

Referências Bibliográficas

- [1] PAULRAJ, A. J.; GORE, D. A.; NABAR, R. U.; BÖLCSKEI, H. An overview of MIMO communications – a key to gigabit wireless. *Proc. IEEE*, v. 92, n. 2, p. 192–218, Feb. 2004. 1
- [2] BÖLCSKEI, H. MIMO-OFDM wireless systems: basics, perspectives, and challenges. *IEEE Wireless Commun.*, v. 13, n. 4, p. 31–37, Aug. 2006. 1
- [3] KIM, H.; CHAE, C.-B.; DE VECIANA, G.; HEATH, R. W. A cross-layer approach to energy efficiency for adaptive MIMO systems exploiting spare capacity. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 8, n. 8, p. 4264–4275, Aug. 2009. 1
- [4] YANG, Y.; JIAO, B. Information-guided channel-hopping for high data rate wireless communication. *IEEE Commun. Lett.*, v. 12, n. 4, p. 225–227, Apr. 2008. 1
- [5] MESLEH, R. Y.; HAAS, H.; SINANOVIĆ, S.; AHN, C. W.; YUN, S. Spatial modulation. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, v. 57, n. 4, p. 2228–2241, July 2008. 1
- [6] JEGANATHAN, J.; GHAYEB, A.; SZCZECINSKI, L.; CERON, A. Space shift keying modulation for MIMO channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 8, n. 7, p. 3692–3703, July 2009. 1
- [7] JEGANATHAN, J.; GHAYEB, A.; SZCZECINSKI, L. Spatial modulation: optimal detection and performance analysis. *IEEE Commun. Lett.*, v. 12, n. 8, p. 545–547, Aug. 2008. 1
- [8] WANG, J.; JIA, S.; SONG, J. Signal vector based detection scheme for spatial modulation. *IEEE Commun. Lett.*, v. 16, n. 1, p. 19–21, Jan. 2012. 1
- [9] ZHENG, J. Signal vector based list detection for spatial modulation. *IEEE Commun. Lett.*, v. 1, n. 4, p. 265–267, Aug. 2012. 1
- [10] YOUNIS, A.; SINANOVIĆ, S.; DI RENZO, M.; MESLEH, R.; HAAS, H. Generalised sphere decoding for spatial modulation. *IEEE Trans. Commun.*, v. 61, n. 7, p. 2805–2815, July 2013. 1
- [11] YOUNIS, A.; SERAFIMOVSKI, N.; MESLEH, R.; HAAS, H. Generalised spatial modulation. In: 2010 Conference Record of the Forty Fourth Asilomar

- Conference on Signals, Systems and Computers (ASILOMAR 2010), 2010, Pacific Grove, CA, U.S.A. Pacific Grove, CA, U.S.A.: . p. 1498–1502. 1
- [12] FU, J.; HOU, C.; XIANG, W.; YAN, L.; HOU, Y. Generalised spatial modulation with multiple active transmit antennas. In: 2010 IEEE GLOBECOM Workshops (GC Wkshps), 2010, Miami, FL, U.S.A. Miami, FL, U.S.A.: . p. 839–844. 1
- [13] WANG, J.; JIA, S.; SONG, J. Generalised spatial modulation system with multiple active transmit antennas and low complexity detection scheme. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 11, n. 4, p. 1605–1615, Apr. 2012. 1, 2.2, 5.1.2, 5.1.2
- [14] SUGIURA, S.; CHEN, S.; HANZO, L. A universal space-time architecture for multiple-antenna aided systems. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, v. 14, n. 2, p. 401–420, Second Quarter 2012. 1
- [15] DI RENZO, M.; HAAS, H. On transmit diversity for spatial modulation MIMO: impact of spatial constellation diagram and shaping filters at the transmitter. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, v. 62, n. 6, p. 2507–2531, July 2013. 1, 6.2
- [16] XIAO, Y.; YANG, Z.; DAN, L.; YANG, P.; YIN, L.; XIANG, W. Low-complexity signal detection for generalized spatial modulation. *IEEE Commun. Lett.*, v. 18, n. 3, p. 403–406, Apr. 2014. 1, 2.2, 5.1.2, 5.4
- [17] HOCHWALD, B. M.; TEN BRINK, S. Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel. *IEEE Trans. Commun.*, v. 51, n. 3, p. 389–399, Mar. 2003. 1, 3.4, 3.4, 3.5, 3.5.3
- [18] HASSIBI, B.; VIKALO, H. On the expected complexity of integer least-squares problems. In: 2002 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2002, Orlando, FL, U.S. Orlando, FL, U.S.: . p. II–1497 – II–1500. 1, 3.4
- [19] DAMEN, M. O.; EL GAMAL, H.; CAIRE, G. On maximum-likelihood detection and the search for the closest lattice point. *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 49, n. 10, p. 2389–2402, Oct. 2003. 1, 3.5
- [20] PHAM, D.; PATTIPATI, K.; WILLETT, P.; LUO, J. An improved complex sphere decoder for V-BLAST systems. *IEEE Signal Process. Lett.*, v. 11, n. 9, p. 748–751, Sept. 2004. 1, 3.5

- [21] LI, L.; DE LAMARE, R. C.; BURR, A. G. Complex sphere decoding with a modified tree pruning and successive interference cancellation. In: 2012 International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS), 2012, Paris, France. Paris, France: . p. 226–230. 1, 3.5, 3.5
- [22] WOLNIANSKY, P. W.; FOSCHINI, G. J.; GOLDEN, G.; VALENZUELA, R. V-BLAST: an architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel. In: 1998 URSI International Symposium on Signals, Systems, and Electronics (ISSE 98), 1998, Pisa, Italy. Pisa, Italy: . 1, 2.2
- [23] WÜBBEN, D.; SEETHALER, D.; JALDÉN, J.; MATZ, G. Lattice reduction. *IEEE Signal Process. Mag.*, v. 28, n. 3, p. 70–91, May 2011. 1, 5.2.1, 5.2.1
- [24] DE LAMARE, R. C. Adaptive and iterative multi-branch MMSE decision feedback detection algorithms for multi-antenna systems. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 12, n. 10, p. 5294–5308, Oct. 2013. 1, 5.3
- [25] MARÇAL, M. F.; VINHOZA, T. T. V.; BACKX, F. D.; SAMPAIO-NETO, R. A grouping strategy for parallel group detection in synchronous Gaussian CDMA channels. In: 2006 Int. Telecommunications Symposium (ITS), 2006, Fortaleza, Brazil. Fortaleza, Brazil: . 1.1
- [26] BÖLCSKEI, H.; GESBERT, D.; PAULRAJ, A. On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems. *IEEE Trans. Commun.*, v. 58, n. 2, p. 225–234, Feb. 2002. 2.1
- [27] JAKES, W. C. *Mobile communications*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1974. 2.1
- [28] WEICHSELBERGER, W. *Spatial structure of multiple antenna radio channels*. Dec. 2003. Tese (Doutorado) - Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik. Technische Universität Wien, Dec. 2003. 2.1
- [29] KERMOAL, J. P.; SCHUMACHER, L.; PEDERSEN, K. I.; MOGENSEN, P. E.; FREDERIKSEN, F. A stochastic MIMO radio channel model with experimental validation. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, v. 20, n. 6, p. 1211–1226, Aug. 2002. 2.1
- [30] YU, K.; BENGTSSON, M.; OTTERSTEN, B.; MCNAMARA, D.; KARLSSON, P. Modeling of wide-band MIMO radio channel based on NLoS indoor measurements. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, v. 53, n. 3, p. 655–665, May 2004. 2.1

- [31] DI RENZO, M.; HAAS, H.; GHAYEB, A.; SUGIURA, S.; HANZO, L. Spatial modulation for generalized MIMO: challenges, opportunities, and implementation. *Proc. IEEE*, v. 102, n. 1, p. 56–103, Jan. 2014. 2.2
- [32] CAL-BRAZ, J. A.; SAMPAIO-NETO, R. Projection-based list detection in generalized spatial modulation mimo systems. *IEEE Commun. Lett.*, v. 19, n. 7, p. 1145–1148, July 2015. 2.2, 5.3
- [33] TONG, L.; PERREAU, S. Multichannel blind identification: from subspace to maximum likelihood methods. *Proc. IEEE*, v. 86, n. 10, p. 1951–1968, Oct. 1998. 2.3
- [34] MOULINES, E.; DUHAMEL, P.; CARDOSO, J.; MAYRARGUE, S. Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 43, n. 2, p. 516–525, Aug. 1995. 2.3
- [35] BIGUESH, M.; GERSHMAN, A. B. MIMO channel estimation: optimal training and tradeoffs between estimation techniques. In: 2004 IEEE International Conference on Communications, 2004. v. 5. p. 2658–2662. 2.3
- [36] HEDAYAT, A.; SHAH, H.; NOSRATINIA, A. Analysis of space-time coding in correlated fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 4, p. 2882–2891, Nov. 2005. 3.2
- [37] SIMON, M. K.; ALOUINI, M.-S. *Digital communication over fading channels*. 2nd. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2005. 3.2
- [38] TURIN, G. L. The characteristic function of Hermitian quadratic forms in complex normal variables. *Biometrika*, v. 47, n. 1-2, p. 199–201, June 1960. 3.2
- [39] HANDTE, T.; MÜLLER, A.; SPEIDEL, J. BER analysis and optimization of generalized spatial modulation in correlated fading channels. In: 2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall (VTC 2009-Fall), 2009, Anchorage, AK, U.S. Anchorage, AK, U.S.: . 3.2
- [40] ALOUINI, M.-S.; GOLDSMITH, A. J. A unified approach for calculating error rates of linearly modulated signals over generalized fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, v. 47, n. 9, Sept. 1999. 3.2
- [41] BARBAROSSA, S. *Multiantenna wireless communication systems*. Norwood, MA: Artech House Publishers, 2005. 3.2

- [42] HASSIBI, B.; VIKALO, H. On the sphere decoding algorithm: Part I – the expected complexity. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 53, n. 8, p. 2806–2818, Aug. 2005. 3.4, 3.4, 5.4
- [43] JALDÉN, J.; OTTERSTEN, B. On the complexity of sphere decoding in digital communications. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 53, n. 4, Apr. 2005. 3.4
- [44] BARBERO, L. G.; THOMPSON, J. S. Fixing the complexity of the sphere decoder for MIMO detection. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 7, n. 6, p. 2131–2142, June 2008. 3.4, 5.2
- [45] CAL-BRAZ, J. A.; SAMPAIO-NETO, R. Low-complexity sphere decoding detector for generalized spatial modulation systems. *IEEE Commun. Lett.*, v. 18, n. 6, p. 949–952, June 2014. 3.5
- [46] VITERBO, E.; BOUTROS, J. A universal lattice code decoder for fading channel. *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 45, n. 5, p. 1639–1642, July 1999. 3.5.1
- [47] UEBERHUBER, C. W. *Numerical computation 1: methods, software, and analysis*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1997. 3.5.3, 5.1.2
- [48] CAL-BRAZ, J. A.; MEDINA, C. A.; SAMPAIO-NETO, R. Group maximum likelihood detection in generalized spatial modulation. In: 2013 International Symposium on Wireless Communication systems (ISWCS), 2013, Ilmenau, Germany. Ilmenau, Germany: . 4.1
- [49] BASAR, E.; AYGOLU, U.; PANAYIRCI, E.; POOR, H. V. Orthogonal frequency division multiplexing with index modulation. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 61, n. 22, p. 5536–5549, Aug. 2013. 4.1
- [50] CAL-BRAZ, J. A.; SAMPAIO-NETO, R. Nested maximum likelihood group detection in generalized spatial modulation MIMO systems. *IEEE Commun. Lett.*, v. 18, n. 6, p. 953–956, June 2014. 4.2
- [51] KIM, S. W.; KIM, K. P. Log-likelihood-ratio-based detection ordering in V-BLAST. *IEEE Trans. Commun.*, v. 54, n. 2, p. 302–307, Feb. 2006. 4.2.1
- [52] MAZA, B.; MEDINA, C.; SAMPAIO-NETO, R. Detecção ótima por grupos em sistemas com transmissão em blocos. In: XXX Simpósio brasileiro de telecomunicações (SBrT 2012), 2012, Brasília, DF. Brasília, DF: . 4.5
- [53] KAY, S. *Fundamentals of statistical signal processing - estimation theory*. Upper Saddle river, NJ: Prentice Hall, 1993. v. 1. 5.1.2, A, F

- [54] BAI, L.; CHOI, J. *Low complexity MIMO detection*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2012. 5.2.1
- [55] GAN, Y. H.; LING, C.; MOW, W. H. Complex lattice reduction algorithm for low-complexity full-diversity MIMO detection. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 57, n. 7, p. 2701–2710, 2009. 5.2.1
- [56] MILFORD, D.; SANDELL, M. Simplified quantisation in a reduced-lattice MIMO decoder. *IEEE Commun. Lett.*, v. 15, n. 7, p. 725–728, July 2011. 5.2.1
- [57] HEDAYAT, A.; NOSRATINIA, A. Outage and diversity of linear receivers in flat-fading MIMO channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 55, n. 12, p. 5868–5873, Dec. 2007. 5.2.1
- [58] TAHERZADEH, M.; MOBASHER, A.; KHANDANI, A. K. LLL reduction achieves the receive diversity in MIMO decoding. *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 53, n. 12, p. 4801–4805, Dec. 2007. 5.2.1
- [59] CHUGG, K. M.; ANASTASOPOULOS, A.; CHEN, X. *Iterative detection: adaptivity, complexity reduction and applications*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2001. 5.2.1
- [60] WATERS, D. W.; BARRY, J. R. The Chase family of detection algorithms for Multiple-Input Multiple-Output channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, v. 56, n. 2, p. 739–747, Feb. 2008. 5.3
- [61] ARÉVALO, L.; DE LAMARE, R. C.; ZU, K.; SAMPAIO-NETO, R. Multi-branch lattice reduction successive interference cancellation detection for multiuser MIMO systems. In: Proc. 2014 11th Int. Symp. on Wireless Commun. Systems (ISWCS), 2014, Barcelona, Spain. Barcelona, Spain: . p. 219–223. 5.3
- [62] FA, R.; DE LAMARE, R. C. Multi-branch successive interference cancellation for MIMO spatial multiplexing systems: design analysis and adaptive implementation. *IET Commun.*, v. 5, n. 4, p. 484–494, 2011. 5.3
- [63] DATTA, T.; KUMAR, N. A.; CHOCKALINGAM, A.; RAJAN, B. S. A novel MCMC algorithm for near-optimal detection in large-scale uplink multiuser MIMO systems. In: Information Theory and Applications Workshop (ITA), 2012, 2012, San Diego, U.S.A. San Diego, U.S.A.: . p. 69–77. 5.3
- [64] PEREIRA, A. A.; SAMPAIO-NETO, R. Random list-based LAS algorithm for near-optimal detection in large-scale uplink multiuser MIMO systems.

- In: Proc. 19th Int. ITG Workshop on Smart Antennas (WSA 2015), 2015, Ilmenau, Germany. Ilmenau, Germany: . 5.3
- [65] TAROKH, V.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction. *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 44, n. 2, p. 744–765, Mar. 1998. 6, 6.1
- [66] BASAR, E.; AYGOLU, U.; PANAYIRCI, E.; POOR, H. V. Space-time block coded spatial modulation. *IEEE Trans. Commun.*, v. 59, n. 3, p. 823–832, Mar. 2011. 6.2, 6.2.1, 6.3, 6.3.1, 6.3.1
- [67] LI, X.; WANG, L. High-rate space-time block coded spatial modulation with cyclic structure. *IEEE Commun. Lett.*, v. 18, n. 4, p. 532–535, Apr. 2014. 6.2
- [68] CAL-BRAZ, J. A.; SAMPAIO-NETO, R. Low-complexity detection for space-time block coded spatial modulation. In: 2015 International Symposium on Wireless Communication systems (ISWCS), 2015, Brussels, Belgium. Brussels, Belgium: . 6.3.3
- [69] YU, C. M.; HSIEH, S. H.; LIANG, H. W.; LU, C. S.; CHUNG, W. H.; KUO, S. Y.; PEI, S. C. Compressed sensing detector design for space shift keying in MIMO systems. *IEEE Commun. Lett.*, v. 16, n. 10, p. 1556–1559, Oct. 2012. 7
- [70] LIU, W.; WANG, N.; JIN, M.; XU, H. Denoising detection for the generalized spatial modulation system using sparse property. *IEEE Commun. Lett.*, v. 18, n. 1, p. 22–25, Jan. 2014. 7
- [71] HASSIBI, B.; HOCHWALD, B. M. How much training is needed in multiple-antenna wireless links? *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 49, n. 4, p. 951–963, Apr. 2003. 7
- [72] SUN, Q.; COX, D. C.; HUANG, H. C.; LOZANO, A. Estimation of continuous flat fading MIMO channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 1, n. 4, p. 549–553, Oct. 2002. 7
- [73] NARASIMHAN, T. L.; RAVITEJA, P.; CHOCKALINGAM, A. Generalized spatial modulation in large-scale multiuser MIMO systems. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, v. 14, n. 7, p. 3764–3779, July 2015. 7
- [74] TREES, H. L. V. *Detection, estimation, and modulation theory*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1993. v. Part 1. A

- [75] BERRICHE, L.; ABED-MERAIM, K.; BELFIORE, J.-C. Cramer-Rao bounds for MIMO channel estimation. In: IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004 (ICASSP'04), 2004, Montreal, Canada. Montreal, Canada: . v. 4. p. iv-397 – iv400. A
- [76] PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. The matrix cookbook. Technical report, Technical University of Denmark, nov 2012. Version 20121115. A, H
- [77] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. *Matrix computations*. 4. ed. Baltimore: John Hopkins University Press, 2013. G
- [78] GOLUB, G. H. Matrix decompositions and statistical calculations. Technical Report CS 124, Computer Science Department, Stanford University, 1969. G
- [79] RISTESKI, I. B.; TRENCHEVSKI, K. G. Principal values and principal subspaces of two subspaces of vector spaces with inner product. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, v. 42, n. 1, p. 289–300, 2001. G

A

Eficiência do estimador linear MMSE

Considere um sistema MIMO, cujo transmissor emite M blocos de vetores de símbolos em direção à estação receptora. O canal MIMO a ser estimado é considerado desvanecente em blocos, isto é, a matriz $\mathbf{H}$ é mantida fixa ao longo de M transmissões consecutivas e então atualizada com novos elementos estatisticamente independentes dos anteriores. A expressão deste sistema, diretamente de (2-2), é dada por:

$$\tilde{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{H}\mathbf{x}[n] + \tilde{\mathbf{n}}[n], \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (\text{A-1})$$

Considera-se o uso de um estimador que realiza P transmissões de sequências de treinamento, constituídas de vetores de pilotos $\mathbf{p}[n] = [p_1[n] \ p_2[n] \ \dots \ p_{N_T}[n]]^T$, $n = 1, 2, \dots, P$, com símbolos com energia $\mathbb{E}[|p_i[n]|^2] \triangleq \sigma_p^2$. Concatenando os vetores recebidos ao longo de P transmissões de pilotos, $\mathbf{y} = [\tilde{\mathbf{y}}[P]^T \ \tilde{\mathbf{y}}[P-1]^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{y}}[1]^T]^T$ é o vetor $N_R P \times 1$ de dados estendido e o sistema (A-1) é reescrito como:

$$\mathbf{y} = \mathcal{P}\mathbf{h} + \mathbf{n}, \quad (\text{A-2})$$

sendo $\mathbf{n} = [\tilde{\mathbf{n}}[P]^T \ \tilde{\mathbf{n}}[P-1]^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{n}}[1]^T]^T$, $\mathbf{h} = \text{vec}(\mathbf{H})$ e $\mathcal{P} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_{N_R}$. Por sua vez, $\mathbf{P} = [\mathbf{p}[P] \ \mathbf{p}[P-1] \ \dots \ \mathbf{p}[1]]^T$, de dimensão $P \times N_T$, reúne as P emissões de vetores de pilotos.

O limitante Bayesiano de Cramer-Rao estabelece o mínimo valor do erro médio quadrático de um estimador de variável aleatória despolarizado. A matriz de autocorrelação do erro $\mathbf{e} = \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}$, denotada por $\mathbf{R}_e$, armazena em sua diagonal principal o erro médio quadrático das estimativas dos elementos da matriz do canal, $h_{i,j}$. A matriz $\mathbf{R}_e$ relaciona-se com o limitante de Cramer-Rao por [53]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e &= \mathbb{E}[\mathbf{e}\mathbf{e}^H] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})^H] \geq \mathbf{J}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

sendo $\mathbf{J}$ a matriz de informação de Fisher, de dimensão $N_R N_T \times N_R N_T$, que é

expressa por:

$$\mathbf{J} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right)^H \right], \quad (\text{A-4})$$

sendo o valor esperado em relação a $\mathbf{y}$ e $\mathbf{h}$. Esta expressão pode ser calculada fazendo-se [74, 75]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right)^H \middle| \mathbf{h} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\underbrace{\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right)^H \middle| \mathbf{h} \right]}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} \right)^H}_{\mathbf{B}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Para a determinação de $\mathbf{J}$, definem-se as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Calculando $\mathbf{A}$, reconhece-se $\mathbf{y}|\mathbf{h}$ com função densidade de probabilidade $p(\mathbf{y}|\mathbf{h})$ como uma distribuição Gaussiana complexa de média $\mathcal{P}\mathbf{h}$ e matriz covariância $\mathbf{C} = N_0 \mathbf{I}_{N_R P}$. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} &= - \frac{\partial [\ln(\pi^{N_R P} |\mathbf{C}|) + (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h})^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h})]}{\partial \mathbf{h}^*} \\ &= - \left(\frac{\partial (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h})^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right)^* \\ &= - \left(\frac{\partial (\mathbf{y}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{C}^{-1} \mathcal{P}\mathbf{h} - \mathbf{h}^H \mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{h}^H \mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} \mathcal{P}\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right)^* \\ &= - \left(0 - (\mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y})^* - 0 + (\mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} \mathcal{P}\mathbf{h})^* \right)^* \\ &= \mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h}). \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

A matriz $\mathbf{A}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h}) \right) \left(\mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{P}\mathbf{h}) \right)^H \middle| \mathbf{h} \right] \\ &= \mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbb{E} [\mathbf{nn}^H] \mathbf{C}^{-1} \mathcal{P} \\ &= \mathcal{P}^H \mathbf{C}^{-1} \mathcal{P} = \frac{1}{N_0} \mathcal{P}^H \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Para o cálculo de $\mathbf{B}$, define-se $p(\mathbf{h})$ a função densidade de probabilidade de $\mathbf{h}$ uma distribuição Gaussiana de média nula e matriz covariância $\sigma_h^2 \mathbf{I}_{N_R N_T}$.

Desenvolve-se assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln p(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^*} &= -\frac{\partial \left[\ln(\pi^{N_R N_T} |\sigma_h \mathbf{I}_{N_R N_T}|) + \frac{1}{\sigma_h^2} \mathbf{h}^H \mathbf{h} \right]}{\partial \mathbf{h}^*} \\ &= -\frac{1}{\sigma_h^2} \left(\frac{\partial \mathbf{h}^H \mathbf{h}}{\partial \mathbf{h}} \right)^* = -\frac{1}{\sigma_h^2} \mathbf{h}.\end{aligned}\quad (\text{A-8})$$

A matriz $\mathbf{B}$ é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \left(-\frac{1}{\sigma_h^2} \mathbf{h} \right) \left(-\frac{1}{\sigma_h^2} \mathbf{h} \right)^H \\ &= \frac{1}{\sigma_h^4} \mathbf{h} \mathbf{h}^H.\end{aligned}\quad (\text{A-9})$$

A matriz $\mathbf{J}$ é determinada aplicando (A-7) e (A-9) em (A-5). Considere que os vetores de pilotos são ortogonais entre si, assim $\mathbf{R}_p = \mathbf{P}^H \mathbf{P} = P \sigma_p^2 \mathbf{I}_{N_T}$. Além disto, verifica-se que $\mathcal{R}_p = \mathcal{P}^H \mathcal{P} = \mathbf{R}_p \otimes \mathbf{I}_{N_R} = P \sigma_p^2 \mathbf{I}_{N_R N_T}$. A matriz de Fisher é expressa como:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N_0} \mathcal{R}_p + \frac{1}{\sigma_h^4} \mathbf{h} \mathbf{h}^H \right] \\ &= \frac{P \sigma_p^2}{N_0} \mathbf{I}_{N_R N_T} + \frac{1}{\sigma_h^2} \mathbf{I}_{N_R N_T}.\end{aligned}\quad (\text{A-10})$$

De forma análoga à definição da relação sinal-ruído em (2-23), define-se a relação entre energia dos pilotos e a energia média do ruído por antena receptora, $\rho_p = N_A \sigma_h^2 \frac{\sigma_p^2}{N_0}$. Assim, o limitante inferior do erro médio quadrático da estimativa da (i, j) -ésima componente de $\mathbf{H}$, $h_{i,j}$, dado pelo l -ésimo elemento da diagonal de $\mathbf{J}^{-1}$, $l = (j-1)N_T + N_R$, é apresentado como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_e(\hat{h}_{i,j}) &\geq \mathbf{J}_{l,l}^{-1} = 1 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{\sigma_p^2}{N_0} P} \\ &= \frac{\sigma_h^2}{1 + \frac{P}{N_T} \frac{N_T \sigma_h^2 \sigma_p^2}{N_0}} \\ &= \frac{\sigma_h^2}{1 + \frac{P}{N_T} \rho_p}.\end{aligned}\quad (\text{A-11})$$

O estimador linear de mínimo erro médio quadrático (MMSE linear), $\hat{\mathbf{h}}_{\text{MMSE}}$, minimiza os elementos da diagonal principal de $\mathbf{R}_e$. Considerando que este estimador linear tem a forma:

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{W}\mathbf{y}, \quad (\text{A-12})$$

sendo $\mathbf{W}$ o filtro linear que compõe o estimador, aplicando (A-12), a matriz $\mathbf{R}_e$ pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e &= \mathbb{E}[\mathbf{h}\mathbf{h}^H] - \mathbf{W}\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{h}^H] - \mathbb{E}[\mathbf{h}\mathbf{y}^H]\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]\mathbf{W}^H \\ &= \mathbf{R}_h - \mathbf{W}\mathbf{R}_{hy} - \mathbf{R}_{yh}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{R}_y\mathbf{W}^H, \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

sendo $\mathbf{R}_y = \mathbb{E}[\mathbf{h}\mathbf{h}^H]$, $\mathbf{R}_{hy} = \mathbf{R}_{yh}^H = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{h}^H]$ e $\mathbf{R}_y = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]$. É possível mostrar que a matriz $\mathbf{W}$ que minimiza os elementos da diagonal de $\mathbf{R}_e$ é dada por:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_{yh}\mathbf{R}_y^{-1}. \quad (\text{A-14})$$

Usando (A-14), $\mathbf{R}_e$ é simplificada como:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_h - \mathbf{R}_{yh}\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{R}_{hy}. \quad (\text{A-15})$$

Utilizando a expressão do sistema (A-2), $\mathbf{R}_y$ e $\mathbf{R}_{yh}$ são desenvolvidas como:

$$\mathbf{R}_{yh} = \mathbb{E}[\mathbf{h}(\mathcal{P}\mathbf{h} + \mathbf{n})^H] = \mathbf{R}_h\mathcal{P}^H \quad (\text{A-16a})$$

$$\mathbf{R}_y = \mathbb{E}[(\mathcal{P}\mathbf{h} + \mathbf{n})(\mathcal{P}\mathbf{h} + \mathbf{n})^H] = \mathcal{P}\mathbf{R}_h\mathcal{P}^H + \mathbf{R}_n. \quad (\text{A-16b})$$

O filtro do estimador MMSE, $\mathbf{W}$, é escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{R}_h\mathcal{P}^H(\mathcal{P}\mathbf{R}_h\mathcal{P}^H + \mathbf{R}_n)^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_h^{-1} + \mathcal{P}^H\mathbf{R}_n^{-1}\mathcal{P})^{-1}\mathcal{P}^H\mathbf{R}_n^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

sendo que em (A-17) a identidade matricial $(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{B}^H(\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{B}^H + \mathbf{R})$, para $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ matrizes positiva definidas, foi aplicada [76]. Usando (A-14) e (A-17), matriz de correlação do erro é desenvolvida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e &= \mathbf{R}_h - \mathbf{W}\mathbf{R}_{hy} \\ &= \mathbf{R}_h - (\mathbf{R}_h^{-1} + \mathcal{P}^H\mathbf{R}_n^{-1}\mathcal{P})^{-1}\mathcal{P}^H\mathbf{R}_n^{-1}\mathcal{P}\mathbf{R}_h \\ &= (\mathbf{R}_h^{-1} + \mathcal{P}^H\mathbf{R}_n^{-1}\mathcal{P})^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

Empregando os mesmos valores do desenvolvimento do limitante de Cramer-Rao, $\mathbf{P}^H \mathbf{P} = P\sigma_p^2 \mathbf{I}_{N_T}$, $\mathbf{R}_h = \sigma_h^2 \mathbf{I}_{N_R N_T}$ e $\mathbf{R}_n = N_0 \mathbf{I}_{N_R N_T}$, a matriz $\mathbf{R}_e$ é expressa por:

$$\mathbf{R}_e = \left(\frac{1}{\sigma_h^2} \mathbf{I}_{N_R N_T} + \frac{P\sigma_p^2}{N_0} \mathbf{I}_{N_R N_T} \right)^{-1} \quad (\text{A-19})$$

A igualdade entre a matriz $\mathbf{J}^{-1}$ em (A-10) e a matriz $\mathbf{R}_e$ em (A-19) prova que, em um sistema linear do tipo (A-1), em que $\mathbf{y}$ e $\mathbf{h}$ são variáveis aleatórias conjuntamente Gaussianas, o estimador MMSE linear possui erro médio quadrático igual ao limitante de Cramer-Rao.

B

Estatísticas da variável aleatória c em (3-10)

Dada a variável aleatória real $c = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \right] - \|\mathbf{D}_H\|_F^2$, e sabendo-se que $\mathbf{D}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \cdots & \mathbf{d}_L \end{bmatrix}$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \cdots & \mathbf{n}_L \end{bmatrix}$ é uma matriz cujos elementos são variáveis aleatórias Gaussianas complexas decorrelacionadas de média nula e variância N_0 , o valor esperado de c , denotado por μ_c , é dado por:

$$\begin{aligned} \mu_c &= \mathbb{E}[c] = \mathbb{E} \left[2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \right] - \|\mathbf{D}_H\|_F^2 \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbb{E} \left[\mathbf{N}^H \right] \mathbf{D}_H \right) \right] - \|\mathbf{D}_H\|_F^2 \\ &= -\|\mathbf{D}_H\|_F^2. \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

Sua variância, var_c é desenvolvida a seguir:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}_c &= \mathbb{E} \left[\left(c - \mu_c \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[2 \operatorname{Re} \left(\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \right) \right]^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H + \mathbf{D}_H^H \mathbf{N} \right) \right]^2 \right\} \\ &= 2 \mathbb{E} \left\{ \operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \right\} + 2 \mathbb{E} \left\{ \operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \operatorname{tr} \left(\mathbf{D}_H^H \mathbf{N} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

O primeiro termo de (B-2) é desenvolvido, como dado a seguir:

$$\begin{aligned} 2 \mathbb{E} \left\{ \operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^H \mathbf{D}_H \right) \right\} &= 2 \mathbb{E} \left\{ \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mathbf{n}_m^H \mathbf{d}_m \mathbf{n}_n^H \mathbf{d}_n \right\} \\ &= 2 \mathbb{E} \left\{ \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L a_m a_n \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

sendo $a_{m(n)} = \mathbf{n}_{m(n)}^H \mathbf{d}_{m(n)}$ uma soma ponderada de variáveis aleatórias Gaussianas complexas independentes, portanto, também uma variável aleatória Gaussiana complexa. Dois casos devem ser analisados separadamente. No caso $m \neq n$, tem-se que: $\mathbb{E}[a_m a_n] = 0$. Para o caso $m = n$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a_m^2] &= \mathbb{E} \left[\left(a_m^{(r)} + j a_m^{(i)} \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[a_m^{(r)2} - a_m^{(i)2} + 2j \left(a_m^{(r)} a_m^{(i)} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

sendo $a_m^{(r)}$ e $a_m^{(i)}$ as partes real e imaginária de a_m . Assim, o primeiro termo de (B-2) é nulo. Para tratar o segundo termo, aplica-se a seguinte identidade algébrica:

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{vec}(\mathbf{A}^H)^H \text{vec}(\mathbf{B}). \quad (\text{B-5})$$

Por fim, obtém-se a variância de c :

$$\begin{aligned} \text{var}_c &= 2 \text{vec}(\mathbf{D}_H)^H \mathbb{E} \left[\text{vec}(\mathbf{N}) \text{vec}(\mathbf{N})^H \right] \text{vec}(\mathbf{D}_H) \\ &= 2N_0 \|\mathbf{D}_H\|_F^2. \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

C

Expansão do binômio múltiplo em (3-31)

Um binômio múltiplo da forma $\prod_{p=1}^P (a_p + b_p)^N$ é expandido na forma dada por:

$$\prod_{p=1}^P (a_p + b_p)^N = \left[\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a_1^n b_1^{N-n} \right] \left[\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a_2^n b_2^{N-n} \right] \cdots \left[\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a_P^n b_P^{N-n} \right]. \quad (\text{C-1})$$

Aplicando este resultado ao binômio de interesse, apresentado em (3-31), tem-se:

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{r_t} (1 + \rho' \epsilon_m)^{r_r} &= \left[\sum_{n=0}^{r_r} \binom{r_r}{n} \rho'^n \epsilon_1^n \right] \left[\sum_{n=0}^{r_r} \binom{r_r}{n} \rho'^n \epsilon_2^n \right] \cdots \left[\sum_{n=0}^{r_r} \binom{r_r}{n} \rho'^n \epsilon_{r_t}^n \right] \\ &= \left[0 + r_r \rho' \epsilon_1 \sum_{n=2}^{r_r-1} \binom{r_r}{n} \rho'^n \epsilon_1^n + \rho'^{r_r} \epsilon_1^{r_r} \right] \cdots \left[0 + r_r \rho' \epsilon_{r_t} \sum_{n=2}^{r_r-1} \binom{r_r}{n} \rho'^n \epsilon_{r_t}^n + \rho'^{r_r} \epsilon_{r_t}^{r_r} \right] \\ &= 0 + (r_r \rho')^{r_t} \prod_{m=1}^{r_t} \epsilon_m + \cdots + \left(\rho'^{r_t} \prod_{m=1}^{r_t} \epsilon_m \right)^{r_r}. \quad (\text{C-2}) \end{aligned}$$

Para altos valores de relação sinal-ruído, $\rho' \rightarrow \infty$, o termo de maior expoente de ρ' em (C-2) irá prevalecer na expressão. Assim, tem-se:

$$\prod_{m=1}^{r_t} (1 + \rho' \epsilon_m)^{r_r} \xrightarrow{\rho' \rightarrow \infty} \left(\rho'^{r_t} \prod_{m=1}^{r_t} \epsilon_m \right)^{r_r}. \quad (\text{C-3})$$

D

Expressão alternativa da distância Euclidiana em (3-39)

Considere os vetores $\mathbf{y}$ e $\mathbf{s}$, a matriz $\mathbf{H}$. A matriz $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$ é a pseudo-inversa à esquerda de $\mathbf{H}$. A distância Euclidiana quadrática de $\mathbf{H}\mathbf{s}$ em relação a $\mathbf{y}$ é desenvolvida como:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y}. \quad (\text{D-1})$$

Considere as seguintes identidades a respeito da matriz $\mathbf{H}$:

1. $\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H = (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger)^H$;
2. $\mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^H \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H = \mathbf{H}^H$;
3. $(\mathbf{H}^\dagger)^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger)^H = \mathbf{H}$.

Desenvolvendo (D-1):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 &= \mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s} - \mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger)^H \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s} - \mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H}^\dagger)^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{y}^H (\mathbf{H}^\dagger)^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y} \\ &\quad + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{s}^H \mathbf{H}^H - \mathbf{y}^H (\mathbf{H}^\dagger)^H \mathbf{H}^H) (\mathbf{H} \mathbf{s} - \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}) + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{s} - \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} (\mathbf{s} - \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}) + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{D-2})$$

Considere $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}$ e que à matriz $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ pode-se aplicar a decomposição Cholesky, resultando em $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{U}^H \mathbf{U}$, sendo $\mathbf{U}$ uma matriz triangular superior. Com estas considerações, (D-2) é dada por:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 &= (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})^H \mathbf{U}^H \mathbf{U} (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}) + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y} \\ \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 &= \|\mathbf{U}(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})\|^2 + \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

E

Expressão da probabilidade *a posteriori* em (4-21)

Considere um vetor aleatório $\mathbf{y}$, composto por elementos contínuos, os dados observáveis de um experimento aleatório, estatisticamente correlacionados ao vetor aleatório discreto $\mathbf{s}$. O espaço amostral de $\mathbf{s}$ é representado por $\mathcal{S}$ e sabe-se que $\text{card}(\mathcal{S}) = M$. Considerando as hipóteses $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_M$ de $\mathbf{s}$ equiprováveis, denota-se por $\hat{\mathbf{s}}$ a estimativa de máxima probabilidade *a posteriori* geradora da observação $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, ou seja:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}} &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} P(\mathbf{s} | \mathbf{y} = \mathbf{y}') \\ &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{y}' | \mathbf{s}) P(\mathbf{s}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{y}' | \mathbf{s}),\end{aligned}\tag{E-1}$$

que, neste caso, equivale à estimativa de máxima verossimilhança.

Define-se então a razão de log-verossimilhanças Λ_i como:

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= \ln \frac{p(\mathbf{y}' | \hat{\mathbf{s}})}{p(\mathbf{y}' | \mathbf{s}_i)} \\ &= \ln \frac{P(\hat{\mathbf{s}} | \mathbf{y} = \mathbf{y}')}{P(\mathbf{s}_i | \mathbf{y} = \mathbf{y}')}.\end{aligned}\tag{E-2}$$

Reescrevendo a expressão, obtém-se:

$$P(\mathbf{s}_i | \mathbf{y} = \mathbf{y}') = e^{-\Lambda_i} P(\hat{\mathbf{s}} | \mathbf{y} = \mathbf{y}').\tag{E-3}$$

Pela soma das probabilidades condicionais para todas as hipóteses de $\mathbf{s}$, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^M P(\mathbf{s}_i | \mathbf{y} = \mathbf{y}') = 1.\tag{E-4}$$

Empregando (E-3) na expressão acima, chega-se a:

$$\sum_{i=1}^M e^{-\Lambda_i} P(\hat{\mathbf{s}} | \mathbf{y} = \mathbf{y}') = 1$$

$$P(\hat{\mathbf{s}}|\mathbf{y} = \mathbf{y}') = \frac{1}{\sum_{i=1}^M e^{-\Lambda_i}}. \quad (\text{E-5})$$

F

Desenvolvimento do banco de matrizes projetoras pelo método recursivo

Considere um subespaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbf{A}) \in \mathbb{C}^M$ de dimensão N gerado por $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \mathbf{c}]$, sendo $\mathbf{B}$ a matriz com as $N - 1$ primeiras bases de $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{c}$ que possui a última base. A matriz projetora em $\mathcal{F}(\mathbf{A})$, denotada por $\mathbf{W}_{\mathbf{A}}$, pode ser decomposta na forma [53]:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{A}} = \mathbf{W}_{\mathbf{B}} + \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}}) \mathbf{c} \mathbf{c}^H (\mathbf{I} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}})}{\mathbf{c}^H (\mathbf{I} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}}) \mathbf{c}}, \quad (\text{F-1})$$

sendo $(\mathbf{I} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}})$ a matriz projetora no espaço ortogonal a $\mathcal{F}(\mathbf{B})$. Para a aplicação deste resultado na regra de decisão em (5-12), nota-se que $\|\mathbf{W}_j \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^H \mathbf{W}_j^H \mathbf{W}_j \mathbf{y} = \mathbf{y}^H \mathbf{W}_j \mathbf{y}$, já que $\mathbf{W}_j$ é hermitiana e idempotente. Para dois vetores arbitrários $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, ambos de dimensão $N_R \times 1$, pode-se computar:

$$\mathbf{f}^H \mathbf{W}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{f}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{g} + \frac{(\mathbf{f}^H \mathbf{c} - \mathbf{f}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{c})(\mathbf{c}^H \mathbf{g} - \mathbf{c}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{g})}{\|\mathbf{c}\|^2 - \mathbf{c}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}}. \quad (\text{F-2})$$

Para o caso especial em que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, obtém-se:

$$\mathbf{f}^H \mathbf{W}_{\mathbf{A}} \mathbf{f} = \mathbf{f}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{f} + \frac{|\mathbf{c}^H \mathbf{f} - \mathbf{c}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{f}|^2}{\|\mathbf{c}\|^2 - \mathbf{c}^H \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \mathbf{c}}. \quad (\text{F-3})$$

Transportando estas expressões para o problema de detecção em (5-12), o número de passos de recursão que empregam (F-2) e (F-3) é igual ao número de antenas ativas, N_A . A seguir, é apresentado o desenvolvimento para obtenção de $\|\mathbf{W}_j \mathbf{y}\|^2$, que realiza a projeção em um subespaço de três dimensões ($N_A = 3$).

Considere a j -ésima matriz projetora, $\mathbf{W}_j$, uma componente do banco de filtros para a detecção da combinação de antenas transmissoras. Esta matriz projeta vetores no $\mathbb{C}^{N_R}$ no subespaço gerado pela matriz de canal que se forma pelo uso da j -ésima combinação de antenas, $\mathbf{H}_j = [\mathbf{h}_1^{(j)} \ \mathbf{h}_2^{(j)} \ \mathbf{h}_3^{(j)}]$, sendo $\mathbf{h}_i^{(j)}$ a i -ésima coluna de $\mathbf{H}_j$. Define-se então, a equivalência entre as notações para a matriz projetora apresentada: $\mathbf{W}_j \triangleq \mathbf{W}_{1,2,3}^{(j)}$. Empregando as expressões

recursivas, $\|\mathbf{W}_j \mathbf{y}\|^2$ é desenvolvido como:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_j \mathbf{y}\|^2 &= \mathbf{y}^H \mathbf{W}_{1,2,3}^{(j)} \mathbf{y} = \mathbf{y}^H \mathbf{W}_{1,2}^{(j)} \mathbf{y} + \frac{|\mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{y} - \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_{1,2}^{(j)} \mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{h}_3^{(j)}\|^2 - \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_{1,2}^{(j)} \mathbf{h}_3^{(j)}}, \\ &= e_{1,2}^{(y)} = e_{1,2}^{(y)} + \frac{|\mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{y} - d_{1,2}^{\mathbf{h}_3}|^2}{\|\mathbf{h}_3^{(j)}\|^2 - e_{1,2}^{\mathbf{h}_3}}, \end{aligned} \quad (\text{F-4})$$

sendo $\mathbf{W}_{1,2}^{(j)}$ a matriz projetora no espaço gerado pelas colunas $\mathbf{h}_1^{(j)}$ e $\mathbf{h}_2^{(j)}$ de $\mathbf{H}_j$. Caminhando um nível na recursão, $e_{1,2}^{(y)}$, $d_{1,2}^{\mathbf{h}_3}$ e $e_{1,2}^{\mathbf{h}_3}$ são calculados como:

$$\begin{aligned} e_{1,2}^{(y)} &= \mathbf{y}^H \mathbf{W}_{1,2}^{(j)} \mathbf{y} = \mathbf{y}^H \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y} + \frac{|\mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{y} - \mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{h}_2^{(j)}\|^2 - \mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2^{(j)}}, \\ &= e_{1,2}^{(y)} = e_1^{(y)} + \frac{|\mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{y} - d_1^{\mathbf{h}_2}|^2}{\|\mathbf{h}_2^{(j)}\|^2 - e_1^{\mathbf{h}_2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{1,2}^{\mathbf{h}_3} &= \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_{1,2}^{(j)} \mathbf{y} = \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y} + \frac{(\mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{h}_2^{(j)} - \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2^{(j)}) (\mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{y} - \mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y})}{\|\mathbf{h}_2^{(j)}\|^2 - \mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2^{(j)}}, \\ &= d_{1,2}^{\mathbf{h}_3} = d_1^{\mathbf{h}_3} + \frac{(\mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{h}_2^{(j)} - d_1^{\mathbf{h}_3 \mathbf{h}_2}) (\mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{y} - d_1^{\mathbf{h}_2})}{\|\mathbf{h}_2^{(j)}\|^2 - e_1^{\mathbf{h}_2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{1,2}^{\mathbf{h}_3} &= \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_{1,2}^{(j)} \mathbf{h}_3^{(j)} = \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_3^{(j)} + \frac{|\mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{h}_2^{(j)} - \mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2^{(j)}|^2}{\|\mathbf{h}_2^{(j)}\|^2 - \mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2^{(j)}}, \\ &= e_{1,2}^{\mathbf{h}_3} = e_1^{\mathbf{h}_3} + \frac{|\mathbf{h}_3^{(j)H} \mathbf{h}_2^{(j)} - e_1^{\mathbf{h}_3 \mathbf{h}_2}|^2}{\|\mathbf{h}_2^{(j)}\|^2 - e_1^{\mathbf{h}_2}}. \end{aligned}$$

O cálculo da matriz projetora é finalizado com as expressões de $e_1^{(y)}$, $e_1^{\mathbf{h}_2}$, $e_1^{\mathbf{h}_3}$, $e_1^{\mathbf{h}_3 \mathbf{h}_2}$, $d_1^{\mathbf{h}_2}$ e $d_1^{\mathbf{h}_3}$:

$$\begin{aligned} e_1^{(y)} &= \mathbf{y}^H \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y} = \frac{|\mathbf{h}_1^{(j)H} \mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{h}_1^{(j)}\|^2}, \\ e_1^{\mathbf{h}_2} &= \mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2 = \frac{|\mathbf{h}_2^{(j)H} \mathbf{h}_1|}{\|\mathbf{h}_1^{(j)}\|^2}. \end{aligned}$$

$$e_1^{\mathbf{h}_3} = \mathbf{h}_3^{(j)\text{H}} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_3 = \frac{|\mathbf{h}_3^{(j)\text{H}} \mathbf{h}_1|^2}{\|\mathbf{h}_1^{(j)}\|^2}.$$

$$e_1^{\mathbf{h}_3 \mathbf{h}_2} = \mathbf{h}_3^{(j)\text{H}} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{h}_2 = \frac{(\mathbf{h}_3^{(j)\text{H}} \mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_2^{(j)\text{H}} \mathbf{h}_1)}{\|\mathbf{h}_1^{(j)}\|^2}.$$

$$d_1^{\mathbf{h}_2} = \mathbf{h}_2^{(j)\text{H}} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y} = \frac{(\mathbf{h}_2^{(j)\text{H}} \mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_1^{(j)\text{H}} \mathbf{y})}{\|\mathbf{h}_1^{(j)}\|^2}.$$

$$d_1^{\mathbf{h}_3} = \mathbf{h}_3^{(j)\text{H}} \mathbf{W}_1^{(j)} \mathbf{y} = \frac{(\mathbf{h}_3^{(j)\text{H}} \mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_1^{(j)\text{H}} \mathbf{y})}{\|\mathbf{h}_1^{(j)}\|^2}.$$

A combinação destas expressões em (F-4) permite o cálculo de $\|\mathbf{W}_j \mathbf{y}\|^2$. O cálculo de $\|\mathbf{W}_l \mathbf{y}\|^2$, para $l \neq j$, pode ser simplificado desde que $\mathbf{H}_j$ e $\mathbf{H}_l$ possuam colunas em comum. Neste caso, os termos $e_z^{\mathbf{h}_x}$ podem ser aproveitados nos cálculos da nova matriz de projeção.

G

Interpretação algébrica para o ganho de codificação baseado no ângulo entre subespaços vetoriais

Considere os subespaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de um espaço $\mathbb{C}^n$, e assuma que a dimensionalidade destes é dada por:

$$p = \dim(\mathcal{F}) \geq \dim(\mathcal{G}) = q. \quad (\text{G-1})$$

O menor ângulo θ_1 entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ equivale ao ângulo entre algum par de vetores $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, pertencentes a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, tal que seu cosseno é dado por:

$$\cos(\theta_1) = \max_{\substack{\mathbf{f} \in \mathcal{F} \\ \mathbf{g} \in \mathcal{G}}} \mathbf{f}^H \mathbf{g}, \quad (\text{G-2})$$

considerando $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ vetores de norma unitária. Assuma então que o valor máximo de (G-2) seja alcançado para $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$ e $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1$. Considere então que θ_2 é definido como o menor ângulo entre o complemento ortogonal de $\mathcal{F}$ em relação a $\mathbf{f}_1$ e o complemento ortogonal de $\mathcal{G}$ em relação a $\mathbf{g}_1$. A continuidade disto até que um dos subespaços tenha dimensão nula leva aos chamados ângulos principais. Os ângulos principais, $0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$, entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são recursivamente definidos para $k = 1, 2, \dots, q$ como:

$$\cos(\theta_k) = \max_{\substack{\mathbf{f} \in \mathcal{F} \\ \mathbf{g} \in \mathcal{G}}} \mathbf{f}^H \mathbf{g} = \mathbf{f}_k^H \mathbf{g}_k, \quad \|\mathbf{f}\| = 1, \|\mathbf{g}\| = 1, \quad (\text{G-3})$$

sujeito às restrições

$$\mathbf{f}_i^H \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{g}_i^H \mathbf{g} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Os vetores $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q)$ e $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q)$ são chamados vetores principais do par de subespaços. Os ângulos principais podem ser computados usando a fatorização QR seguido da decomposição em valores singulares (*singular value decomposition*, SVD) [77]. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times p}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times q}$ matrizes cujas combinações lineares das colunas geram os subespaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente.

Considere, então, a fatorização QR reduzida de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \underbrace{\mathbf{Q}_A}_{n \times p} \underbrace{\mathbf{R}_A}_{p \times p} \\ \mathbf{B} &= \underbrace{\mathbf{Q}_B}_{n \times q} \underbrace{\mathbf{R}_B}_{q \times q}.\end{aligned}\tag{G-4}$$

$\mathbf{Q}_A$ e $\mathbf{Q}_B$ formam bases unitárias para os subespaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. De acordo com [78], os valores singulares de $\mathbf{C} = \mathbf{Q}_A^H \mathbf{Q}_B$ correspondem aos cossenos dos ângulos principais. Assim, a decomposição SVD de $\mathbf{C}$ é dada por:

$$\mathbf{Q}_A^H \mathbf{Q}_B = \mathbf{Y} \mathbf{\Sigma} \mathbf{Z}^H = \sum_{k=1}^q \sigma_k \mathbf{y}_k \mathbf{z}_k^H.\tag{G-5}$$

Como $\|\mathbf{Q}_A^H \mathbf{Q}_B\|_F \leq 1$, os valores singulares, σ_k , estão entre 0 e 1. Assim, determina-se $\sigma_k = \cos(\theta_k)$. Por fim, o ângulo resultante entre um par de subespaços vetoriais, $\theta^{(R)}$, relaciona-se com os ângulos principais através de [79]:

$$\cos(\theta^{(R)}) = \prod_{k=1}^q \cos(\theta_k).\tag{G-6}$$

Estes resultados podem ser transportados para o problema do detector baseado no banco de matrizes projetoras. A tarefa de selecionar a combinação de antenas transmissoras que resulta na maior norma em (5-12) equivale ao problema de selecionar o subespaço vetorial com a menor distância a um vetor no espaço $\mathbb{C}^n$, que no problema de detecção GSM, corresponde ao vetor de dados recebido, $\mathbf{y}$. Sob a ótica da álgebra linear, verifica-se que este problema de decisão incorre em menos erros quanto mais afastados são os subespaços vetoriais considerados. Assim, no sistema GSM, ao se considerar uma realização da matriz $\mathbf{H}$ e um mapeamento de antenas Π que, por sua vez, definem uma configuração de N_C subespaços vetoriais associados às submatrizes $\mathbf{H}_j$ do canal, o desempenho do decisor BMP é influenciado pelo menor ângulo entre todos os pares de subespaços que compõem esta configuração, $\theta_{\min}$, ou seja:

$$\theta_{\min} = \min_{\substack{i,j=1,\dots,N_C \\ j \neq i}} \theta_{i,j}^{(R)},\tag{G-7}$$

sendo $\theta_{i,j}^{(R)}$ o ângulo resultante entre o par de subespaços i e j .

Experimentos numéricos foram conduzidos para avaliar a influência de di-

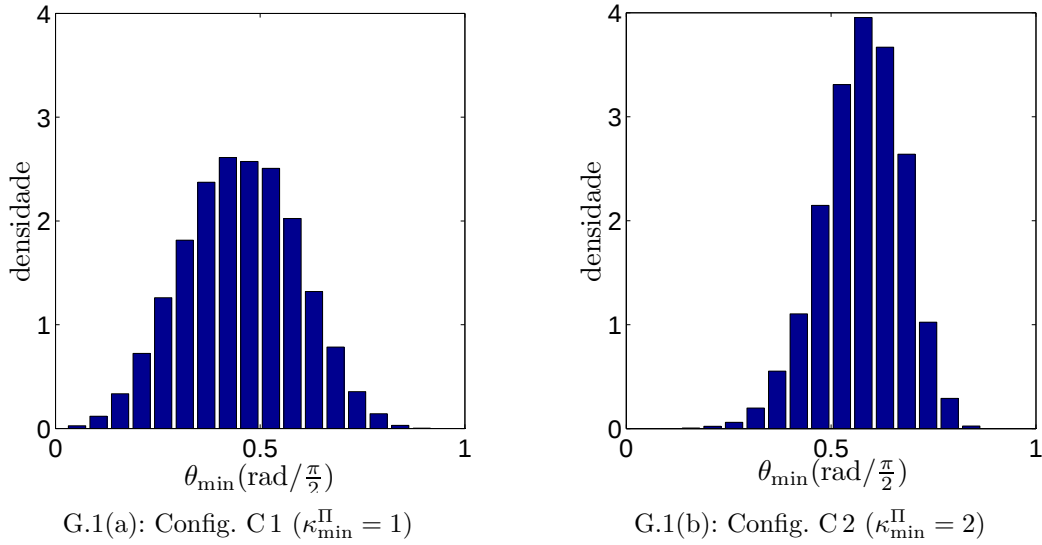


Figura G.1: Histogramas normalizados do ângulo mínimo entre os subespaços avaliados em configurações de sistema com diferentes distâncias mínimas de Hamming, calculados para 1×10^4 realizações de $\mathbf{H}$.

ferentes configurações de sistema no desempenho de decisão do detector BMP, em especial configurações que possuam combinações de antenas transmissoras com diferentes distâncias mínimas de Hamming, tais como as configurações usadas nos resultados da Fig. 5.2. Conforme verificado nos histogramas da Fig G.1, a configuração de melhor desempenho na Fig. 5.2 (configuração C 2) possui $\theta_{\min}$ em maior concentração em valores superiores àqueles da configuração de pior desempenho (configuração C 1). Isto deve-se ao fato de que mapeamentos de antenas com menores distâncias de Hamming compartilham bases ortogonais na formação de um maior número de subespaços vetoriais. Como pode-se verificar por (G-3), sempre que dois subespaços compartilham a mesma base, o respectivo ângulo principal é nulo. Como resultado, o termo $\cos(\theta_k) = 1$ em (G-6) deixa de contribuir para o aumento do ângulo resultante entre o par de subespaços. Este resultado impõe ao projetista do sistema de comunicação um compromisso entre o desempenho de detecção e o número de antenas a serem posicionadas no lado transmissor.

H

Expressões dos equalizadores lineares ZF e MMSE em receptores que empregam redução de reticulado (LR)

Seja $\mathbf{H}_k$, de dimensão $N_R \times N_A$, operada pela matriz inversível $N_A \times N_A$ $\mathbf{T}$, que transforma a matriz inicial em outra, com colunas aproximadamente ortogonais, $\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{T}$. O equalizador ZF do vetor recebido $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{z} + \mathbf{n}$, sendo $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{s}$, é expresso por $\mathbf{G}_{\text{ZF-LR}}$ e equivale à matriz pseudoinversa de $\tilde{\mathbf{H}}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{ZF-LR}} &= (\tilde{\mathbf{H}}_k^H \tilde{\mathbf{H}}_k)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_k^H \\ &= \left[(\mathbf{H}_k \mathbf{T})^H \mathbf{H}_k \mathbf{T} \right]^{-1} (\mathbf{H}_k \mathbf{T})^H \\ &= \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_k)^{-1} (\mathbf{T}^H)^{-1} \mathbf{T}^H \mathbf{H}_k^H \\ &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G}_{\text{ZF}}, \end{aligned} \quad (\text{H-1})$$

sendo $\mathbf{G}_{\text{ZF}} = (\mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^H$ o equalizador ZF do receptor sem LR.

O equalizador MMSE-LR, $\mathbf{G}_{\text{MMSE-LR}}$, é obtido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{MMSE-LR}} &= \arg \min_{\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{N_A \times N_R}} \mathbb{E} [\|\mathbf{z} - \mathbf{G} \mathbf{y}\|^2] \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{z} \mathbf{y}^H] \left(\mathbb{E} [\mathbf{y} \mathbf{y}^H] \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{H-2})$$

Desenvolvendo cada termo do produto separadamente, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{z} \mathbf{y}^H] &= \mathbb{E} \left[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{s} (\mathbf{H}_k \mathbf{s} + \mathbf{n})^H \right] \\ &= E_s \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}^H. \end{aligned} \quad (\text{H-3})$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} [\mathbf{y} \mathbf{y}^H] \right)^{-1} &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{H}_k \mathbf{s} + \mathbf{n}) (\mathbf{H}_k \mathbf{s} + \mathbf{n})^H \right]^{-1} \\ &= \left(E_s \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^H + N_0 \mathbf{I}_{N_R} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{H-4})$$

Sendo E_s a energia média do símbolo APSK e N_0 a variância do ruído branco,

a expressão do equalizador MMSE-LR é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\text{MMSE-LR}} &= E_s \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}_k^H \left(E_s \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^H + N_0 \mathbf{I}_{N_R} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}_k^H \left(\mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^H + \frac{N_0}{E_s} \mathbf{I}_{N_R} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (\text{H-5})$$

Aplicando a identidade $(\mathbf{I} + \mathbf{PQ})^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{QP})^{-1}$ [76], chega-se a:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\text{MMSE-LR}} &= \mathbf{T}^{-1} \left(\mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_k + \frac{N_0}{E_s} \mathbf{I}_{N_A} \right)^{-1} \mathbf{H}_k^H \\ &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G}_{\text{MMSE}},\end{aligned}\quad (\text{H-6})$$

sendo $\mathbf{G}_{\text{MMSE}} = \left(\mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_k + \frac{N_0}{E_s} \mathbf{I}_{N_A} \right)^{-1} \mathbf{H}_k^H$ o equalizador MMSE do receptor sem LR.

I

Equivalência entre as estratégias de ordenamento usando banco de matrizes projetoras e banco de filtros casados para a detecção GSM-OSTBC

Considere um sistema GSM no qual $\mathbf{y}$ corresponde ao vetor de dados observados na recepção, de dimensão $N_R \times 1$. A matriz do canal usada na transmissão corrente, $\mathbf{H}_k$, estruturado em colunas, tal que $\mathbf{H}_k = [\mathbf{h}_1^{(k)} \quad \mathbf{h}_2^{(k)} \quad \dots \quad \mathbf{h}_{N_A}^{(k)}]$, possui colunas ortogonais de norma $\|\mathbf{h}^{(k)}\|$, ou seja:

$$\mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_k = \|\mathbf{h}^{(k)}\|^2 \mathbf{I}_{N_A}. \quad (\text{I-1})$$

Esta característica da matriz do canal em (I-1) corresponde ao canal verificado no sistema equivalente dos sistemas GSM-OSTBC. Para o desenvolvimento apresentado no Capítulo 6, faz-se $N_A = 2$. Considere $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1}^{N_b}$ e $\{\mathbf{G}_i\}_{i=1}^{N_b}$ e o banco de filtros casados e matrizes projetoras aplicadas ao sistema GSM. As operações de ordenamento usando matrizes projetoras e filtros casados são, respectivamente, realizadas por:

$$\{p_1, p_2, \dots, p_{N_C}\} = \arg_{i=1,2,\dots,N_b}^{\text{sort}} \|\mathbf{F}_i \mathbf{y}\|^2 \quad (\text{I-2a})$$

$$\{p_1, p_2, \dots, p_{N_C}\} = \arg_{i=1,2,\dots,N_b}^{\text{sort}} \|\mathbf{G}_i \mathbf{y}\|^2 \quad (\text{I-2b})$$

A afirmativa de que os dois métodos de ordenamento são equivalentes significa dizer que:

$$\|\mathbf{F}_i \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{G}_i \mathbf{y}\|^2, \quad (\text{I-3})$$

para $i = 1, 2, \dots, N_b$. Os elementos $\mathbf{F}_i$ e $\mathbf{G}_i$ do banco de filtros-casados e matrizes projetoras são expressos, respectivamente, por:

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \mathbf{H}_i^H \quad (\text{I-4a})$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{H}_i (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^H \quad (\text{I-4b})$$

As normas em (I-3) podem ser expressas por:

$$\|\mathbf{F}_i \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^H (\mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_i) \mathbf{y} \quad (\text{I-5a})$$

$$\|\mathbf{G}_i \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^H (\mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i) \mathbf{y} \quad (\text{I-5b})$$

Expandindo $(\mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_i)$ em I-5a, escreve-se:

$$\mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_i = \frac{1}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \quad (\text{I-6})$$

Pelo desenvolvimento de $(\mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i)$ em I-5b, chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i &= \mathbf{H}_i (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^H \\ &= \mathbf{H}_i (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^H \\ &= \mathbf{H}_i (\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2 \mathbf{I}_2)^{-1} \mathbf{H}_i^H \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \end{aligned} \quad (\text{I-7})$$

A equivalência entre $\mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_i$ e $\mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i$ em (I-6) e (I-7) prova a veracidade de (I-3).