de pressão externa.

5.2. Cilindros de Paredes Finas Livres sob Pressão Externa

O mesmo modelo considerado no teste anterior é agora considerado sob a pressão na superfície externa do cilindro. Nas figuras 8 a 11 consideram-se as soluções para as medidas das tensões e deformações (circunferencial e radial) ao longo da espessura da casca.

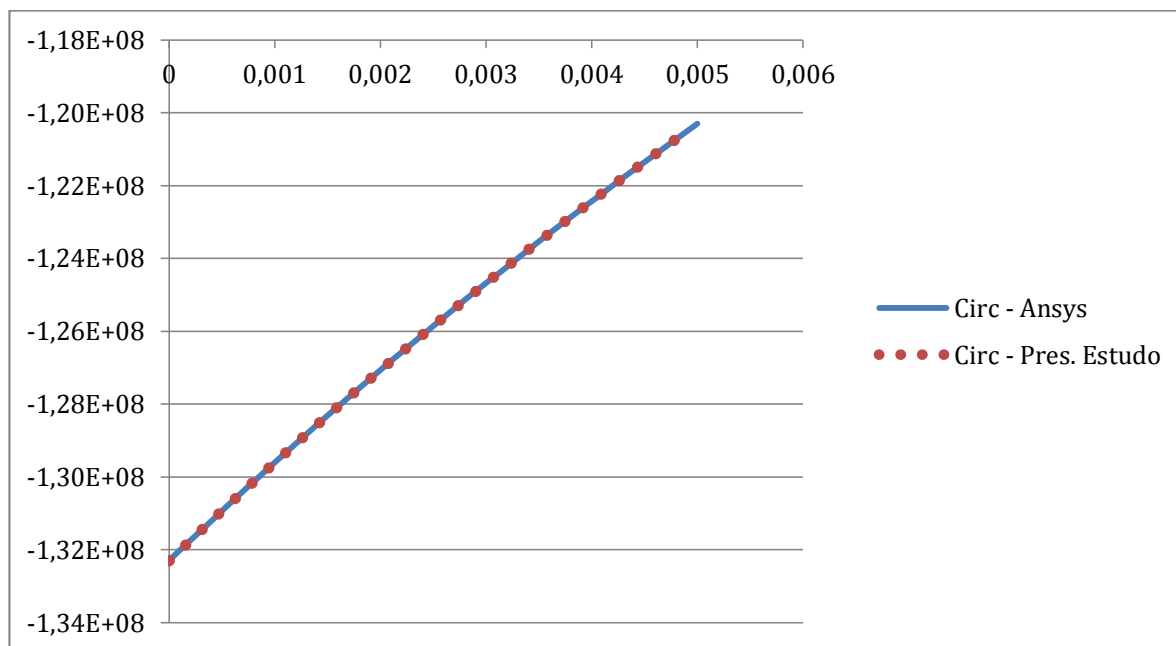


Figura 8: Tensão Circunferencial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

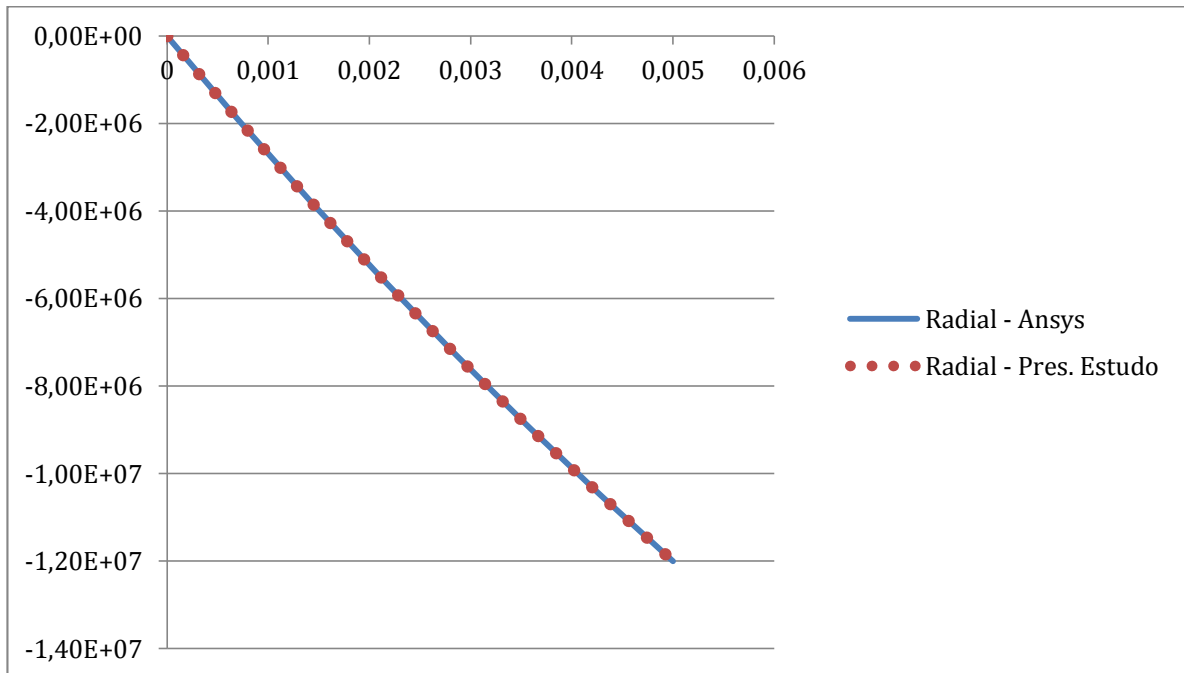


Figura 9: Tensão Radial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

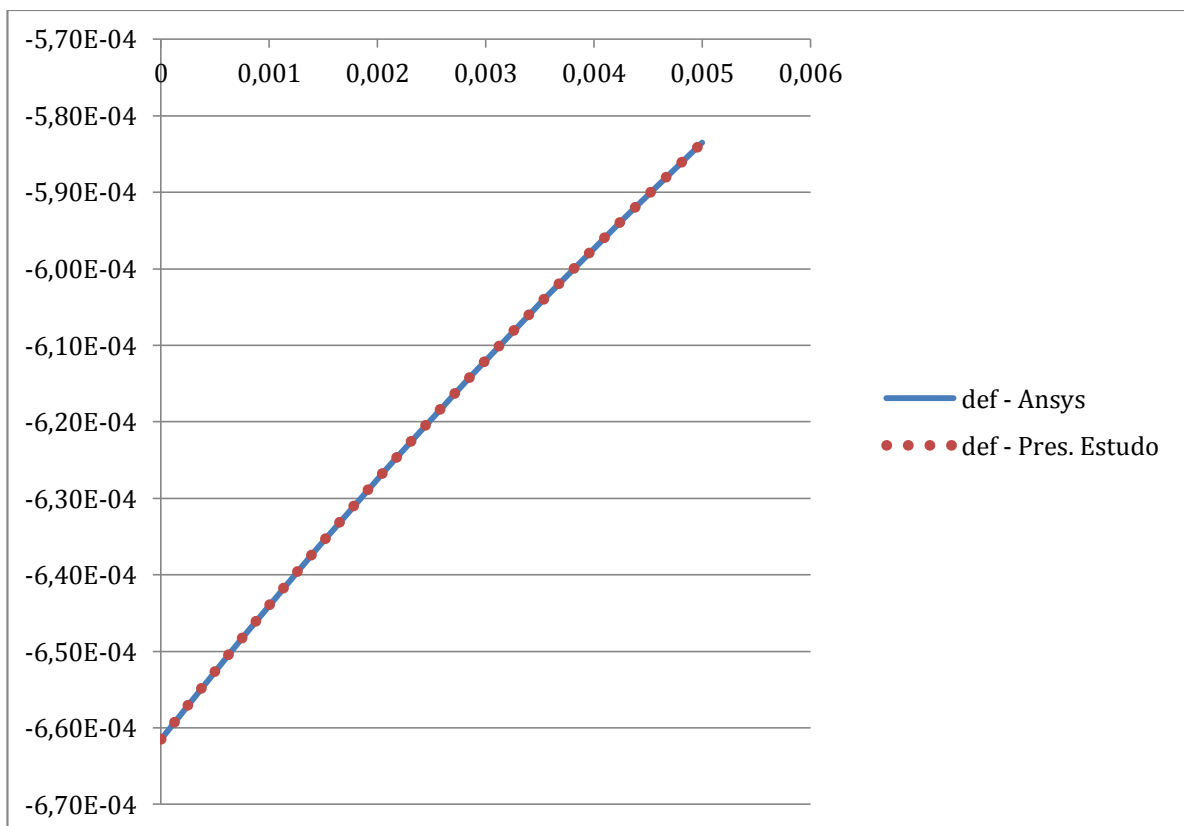


Figura 10: Deformação Circunferencial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

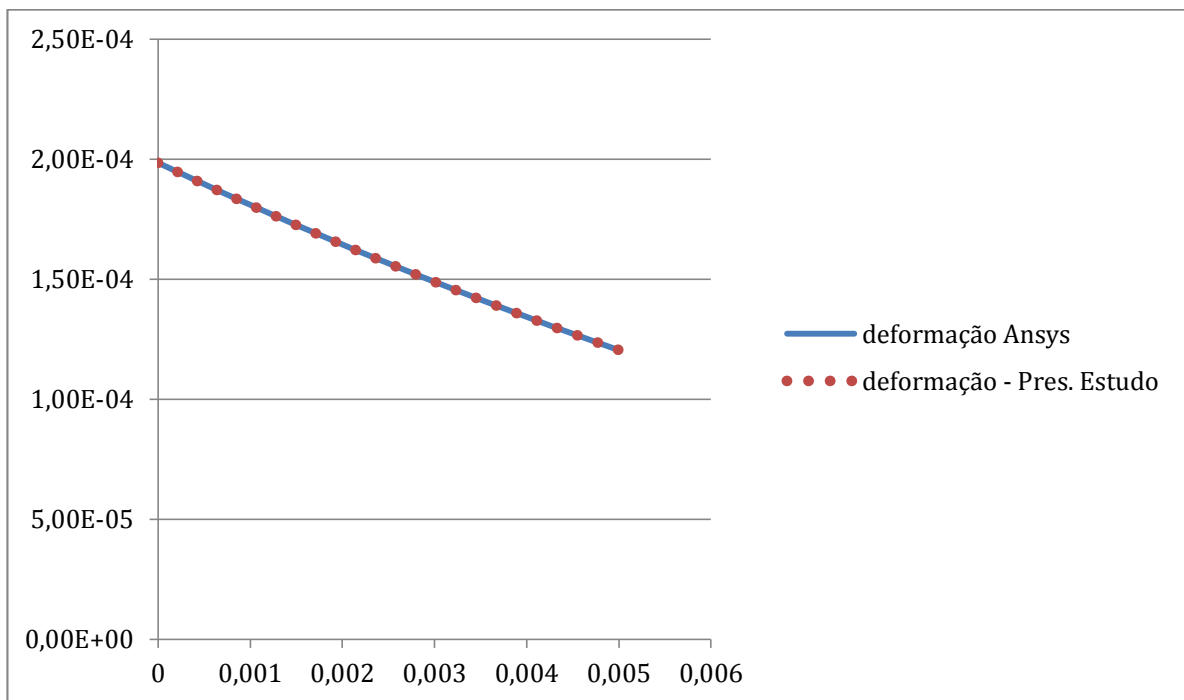


Figura 11: Deformação Radial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

Os resultados apresentados estão em muito boa concordância. Mais uma vez, a significativa diferença entre os valores da componente Circunferencial das tensões em relação às Tensões Radiais permite que se considerem nulas as Tensões Radiais para o caso de cilindro de paredes finas. Também, na fig. 9, observa-se que as condições de contorno quanto às Tensões Radiais foram respeitadas no modelo numérico: nulas na parede interna da casca e iguais ao valor negativo da pressão aplicada na parede externa.

Como na seção 5.1, aqui também foi feita uma avaliação entre as soluções numéricas e analítica do problema, conforme está mostrado nas Tabelas 3 e 4 a seguir.

Cilindro livre, paredes finas, pressão externa	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (MPa)	132.30350	120.30319	-0.000012	-12.00037
Resultado Analítico (MPa)	-132.3	-120.3	0	-12
Erro (%)	0.00264	0.00265	--	0.00308

Tabela 3: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões

Cilindro livre, paredes finas, pressão externa	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (10^{-4})	6.61517	5.83515	1.98455	1.20453
Resultado Analítico (10^{-4})	6.61500	5.83500	1.98450	1.20450
Erro (%)	0.00257	0.00257	0.00252	0.00249

Tabela 4: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações

Este conjunto de resultados e comparações confirmam a eficácia do modelo proposto na representação de cilindros livres de paredes finas.

5.3. Cilindros de Paredes Finas com Engaste Simples sob Pressão Interna

Nesta seção consideram-se cilindros de paredes finas sob a condição de fixação em uma das extremidades. Desta forma é necessário impor-se a condição de fixação do primeiro nó do modelo do cilindro, resultando em um cilindro com engaste simples. Os resultados numéricos obtidos para os testes (circunferencial e longitudinal) estão apresentados na figuras 12 e 13.

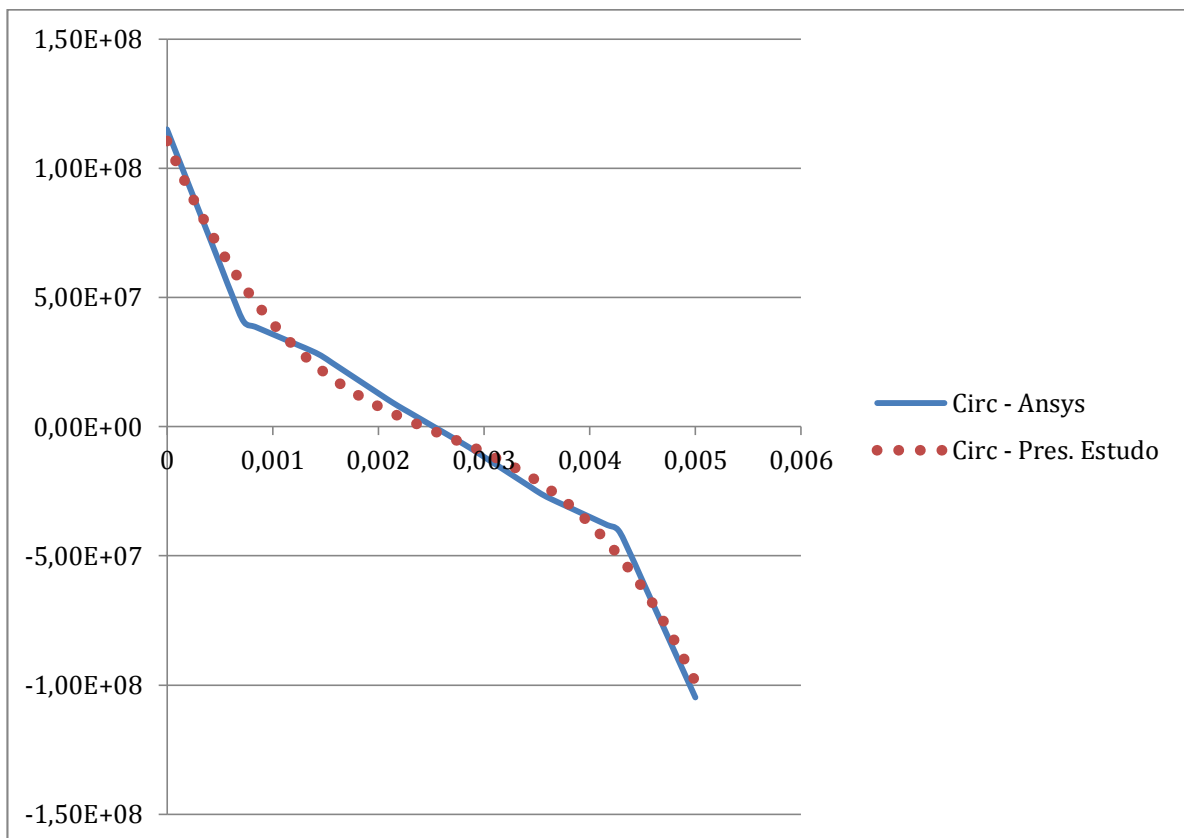


Figura 12: Tensão Circunferencial ao longo da espessura no nó do engaste ($\pi = 12$ MPa)

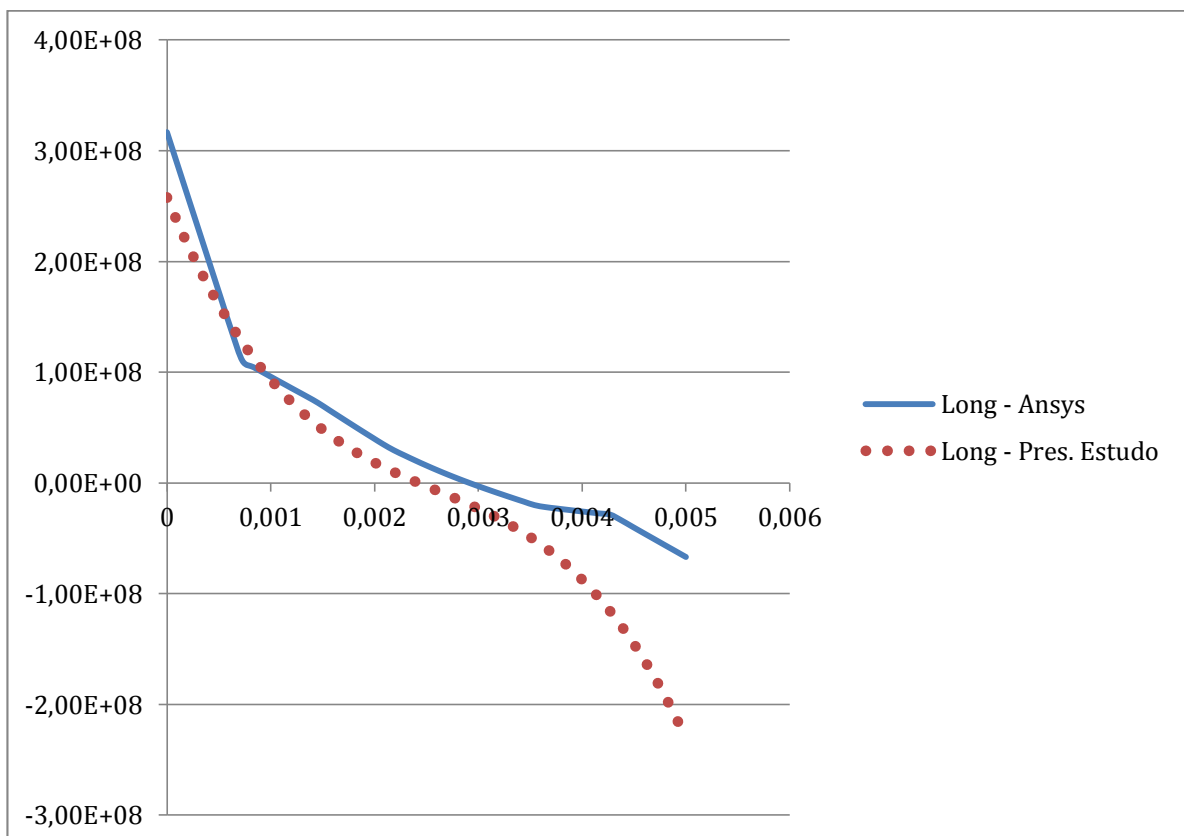


Figura 13: Tensão Longitudinal ao longo da espessura no nó do engaste ($\pi = 12$ MPa)

Devido às condições de engaste consideradas e ao contrário do caso de cilindros livres, as Tensões Longitudinais não são nulas. Analisando-se os resultados para a Tensão Circunferencial mostrados na fig. 12, estes apresentam uma boa concordância com a mesma tendência da distribuição. Porém, os resultados das Tensões Longitudinais apresentados na fig.13 revelam um afastamento maior, devido principalmente à aproximação dos deslocamentos utilizada no modelo numérico considerado.

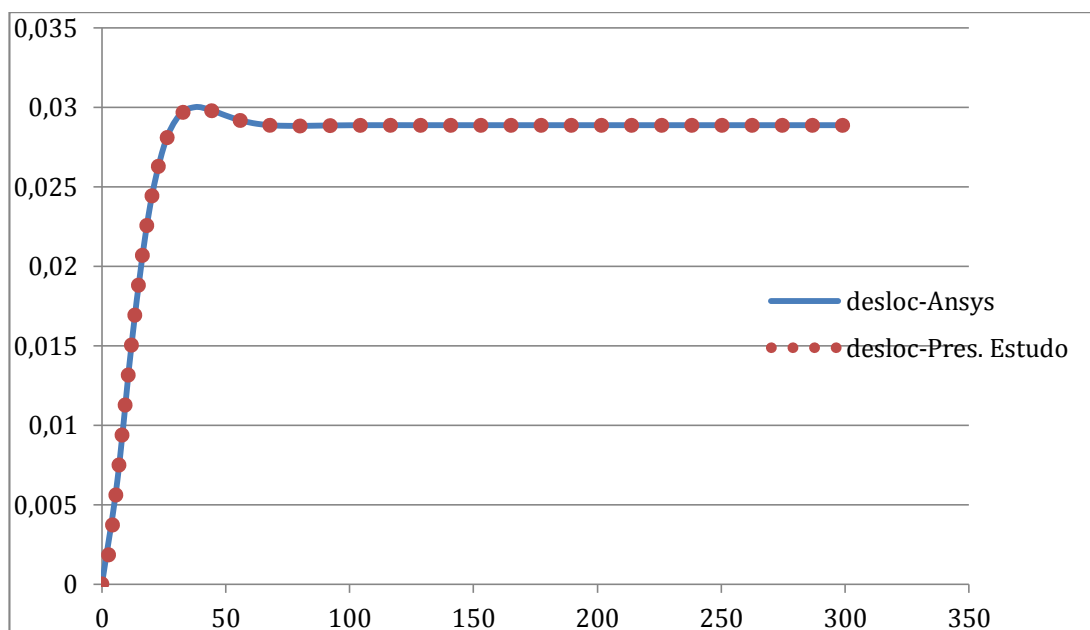


Figura 14: Deslocamento Radial ao longo da comprimento ($\pi = 12$ MPa)

A fig. 14 apresenta os resultados para o deslocamento radial W ao longo do comprimento do cilindro. Nota-se que a condição de fixação é respeitada pela solução numérica obtida, com o deslocamento nulo na base onde é imposta a condição de fixação.

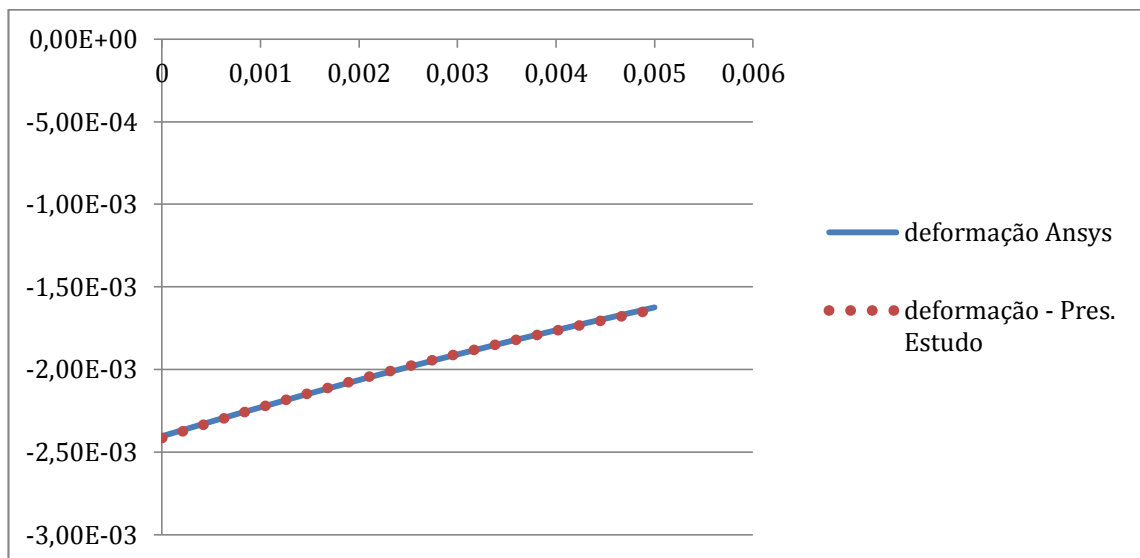


Figura 15: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

A fig. 15 apresenta a distribuição da deformação radial ao longo da espessura obtida junto ao nó central do cilindro, afastado do engaste. Este resultado valida o modelo proposto, pois coincide com o resultado encontrado para o caso de cilindro livre de paredes finas com pressão interna, mostrado na Fig.7.

5.4. Cilindros de Paredes Espessas Livres sob Pressão Interna

Com as soluções para cilindros de casca fina confirmadas por outra solução numérica e analítica, nesta seção passa-se a verificar as soluções para o caso de cilindros de paredes espessas. Os parâmetros representativos para o teste numérico considerado são os seguintes:

$$R = 50 \text{ mm} \quad h = 50 \text{ mm} \quad (5-5)$$

Nas figuras 16 a 19 estão apresentadas as distribuições ao longo da espessura da casca das tensões e das deformações (circunferencial e radial).

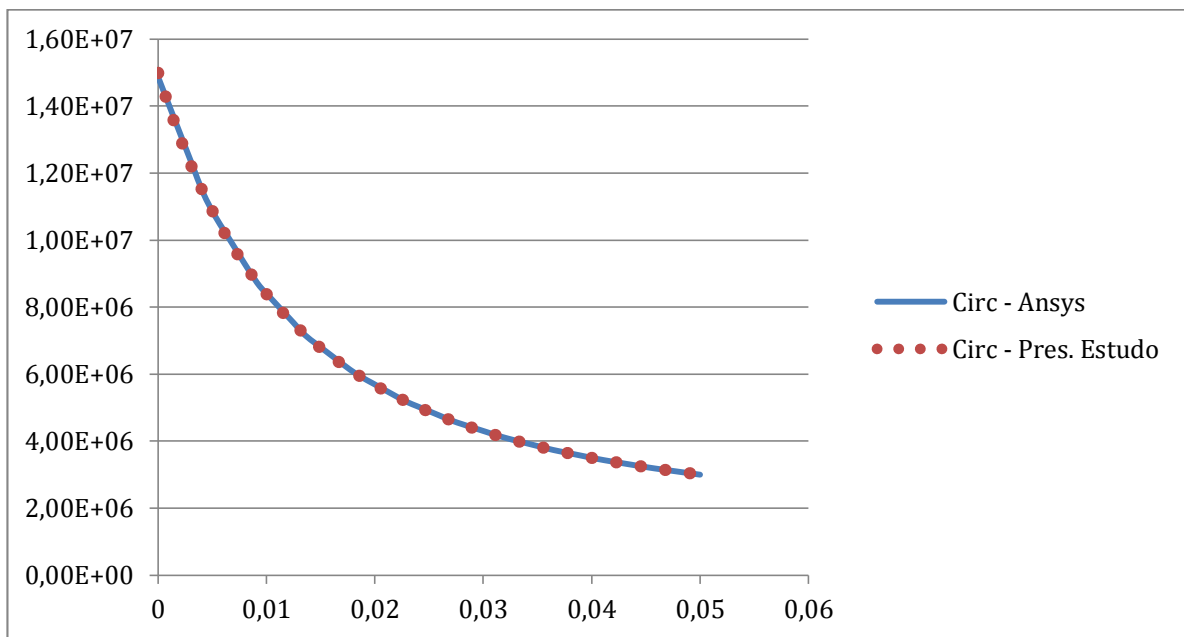


Figura 16: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

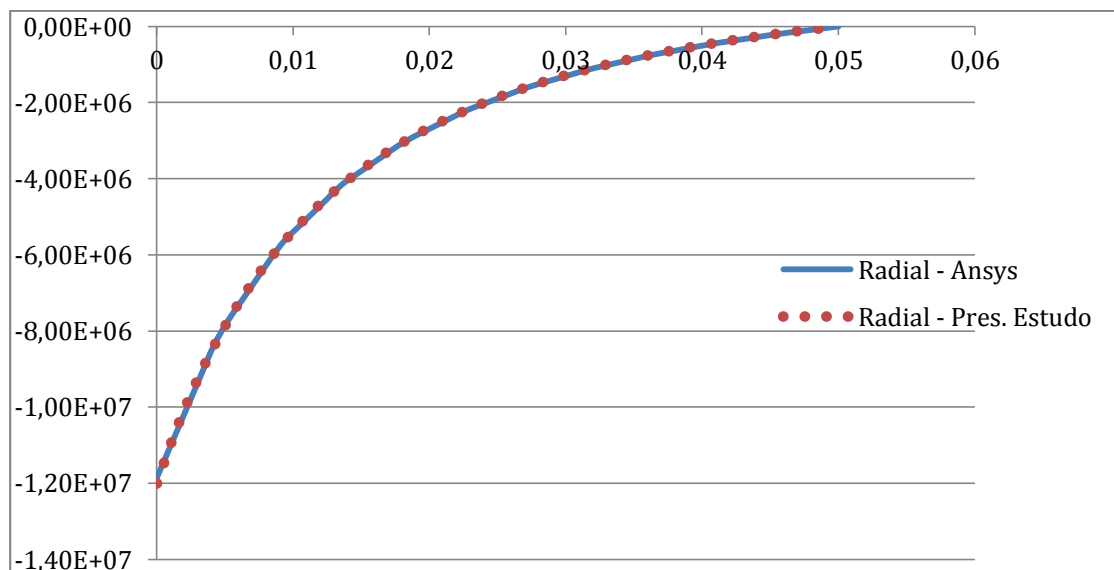


Figura 17: Tensão Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

Nas fig. 16 e 17 observa-se que, ao contrário da geometria para cilindros de paredes finas, as tensões radiais e circunferenciais possuem valores na mesma ordem de grandeza, não sendo possível a aproximação utilizada para a geometria de cascas finas. Por outro lado, observa-se da fig.17 que também aqui as condições de contorno referentes às Tensões Radiais são respeitadas:

nulas na parede exterior da casca e iguais ao valor negativo da pressão aplicada na parede interior.

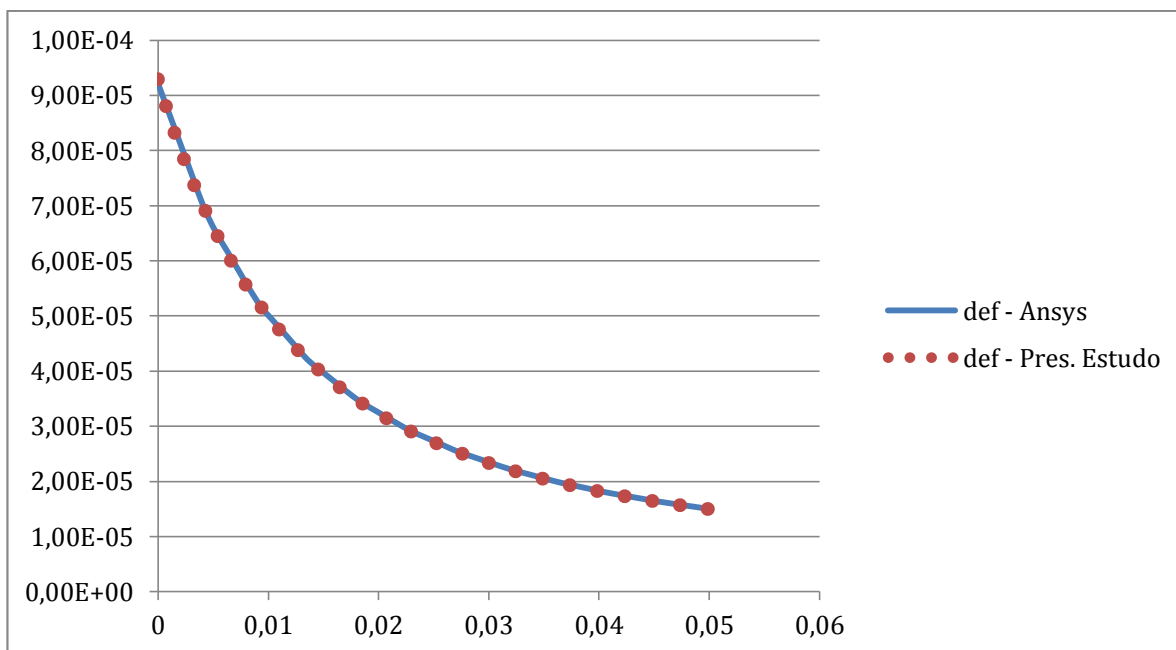


Figura 18: Deformação circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

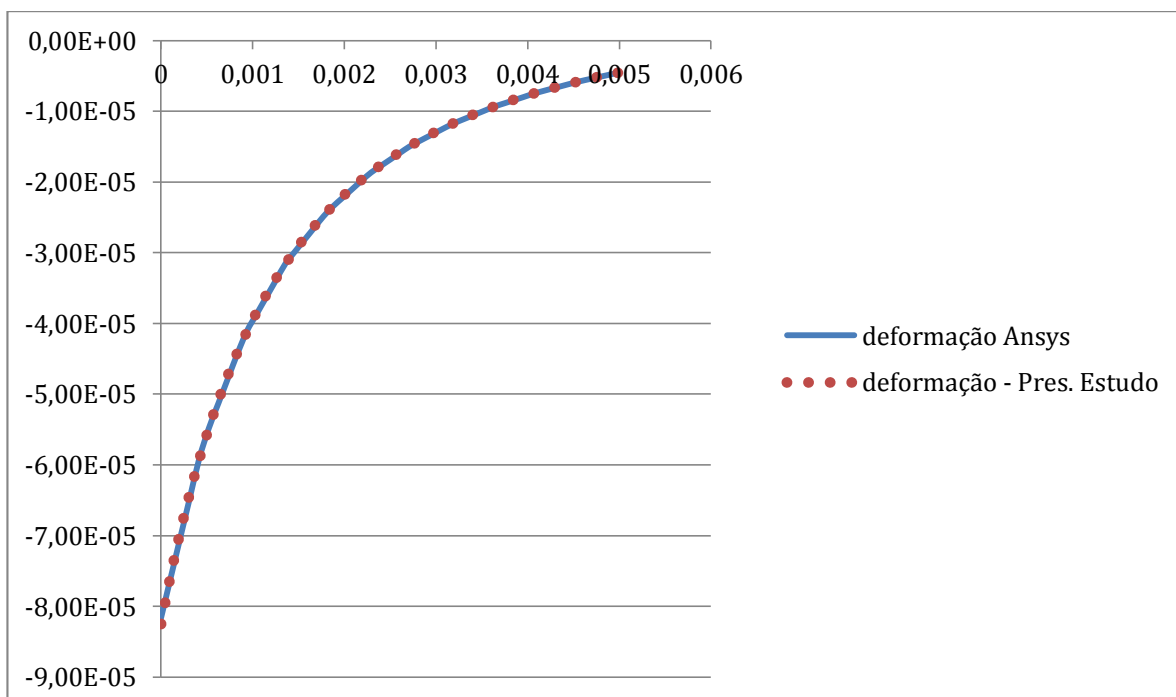


Figura 19: Deformação Radial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

Aqui também foram feitas comparações entre as soluções com o programa do presente estudo com as soluções analíticas, conforme está mostrado nas tabelas 5 e 6 a seguir.

Cilindro livre, paredes espessas, pressão interna	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (MPa)	14.99490	2.99904	-12.01349	-0.002535
Resultado Analítico (MPa)	15	3	-12	0
Erro (%)	0.034	0.032	0.1124	--

Tabela 5: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões

Cilindro livre, paredes espessas, pressão interna	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (10^{-5})	9.30034	1.50003	-8.25511	-0.45099
Resultado Analítico (10^{-5})	9.3	1.5	-8.25	-0.45
Erro (%)	0.00365	0.002	0.062	0.22

Tabela 6: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações

A boa concordância entre as soluções numéricas obtidas com o modelo proposto e as soluções analíticas e numéricas do programa Ansys permite concluir que o modelo utilizado também é adequado para a representação de cascas espessas axissimétricas livres submetidas a pressões internas.

5.5. Cilindros de Paredes Espessas Livres sob Pressão Externa

O mesmo modelo considerado no teste anterior é agora utilizado para a análise do cilindro sob a pressão atuante na superfície externa. Nas figuras 20 a 23 estão apresentadas as soluções para as medidas das tensões e deformações (circunferencial e radial) ao longo da espessura da casca.

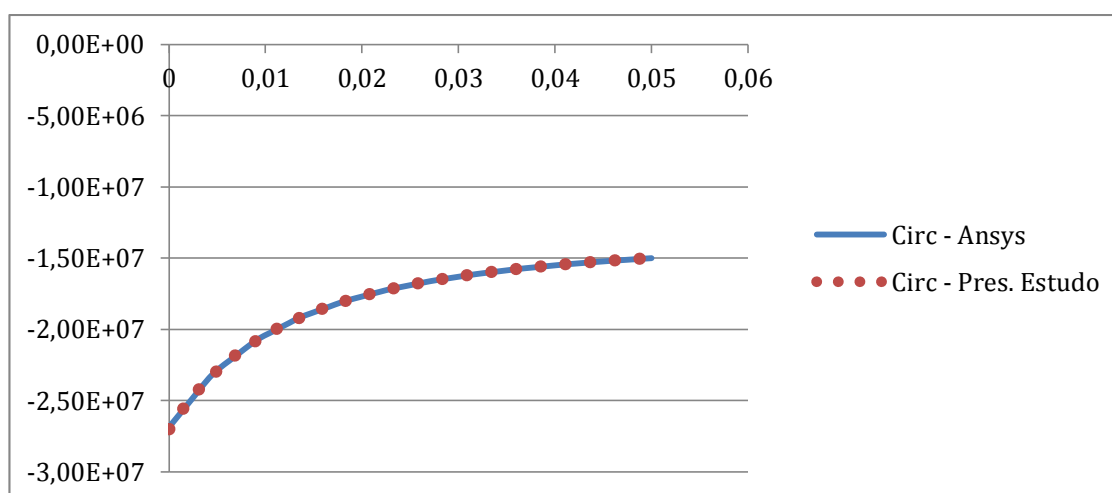


Figura 20: Tensão Circunferencial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

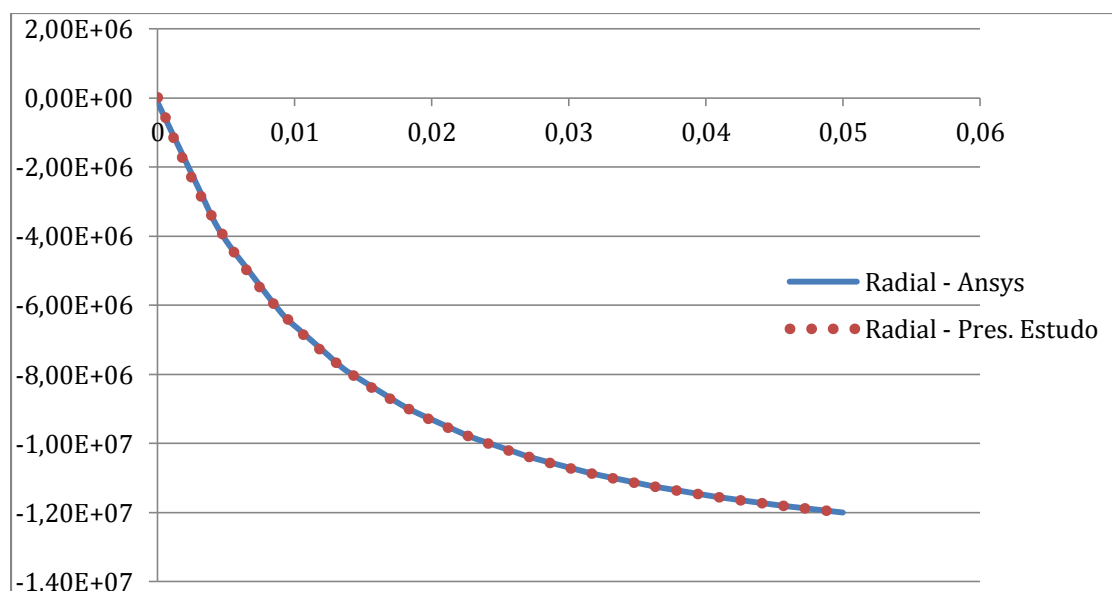


Figura 21: Tensão Radial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

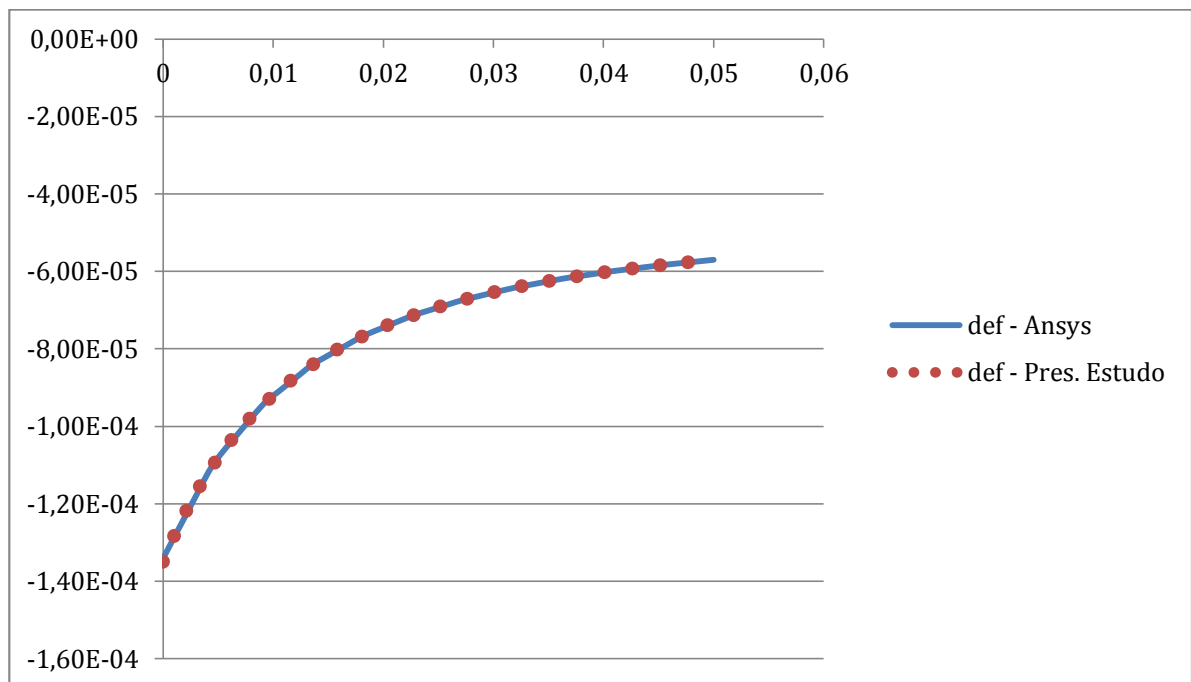


Figura 22: Deformação circunferencial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

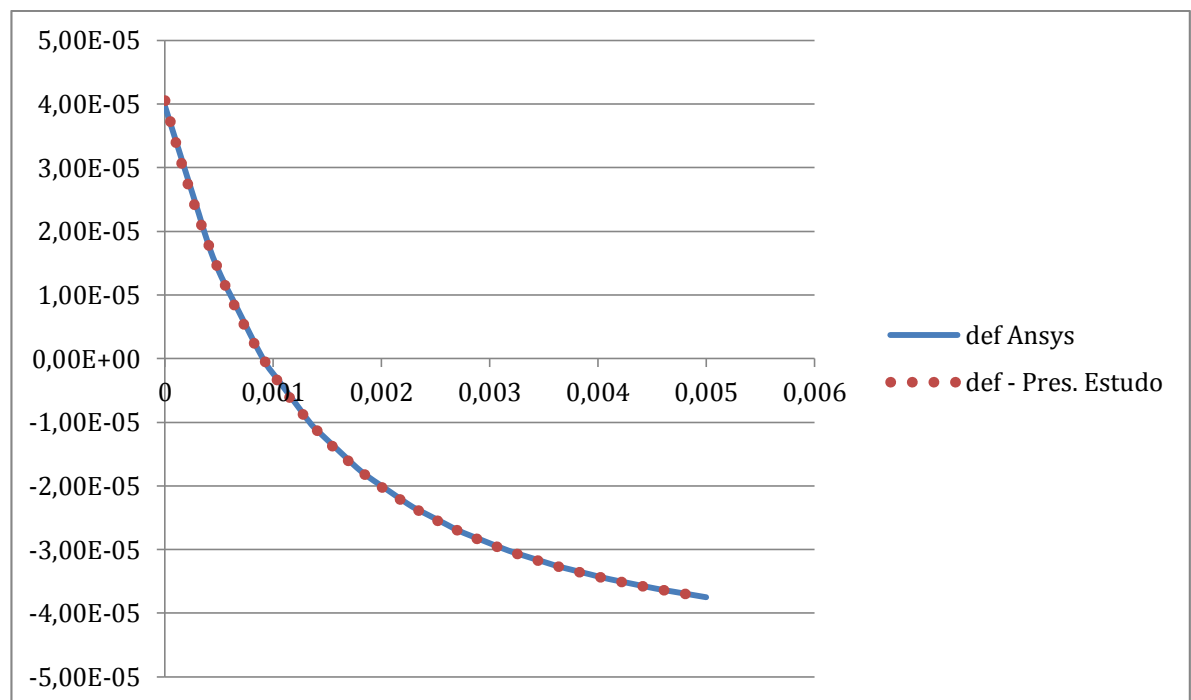


Figura 23: Deformação Radial ao longo da espessura (pe = 12 MPa)

Novamente pode-se observar que os resultados obtidos apresentam-se em muito boa concordância. Assim como na seção 5.4, nas fig. 20 e 21 também observa-se que as tensões

radiais e circunferenciais possuem valores na mesma ordem de grandeza, não sendo possível a aproximação utilizada para a geometria de cascas finas. Por outro lado, observa-se da fig.21 que também aqui as condições de contorno referentes às Tensões Radiais são respeitadas: nulas na parede interna da casca e iguais ao valor negativo da pressão aplicada na parede externa.

Como no caso anterior, também, foram feitas comparações entre as soluções com o programa do presente estudo com as soluções analíticas, conforme está mostrado nas tabelas 7 e 8 a seguir.

Cilindro livre, paredes espessas, pressão externa	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\sigma_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (MPa)	-26.99551	-14.99941	0.01250	-11.99792
Resultado Analítico (MPa)	-27	-15	0	-12
Erro (%)	0.01663	0.00393	--	0.01733

Tabela 7: Comparação da solução Analítica com a solução em C para tensões

Cilindro livre, paredes espessas, pressão externa	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\theta\theta}$ $\zeta = +1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = -1$	$\varepsilon_{\zeta\zeta}$ $\zeta = +1$
Resultado C (10^{-5})	-13.50045	-5.70014	4.05476	-3.74917
Resultado Analítico (10^{-5})	-13.5	-5.7	4.05	-3.75
Erro (%)	0.00333	0.00245	0.11753	0.02213

Tabela 8: Comparação da solução Analítica com a solução em C para deformações

Este conjunto de resultados e comparações confirma a eficácia do modelo proposto na representação de cilindros livres de paredes espessas.

5.6. Cilindros de Paredes Espessas com Engaste Simples sob Pressão Interna

Nesta seção consideram-se cilindros de paredes espessas sob a condição de fixação em uma das extremidades, i.e., condição de engaste simples. Os resultados numéricos obtidos para os testes numéricos (tensões circunferencial e longitudinal) estão apresentados na figuras 24 e 25.

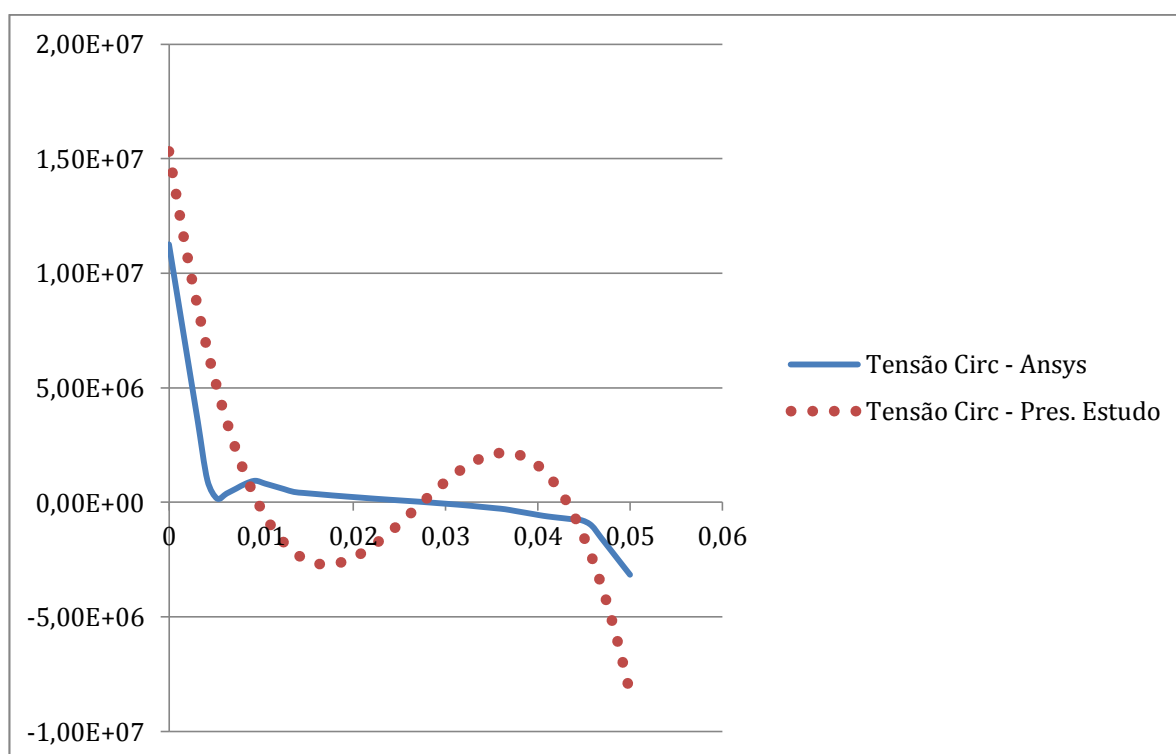


Figura 24: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12$ MPa)

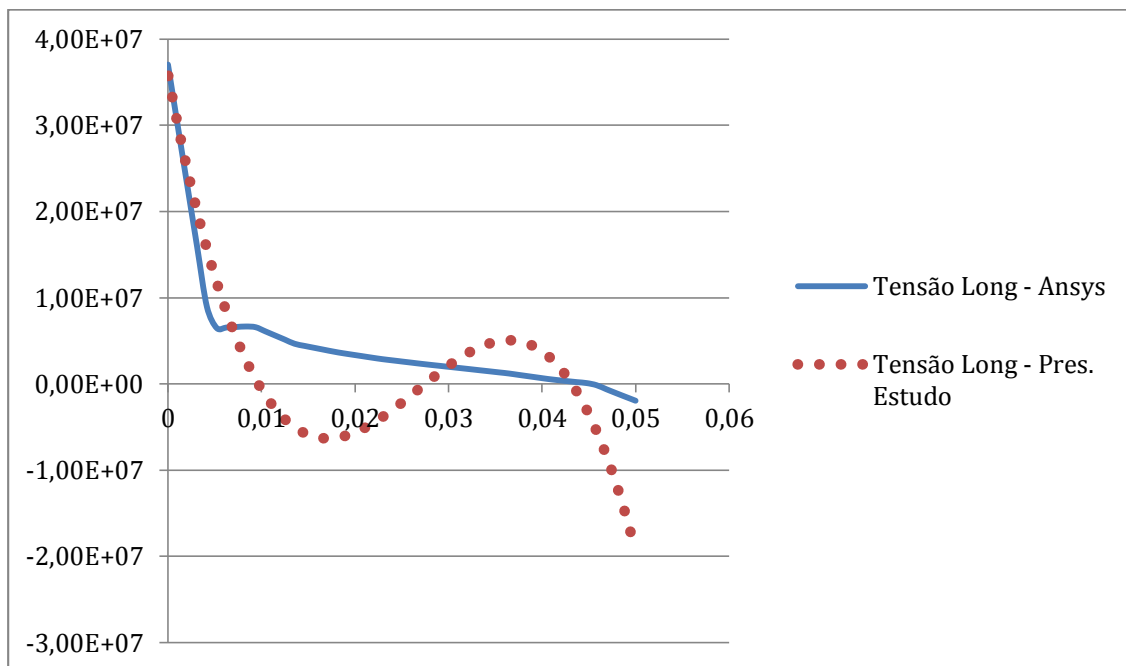


Figura 25: Tensão Longitudinal ao longo da espessura ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

Das fig. 24 e 25, nota-se que o erro aqui obtido foi maior do que nos casos de cilindro livre e de cilindro de paredes finas com engaste. Esse erro é resultado das considerações feitas na formulação do modelo numérico considerado, em que os campos de deslocamentos longitudinais são definidos a partir da imposição de condições de contorno, ao contrário do que ocorre com o software Ansys.

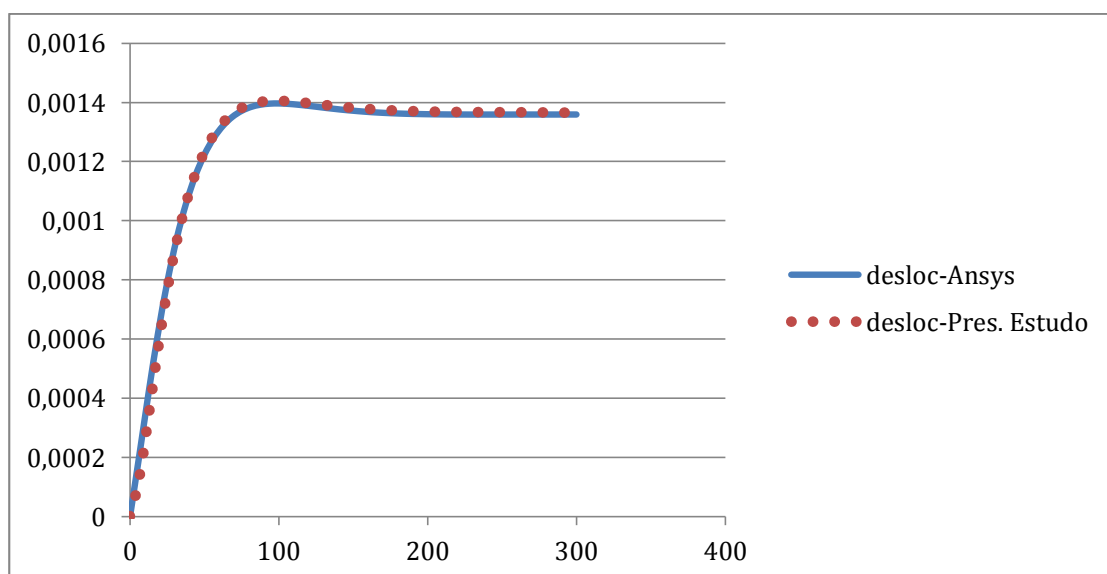


Figura 26: Deslocamento Radial ao longo da comprimento ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

A fig. 26 apresenta os resultados para o deslocamento radial W ao longo do comprimento do cilindro. Nota-se que a condição de fixação é respeitada pela solução numérica obtida, com o deslocamento nulo na base onde é imposta a condição de fixação.

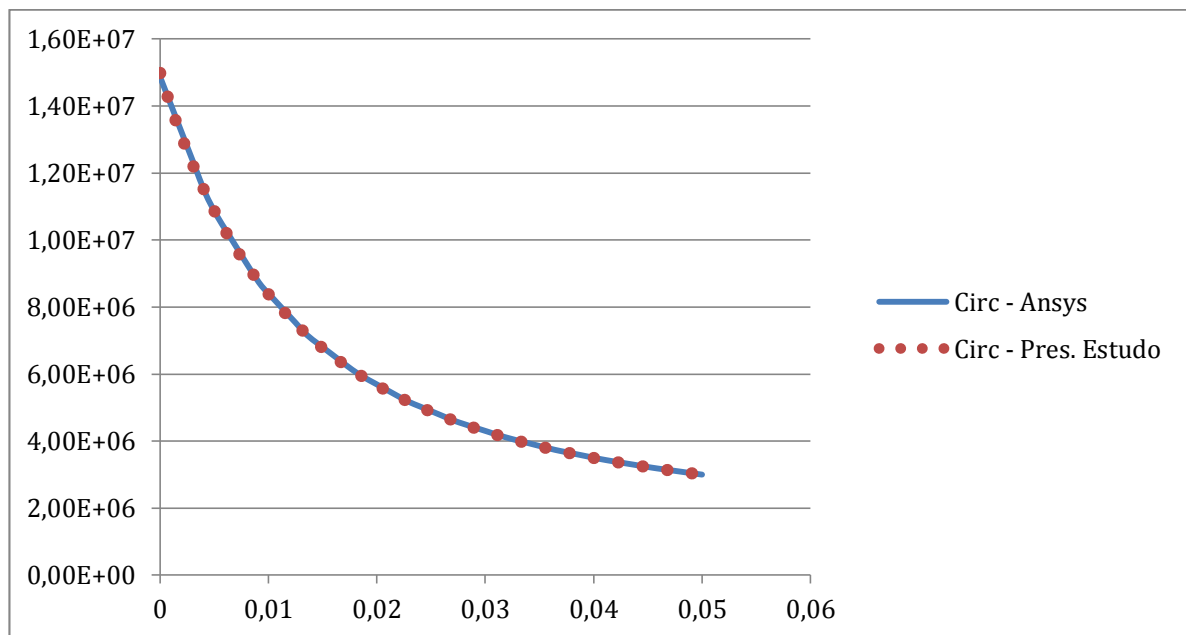


Figura 27: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

A fig. 27 apresenta a distribuição da Tensão Circunferencial ao longo da espessura obtida junto ao último nó do cilindro, afastado do engaste. Este resultado valida o modelo proposto, pois coincide com o resultado encontrado para o caso de cilindro livre de paredes espessas com pressão interna, mostrado na Fig.16.

5.7. Cilindros de Paredes Espessas com Engaste Duplo sob Pressão Interna

Nesta seção consideram-se cilindros de paredes espessas sob pressão interna e a condição de fixação nas duas extremidades. Desta forma é necessário impor-se a condição de fixação do primeiro nó e no último nó do modelo do cilindro, resultando assim em um cilindro com engaste duplo.

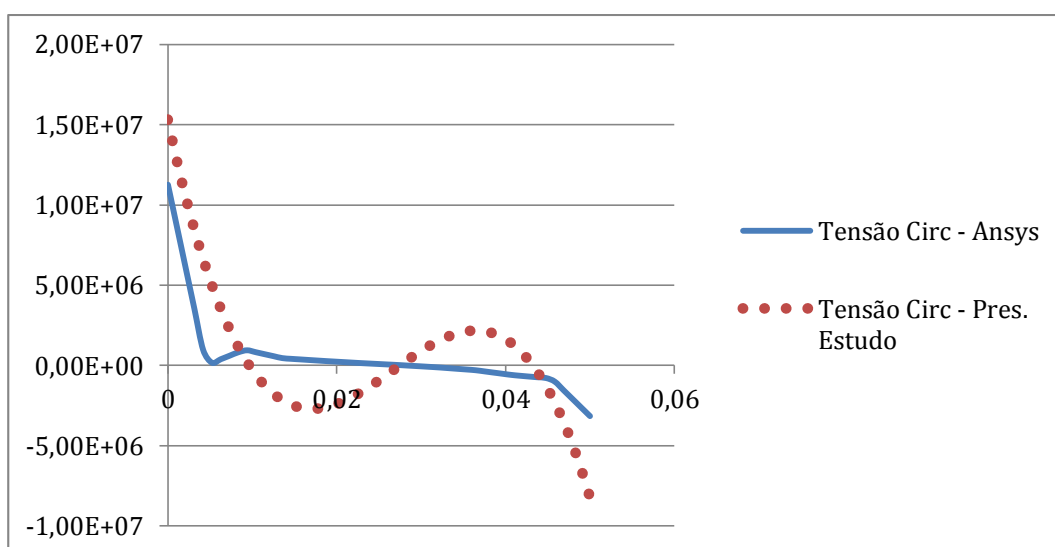


Figura 28: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

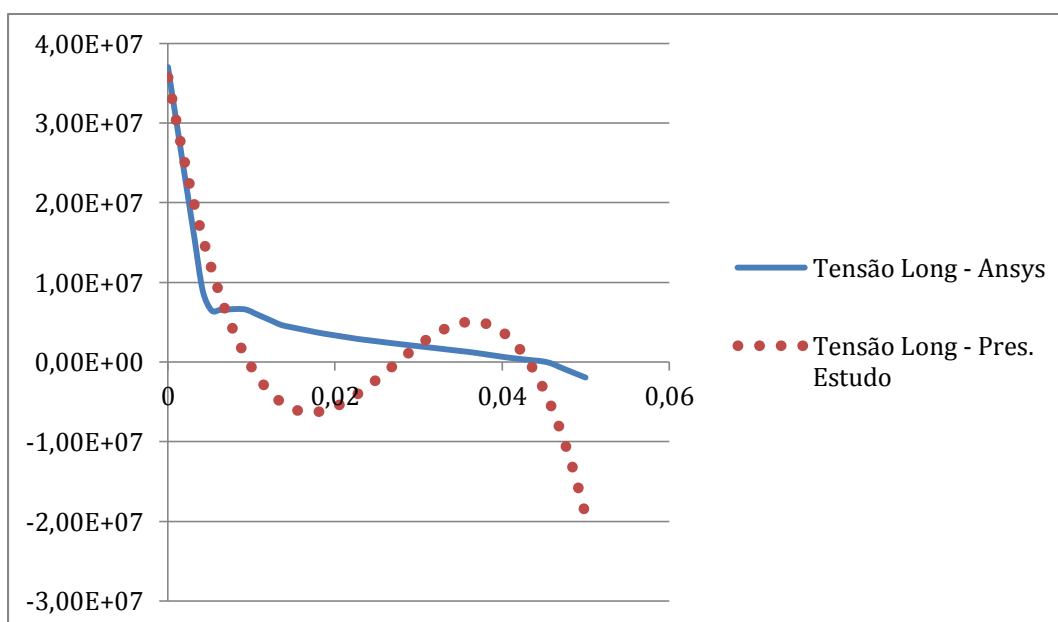


Figura 29: Tensão Longitudinal ao longo da espessura ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

Os resultados numéricos obtidos para os testes numéricos (tensões circunferencial e longitudinal) estão apresentados na figuras 28 e 29. Discrepância similar à obtida na seção 5.6 (cilindro de paredes espessas com engaste simples) é aqui também observada.

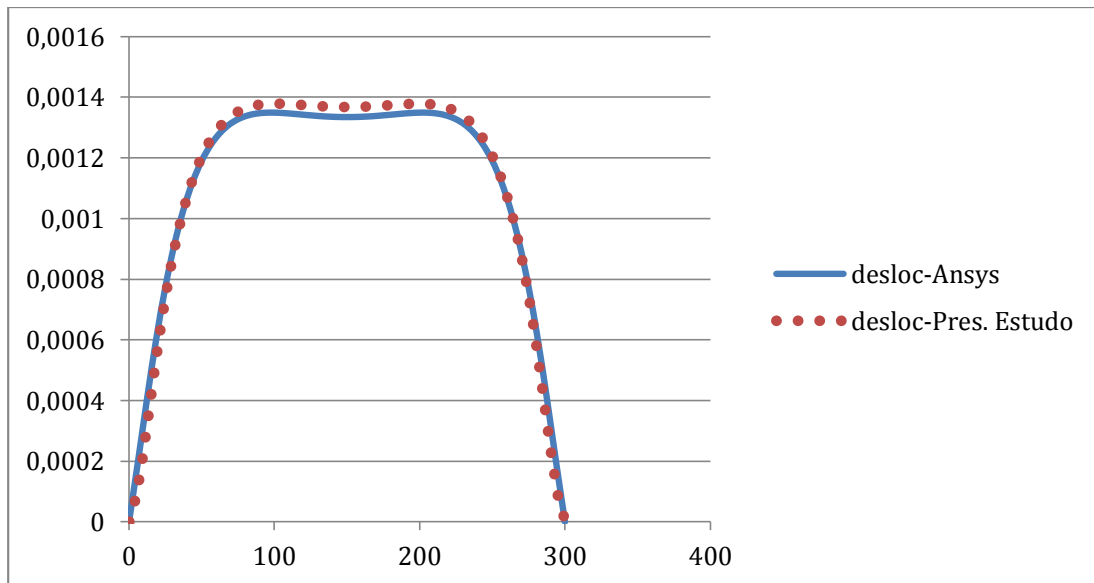


Figura 30: Deslocamento Radial ao longo da comprimento ($p_i = 12$ MPa)

A fig. 30 apresenta os resultados para o deslocamento radial W ao longo do comprimento do cilindro. Nota-se que as condições de fixação com o deslocamento nulo nas duas extremidades são respeitadas pela solução numérica obtida e, na região central, o deslocamento radial apresenta-se com uma distribuição aproximadamente constante.

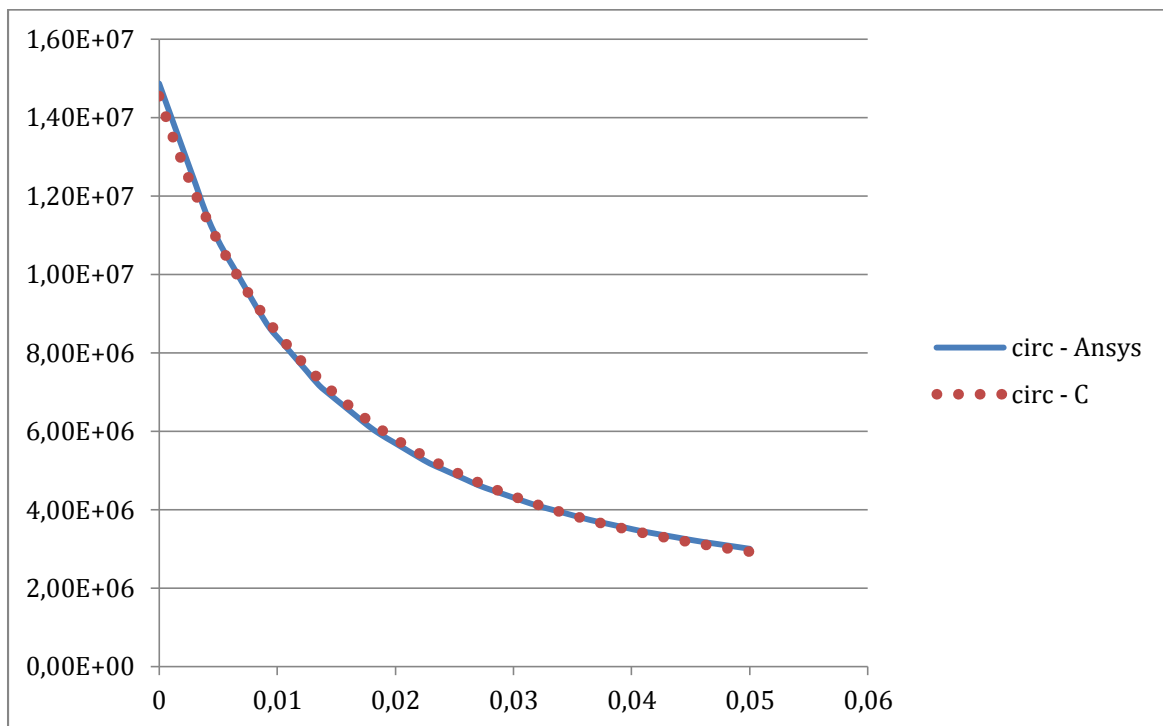


Figura 31: Tensão Circunferencial ao longo da espessura ($p_i = 12 \text{ MPa}$)

A fig. 31 apresenta a distribuição da Tensão Circunferencial ao longo da espessura obtida junto ao nó central do cilindro, afastado dos engastes. Este resultado valida o modelo proposto, porque reproduz o resultado encontrado para o caso de cilindro livre de paredes espessas com pressão interna, mostrado na Fig.16.

6. Conclusão

Neste trabalho desenvolveu-se e implementou-se a formulação de um modelo unidimensional de Elementos Finitos aplicável à análise de cascas cilíndricas finas e espessas sob pressões internas e externas. No desenvolvimento teórico utilizou-se, na interpolação do elementos, as funções de forma associadas às soluções analíticas para cilindros e esferas. O modelo numérico resultante possui seis graus de liberdade generalizados por ponto nodal, para representar adequadamente os deslocamentos radial e longitudinal da casca, em uma malha de elementos lagrangianos de quatro pontos nodais.

O modelo numérico desenvolvido foi testado e comparado com soluções analíticas e com outros resultados numéricos fornecidos por um software comercial, obtendo-se muito boas concordâncias, tanto para as condições de cilindros de paredes finas ou espessas assim como nas condições de contorno livres ou engastadas, comprovando-se a aplicabilidade das hipóteses consideradas no modelo numérico.

Considerando-se o sucesso da formulação proposta e dos resultados obtidos no presente trabalho, propõe-se para futuros trabalhos uma formulação de Elementos Finitos unificada que atenda não só os casos de cilindros e esferas, mas de estruturas em geral com simetria axial.

Apêndice I - Solução Analítica dos Deslocamentos para uma Casca Cilíndrica Espessa

Como visto na seção 2, o deslocamento na direção radial W é obtido combinando-se as soluções analíticas para cascas cilíndricas e esféricas submetidas à pressão interna e externa. Nesse apêndice será descrita a solução para o cilindro espesso. Primeiramente, faz-se o equilíbrio de tensões em um elemento diferencial de volume do cilindro, Fig 2,[1]:

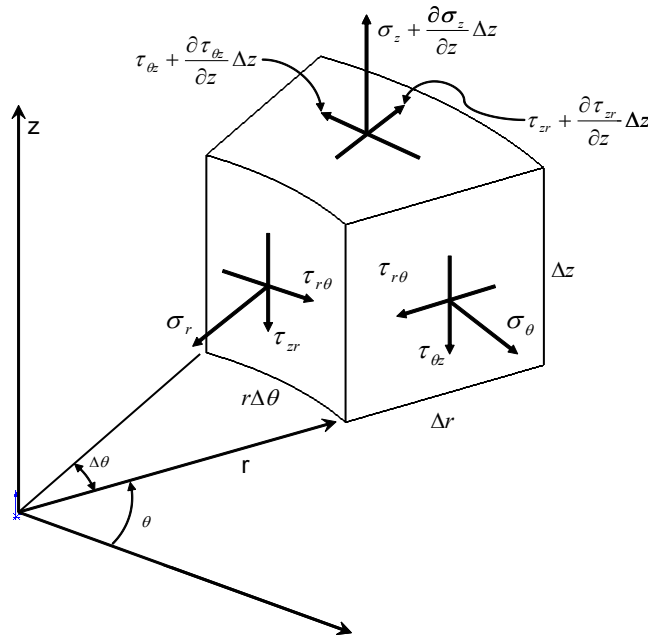


Figura 30: Tensões no Elemento de Casca Cilíndrica

Extraí-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - 2\sigma_\theta dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (\text{I-1})$$

Devido à simetria axial, nesse modelo define-se θ como sendo igual à 1 radiano. Por essa razão, permite-se utilizar a seguinte simplificação, para ângulos pequenos:

$$\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong \frac{d\theta}{2} \quad (\text{I-2})$$

Aplicando (I-2) em (I-1), obtemos:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{I-3})$$

As equações de compatibilidade geométrica e constitutivas são vistas na seção 2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{dW}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{W}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{dU}{dz} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \end{aligned} \quad (\text{I-4})$$

Para cilindro longo, pode-se assumir $\sigma_z = 0$, o que resulta em duas equações referentes ao deslocamento radial:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{dW}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{W}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r)] \end{aligned} \quad (\text{I-5})$$

onde W é o campo de deslocamentos radiais, r a coordenada cilíndrica radial, E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson. À partir dessas deformações, pode-se deduzir as tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial W}{\partial r} + \nu \frac{W}{r} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\nu \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right] \end{aligned} \quad (\text{I-6})$$

Agora, com as equações das tensões em função dos deslocamentos, substitui-se as mesmas na equação do equilíbrio (I-3):

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r^2} = 0 \quad (\text{I-7})$$

Finalmente, tem-se que essa equação tem solução na forma:

$$W(r) = A r + \frac{B}{r} \quad (\text{I-8})$$

Apêndice II - Condições de Contorno Naturais

Como dito na seção 2, as funções que descrevem os campos de deslocamento foram escolhidas de modo a representar a condição de cisalhamento nulo nas faces interior e exterior da casca cilíndrica. Porém, para que a condição de contorno seja imposta é preciso estabelecer a relação entre as variáveis das equações de deslocamento.

$$U_1(\xi, \zeta) = U_1^0(\xi) + Y_1(\xi)T + \Phi_1(\xi)T^2 + \Psi_1(\xi)T^3 \quad (\text{III-1})$$

$$W(\xi, \zeta) = W_0(\xi) + \frac{W_1(\xi)}{R(\xi, \zeta)} + W_2(\xi)R(\xi, \zeta) + \frac{W_3(\xi)}{[R(\xi, \zeta)]^2} \quad (\text{III-2})$$

Explicitando a condição de contorno, temos:

$$\gamma_{\xi\zeta}(\zeta=\pm 1) = 0 \quad (\text{III-3})$$

Ou, utilizando a equação da tensão de cisalhamento obtida na introdução teórica:

$$\gamma_{\xi\zeta} = \left[\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right]_{\zeta=\pm 1} + \left[\frac{\partial U_1}{\partial T} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{III-4})$$

Substituindo as equações (III-1) e (III-2) na equação (III-4), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\left[\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right]_{\zeta=+1} + Y_1 + \Phi_1 h + (3\Psi_1) \frac{h^2}{4} = 0 \quad (\text{III-5})$$

$$\left[\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right]_{\zeta=-1} + Y_1 - \Phi_1 h + (3\Psi_1) \frac{h^2}{4} = 0 \quad (\text{III-6})$$

Com oito variáveis e duas equações, explicita-se duas dessas variáveis para resolver o sistema.

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=+1} - \frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=-1} \right) \frac{1}{2h} \quad (\text{III-7})$$

$$\Psi_1 = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=+1} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=-1} \right) \frac{2}{3h^2 s'} + 2\gamma_1 \quad (\text{III-8})$$

Com isso, além de impor a condição de contorno natural desejada, o modelo foi simplificado, reduzindo de oito para seis variáveis.

Apêndice III – Formulação da Matriz B

Neste apêndice serão explicitados os termos da Matriz B de deformação-deslocamento, utilizada no cálculo da Matriz de Rigidez, bem como as equações utilizadas para calculá-los. Inicia-se pelas relações explicitadas na Seção 2:

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{s'} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} \right) \quad (\text{IV-1})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{W}{(R+T)} \quad (\text{IV-2})$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial W}{\partial T} \quad (\text{IV-3})$$

$$\gamma_{\xi\zeta} = \frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial T} \quad (\text{IV-4})$$

Essas equações descrevem as deformações em função dos deslocamentos e de suas respectivas derivadas. Em seguida, expande-se essas equações, substituindo os termos referentes aos deslocamentos pelas combinações de suas componentes:

$$U_1(\xi, \zeta) = U_1^0(\xi) + \gamma_1(\xi)T + \Phi_1(\xi)T^2 + \Psi_1(\xi)T^3 \quad (\text{IV-5})$$

$$W(\xi, \zeta) = W_0(\xi) + \frac{W_1(\xi)}{R(\xi, \zeta)} + W_2(\xi)R(\xi, \zeta) + \frac{W_3(\xi)}{[R(\xi, \zeta)]^2} \quad (\text{IV-6})$$

Com cada componente dos campos de deslocamento escritos como um polinômio de interpolação:

$$\begin{aligned}
U_0(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) U_0^i \\
Y_1(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) Y_1^i \\
W_0(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_0^i \\
W_1(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_1^i \\
W_2(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_2^i \\
W_3(\xi) &= \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_3^i
\end{aligned} \tag{IV-7}$$

Resultando em:

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{s'} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) U_0^i \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) Y_1^i \right] T + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Phi_1^i \right] T^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Psi_1^i \right] T^3 \right) \tag{IV-8}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_0 + \frac{\sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_1}{R+T} + \sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_2 (R+T) + \frac{\sum_{i=1}^k h_i(\xi) W_3}{[R+T]^2}}{(R+T)} \tag{IV-9}$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = \left[-\frac{1}{(R+T)^2} (\sum h_i W_1) + (\sum h_i W_2) - \frac{2}{(R+T)^3} (\sum h_i W_3) \right] \tag{IV-10}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\xi\zeta} &= \frac{1}{s'(R+T)} \sum_{i=1}^k \frac{\partial h_i(\xi)}{\partial \xi} \left(W_0 + \frac{W_1}{R+T} + W_2 (R+T) + \frac{W_3}{[R+T]^2} \right) + \left(\left[\sum_{i=1}^k h_i(\xi) Y_1^i \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[2 \sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Phi_1^i \right] T + \left[3 \sum_{i=1}^k h_i(\xi) \Psi_1^i \right] T^2 \right) \tag{IV-11}
\end{aligned}$$

Com a imposição da condição de cisalhamento nulo das superfícies interna e externa do cilindro, o número de graus-de-liberdade é reduzido de oito para seis, sendo dois deles função dos outros:

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=+1} - \frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=-1} \right) \frac{1}{2h} \quad (\text{IV-12})$$

$$\Psi_1 = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=+1} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=-1} \right) \frac{2}{3h^2 s'} + 2\gamma_1 \quad (\text{IV-13})$$

Com as equações anteriores forma-se a matriz B da seguinte maneira:

$$B_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & a_{14}^i & a_{15}^i & a_{16}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & a_{23}^i & a_{24}^i & a_{25}^i & a_{26}^i \\ a_{31}^i & a_{32}^i & a_{33}^i & a_{34}^i & a_{35}^i & a_{36}^i \\ a_{41}^i & a_{42}^i & a_{43}^i & a_{44}^i & a_{45}^i & a_{46}^i \end{bmatrix} \quad (\text{IV-14})$$

Cujos termos são:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{s'} \left[\frac{\partial h_i}{\partial \xi} \right] \\ a_{12} &= \frac{1}{s'} \left[T \frac{\partial h_i}{\partial \xi} + T^3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{4}{3h^2} h_i \right] \right] = \frac{h\zeta}{6s'} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} [3 - \zeta^2] \\ a_{13} &= \frac{1}{s'} \left[T^3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{2}{3h^2 s'} \left[2 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \right] \right) \right] = - \left(\frac{h}{2} \zeta \right)^3 \frac{4}{3h^2 s'^2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial \xi^2} = -\zeta^3 \frac{h}{6s'^2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial \xi^2} \\ a_{14} &= -\frac{h\zeta^2}{4s'^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right) + \frac{\zeta}{3} \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} \right) \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \xi^2} \\ a_{15} &= -\frac{h\zeta^2}{4s'^2} \left[\frac{(R_o - R_i)}{2} + \frac{(R_o + R_i)}{3} \zeta \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \xi^2} = -\frac{h\zeta^2}{4s'^2} \left[\frac{h}{2} + \frac{2R_2}{3} \zeta \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \xi^2} \\ a_{16} &= -\frac{h\zeta^2}{4s'^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) + \frac{1}{3} \zeta \left(\frac{1}{R_o^2} + \frac{1}{R_i^2} \right) \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

$$a_{21} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{23} = \frac{h_i}{R}$$

$$a_{24} = \frac{h_i}{R^2}$$

$$a_{25} = h_i$$

$$a_{26} = \frac{h_i}{R^3}$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = \frac{2}{h} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} = 0$$

$$a_{34} = \frac{2}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_i}{R} \right) = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R_2 + \frac{h}{2}\zeta} \right) = -\frac{2h_i}{h} \frac{1}{\left(R_2 + \frac{h}{2}\zeta \right)^2} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{h_i}{R^2}$$

$$a_{35} = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_2 + \frac{h}{2}\zeta \right) = \frac{2h_i}{h} \frac{h}{2} = h_i$$

$$a_{36} = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R^2} \right) = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\left(R_2 + \frac{h}{2}\zeta \right)^2} \right) = -\frac{4h_i}{h} \left(\frac{1}{\left(R_2 + \frac{h}{2}\zeta \right)^3} \cdot \frac{h}{2} \right) = -\frac{2h_i}{R^3}$$

$$a_{41} = \frac{2}{h} \frac{\partial h_i}{\partial \zeta} = 0$$

$$a_{42} = 2h_i \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{6}\zeta^3 \right) = h_i(1 - \zeta^2)$$

$$a_{43} = \frac{1}{s'} [1 - \zeta^2] \frac{\partial h_i}{\partial \xi}$$

$$a_{44} = \frac{1}{s'} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right] \zeta - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} \right] \zeta^2 \right] \frac{\partial h_i}{\partial \xi}$$

$$a_{45} = \frac{1}{s'} \left[R - \frac{1}{2} [R_o - R_i] \zeta - \frac{1}{2} [R_o + R_i] \zeta^2 \right] \frac{\partial h_i}{\partial \xi}$$

$$a_{46} = \frac{1}{s'} \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R_i^2} \right] \zeta - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o^2} + \frac{1}{R_i^2} \right] \zeta^2 \right] \frac{\partial h_i}{\partial \xi}$$

Apêndice IV – Matriz de Penalidades da Continuidade

Como demonstrado na seção 4, a matriz de penalidades da continuidade pode ser representada na seguinte forma:

$$K_{Pkj}^C = \alpha G_{Ck}^T G_{Ck} \quad (\text{V-1})$$

$$G_{Ck} = [G_{1k} \ G_{2k} \ G_{3k}] \quad (\text{V-2})$$

Onde a matriz G_{Ck} tem seus termos definidos da seguinte maneira:

$$G_{1k} = [a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1 \ e_1 \ f_1 \ a_3 \ \dots \ a_4 \ \dots] \quad (\text{V-3})$$

$$G_{2k} = [g \ h \ i \ j \ k \ l] \quad (\text{V-4})$$

$$G_{3k} = [u_3 \ v_3 \ w_3 \ x_3 \ y_3 \ z_3 \ u_4 \ \dots \ u_2 \ \dots] \quad (\text{V-5})$$

Tem-se que G_{1k} , G_{2k} e G_{3k} são cada um associados a uma das componentes do vetor deslocamento, como visto na seção 4:

$$\hat{U}^T = [\hat{u}_{(n)}^T \ \hat{u}_{(int)}^T \ \hat{u}_{(n+1)}^T] \quad (\text{V-6})$$

A restrição a ser imposta por essa matriz é:

$$\text{restrição} = \left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1}^{(n)} - \left(\frac{1}{s'} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{(n+1)} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-7})$$

Finalmente, tem-se que os campos de deslocamento são definidos pelas equações:

$$U_1(\xi, \zeta) = U_1^0(\xi) + \Upsilon_1(\xi)T + \Phi_1(\xi)T^2 + \Psi_1(\xi)T^3 \quad (\text{V-8})$$

$$W(\xi, \zeta) = W_0(\xi) + \frac{W_1(\xi)}{R(\xi, \zeta)} + W_2(\xi)R(\xi, \zeta) + \frac{W_3(\xi)}{[R(\xi, \zeta)]^2} \quad (\text{V-9})$$

Com todos essas relações e definições, pode-se obter as equações da matriz de penalidades:

$$a_p = 0 \quad (\text{V-10})$$

$$b_p = 0 \quad (\text{V-11})$$

$$c_p = \left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-12})$$

$$d_p = \left[\left(\frac{1}{R s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-13})$$

$$e_p = \left[\left(\frac{R}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-14})$$

$$f_p = \left[\left(\frac{1}{R^2 s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-15})$$

$$g = 0 \quad (\text{V-16})$$

$$h = 0 \quad (\text{V-17})$$

$$i = \left[\left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} - \left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \right] \quad (\text{V-18})$$

$$j = \left[\left[\left(\frac{1}{R s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} - \left[\left(\frac{1}{R s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \right] \quad (\text{V-19})$$

$$k = \left[\left[\left(\frac{R}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} - \left[\left(\frac{R}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \right] \quad (\text{V-20})$$

$$f_p = \left[\left[\left(\frac{1}{R^2 s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=+1} \right]_{\zeta=\pm 1} - \left[\left(\frac{1}{R^2 s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \right] \quad (\text{V-21})$$

$$u_p = 0 \quad (\text{V-22})$$

$$v_p = 0 \quad (\text{V-23})$$

$$c_p = \left[\left(\frac{1}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-24})$$

$$d_p = \left[\left(\frac{1}{R s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-25})$$

$$e_p = \left[\left(\frac{R}{s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-26})$$

$$f_p = \left[\left(\frac{1}{R^2 s'} \frac{\partial h_p}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1} \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (\text{V-27})$$

Bibliografia

- [1] ESPINOZA, H.G.S., "Formulação de Cascas Espessas Axissimétricas Utilizando Elementos Finitos Enriquecidos", Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 2004
- [2] ALMEIDA, C.A.; SOUZA, F.N., "Axisymmetric Thin Shell Analyses with Reduced Degrees-of-Freedom", Applied Mechanics Reviews (ASME), Vol. 42, No. 11, pp.3-13, 1989 (DOI 10.1115/1.3152406)
- [3] SOUZA, F. N., "Representação Numérica de Cascas Finas Axissimétricas com um Modelo Unidimensional", Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 1988.
- [4] DYM, C.L., "Introduction to The Theory of Shells", Pergamon Press, 1974.
- [5] GERE, J.M., "Mecânica dos Materiais", Cengage Learning, 2009.
- [6] ALMEIDA, C.A.; Elementos Finitos na Engenharia Mecânica – Notas de Aula.
- [7] MENEZES, I.F.M; PEREIRA, A; VAZ, L.E.; “Programação Matemática: Teoria, Algoritmos e Aplicações na Engenharia”, 2012.