



**Rodrigo Pereira Carvalho**

## **Teorema de Pick**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Nicolau Saldanha

Rio de Janeiro

Abril 2015



**Rodrigo Pereira Carvalho**

## **Teorema de Pick**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Nicolau Saldanha**

Orientador  
Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Marcos Craizer**

Departamento de Matemática PUC-  
Rio

**Profa. Débora Mondaini**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Rogério Oliveira**

Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ

**Prof. Humberto Bortolossi**

Universidade Federal Fluminense – UFF

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico –  
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 09 de abril de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Rodrigo Pereira Carvalho**

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela UERJ (Universidade Estadual do Rio de Janeiro) em 2009. Especializou-se em Aprendizagem Matemática pelo programa de Pós-graduação do IME/UERJ em 2014. Atua como professor de Ensino Fundamental na Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, Ensino Médio na Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e em escolas particulares no ensino fundamental e médio.

### Ficha Catalográfica

Carvalho, Rodrigo Pereira

Teorema de Pink / Rodrigo Pereira  
Carvalho ; orientador: Nicolau Saldanha. – 2015.

61 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia  
Universidade Católica do Rio de Janeiro,  
Departamento de Matemática, 2015.

Inclui bibliografia

Dedico esta monografia a todos os que procuram fazer um bom trabalho no magistério e que com seriedade e paixão realizam suas atividades, mesmo com dificuldades e imprevistos na carreira. Pessoas que sabem de sua importância para a manutenção de civilidade dentro da sociedade.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me colocou em caminho de busca pelo conhecimento, o qual tenho tentado seguir mesmo com todos os obstáculos impostos pela vida. Em seguida agradeço a minha esposa que me entendeu e me apoiou em minhas pesquisas, ao meu orientador Nicolau Saldanha, que com muita paciência me norteou neste trabalho e muito me acrescentou e aos professores que participaram da banca e muito acrescentaram para esta versão final com as devidas alterações pertinentes a proposta do trabalho. Agradeço ainda a agência de fomento CAPES pela bolsa de estudos e também a PUC-Rio.

## Resumo

Carvalho, Rodrigo Pereira; Saldanha, Nicolau (Orientador). **Teorema de Pick**. 61p. Rio de Janeiro, 2015. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O estudo de geometria, em particular área de polígonos simples, é pouco trabalhado em sala de aula, sendo assim o presente trabalho tem como finalidade apresentar o Teorema de Pick, com algumas demonstrações, como ferramenta de cálculo de área. Atenção especial é necessária para polígonos simples mas não necessariamente convexos. Além disso discutimos outros Teoremas relacionados, como Jordan e Euler. Espera-se que esta pesquisa se some a outras no sentido de contribuir para o ensino de matemática de forma qualitativa, podendo se utilizar de técnicas aqui abordadas ou ainda serem adaptadas às diversas realidades para o seu melhor aproveitamento.

## Palavras-chave

Teorema de Pick; Teorema de Euler; Teorema de Jordan; Geometria e Combinatória; Área de Polígonos.

## Abstract

Carvalho, Rodrigo Pereira; Saldanha, Nicolau (Advisor). **Pick's Theorem**. 61p. Rio de Janeiro, 2015. MSc. Dissertation - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The study of plane geometry, in particular the computation of areas of simple polygons, is little explored in the classroom. Our aim here is to state and prove Pick's Theorem. We also present several examples and more than one proof. Simple polygons (which are not necessarily convex) receive special attention. We also consider some related results, such as the theorems of Jordan and Euler. It is hoped that this research will contribute to the teaching of mathematics in a qualitative way.

## Keywords

Pick's Theorem; Euler's theorem; Theorem of Jordan; Geometry and Combinatorial; Polygons area.

## Sumário

1 . Introdução	11
2 . Contextualização Histórica	12
2.1. Situação hipotética	13
2.2. Localização de um ponto no plano	14
2.3. Problema introdutório	15
3. Linha fechada simples	24
3.1. Teorema de Jordan	24
3.2. Polígonos	25
4. Teorema de Pick	28
4.1. Rede ou malha sobre o plano	28
4.2. Definição	28
4.2.1. Lema 1	29
4.2.2. Lema 2	36
4.2.3. Lema 3	40
4.2.4. Lema 4	42
4.2.5. Teorema de Pick	45
4.2.5.1. demonstração 1	47
5. Análises posteriores	49
5.1. Teorema 4	49
5.1.1. Esboço de outra demonstração	50
5.2. Teorema de Euler	51
5.3. Grafos	52
5.4 . Teorema de Euler para grafos	53
5.5. Teorema de Pick para polígonos entrecruzados	53
6. Considerações Finais	60
7. Referências Bibliográficas	61

## Lista de figuras

Figura 1 – Seta	11
Figura 2 – Ponto no Plano	14
Figura 3 – Pontos nos quadrantes	15
Figura 4 – Triângulo	16
Figura 5 – Losango	16
Figura 6 – Triângulo com vértices no primeiro e segundo quadrantes	17
Figura 7 – Triângulos com um dos lados sobre o eixo	18
Figura 8 – Triângulo de vértice na origem e um lado paralelo ao eixo	18
Figura 9 – Triângulo de coordenadas distintas	19
Figura 10 – Triângulo de coordenadas distintas	20
Figura 11 - Trapézio	20
Figura 12 – Triângulo num mesmo quadrante	21
Figura 13 – Retângulo no primeiro quadrante	21
Figura 14 – Retângulo no segundo quadrante	22
Figura 15 – Retângulo sobre os eixos coordenados	22
Figura 16 – Curva fechada simples	24
Figura 17 – Linha poligonal simples	25
Figura 18 – Polígonos simples	26
Figura 19 – Figura plana	29
Figura 20 – Algoritmo de Euclides	30
Figura 21 – Triângulos primários	32
Figura 22 – Triângulo primário	33
Figura 23 – Paralelogramo primário	34
Figura 24 – Triângulo primário	35
Figura 25 – Cisalhamento do triângulo	35
Figura 26 – Segundo cisalhamento	35
Figura 27 – Último cisalhamento no plano	36
Figura 28 – Triângulos com pontos sobre o plano	37
Figura 29 – Triângulos ligados pelo vértice oposto	38
Figura 30 – Pontos no interior do triângulo	39
Figura 31 – Triângulos com ponto interior e sobre o lado oposto	39

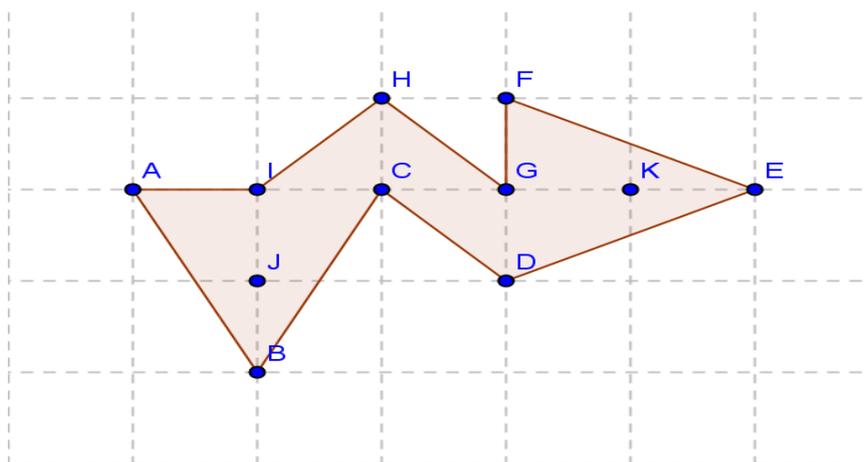
Figura 32 – Poligonal simples	43
Figura 33 – Figura plana	43
Figura 34 - Diagonal	44
Figura 35 – Primeira impossibilidade da diagonal	44
Figura 36 – Segunda impossibilidade da diagonal	45
Figura 37 – Terceira impossibilidade da diagonal	45
Figura 38 – Polígonos de coordenadas inteiras	46
Figura 39 – Polígono de coordenadas inteiras no plano	47
Figura 40 – Pontos na malha quadriculada	50
Figura 41 – Posição do ponto na malha	50
Figura 42 – Esboço da cidade	51
Figura 43 – Grafos planares	52
Figura 44 – Polígonos simples e não simples	54
Figura 45 – Hexágono não simples	55
Figura 46 – Pentágono simples e triângulo	55
Figura 47 – Heptágono não simples	56
Figura 48 – Quadrilátero simples e triângulos	57
Figura 49 – Octógono não simples	58
Figura 50 – Pontos nos quadrantes	58

## 1 Introdução

O presente trabalho consiste em apresentar um breve histórico sobre Georg Pick, algumas demonstrações de seu Teorema e enunciar alguns outros relacionados, como o Teorema de Euler para Grafos e também o Teorema de Jordan. Proponho exercícios com finalidade de desenvolver uma interação do leitor com o conteúdo abordado.

A proposta desses exercícios é estabelecer um elo entre o conceito, a utilização e o conhecimento, explorando, em muitos casos, o aspecto geométrico, que determina o cálculo exato de áreas de polígonos, do dito teorema: dado um polígono construído sobre uma malha onde seus vértices são pontos desta malha, sejam  $A$  os pontos desta malha em seu interior e  $B$  os pontos sobre o seu bordo então a área deste é dada por:  $A + B/2 - 1$ .

Por exemplo, na figura a seguir temos 9 pontos sobre o bordo e 2 pontos internos, logo a área desta é dado por:  $2 + 9/2 - 1 = 5,5$



**Figura 1 – Seta**

Por fim tento mostrar meios facilitadores visando trabalhar com o teorema de Pick utilizando conceitos de matemática básica, principalmente, sendo o fator de maior relevância para o processo ensino-aprendizagem, que é de extrema importância tendo como foco central o entendimento do leitor, assim há aqui uma boa ferramenta que motivará o aprendizado.

## 2 Contextualização histórica

Georg Alexander Pick nasceu em uma família judaica em 1859, na Áustria, sua mãe se chamava Josefa Schleisinger e seu pai se chamava Adolf Josef Pick. Sua formação inicial foi dada pelo seu pai em casa até os onze anos de idade, após isso foi estudar no Leopoldstaedter Communal Gymnasium, onde permaneceu até se qualificar em 1875 para entrar em uma universidade.

Estudou na Universidade de Viena onde se formou em física e matemática, onde também conquistou o título de Doutor em Matemática, com a tese sobre uma classe de integrais abelianos. Tornou-se professor na Universidade Alemã em Praga, onde lecionava e estudava sobre assuntos diversos, principalmente relacionados com matemática e física. Foi um dos professores de Einstein.

Tornou-se um matemático renomado, tendo sido eleito membro da Academia Tcheca de Ciências e Artes de onde foi expulso quando os nazistas invadiram a Áustria, e conhecido no seu tempo por se destacar de forma espetacular no que diz respeito ao cálculo. Em 1881 publicou uma Tese de habilitação para palestras Sobre a Integração diferenciais hiperelípticos por logaritmos.

Após muitos anos de estudos destas interpretações geométricas, Georg Alexander Pick organizou seus resultados e escreveu alguns teoremas, sendo que alguns são relacionados com análise complexa.

Ele se aposentou em 1929 quando foi morar em Viena, mas quando a Áustria foi ocupada, durante a Segunda Guerra Mundial, ele partiu para Praga. Em 1942, foi capturado e deportado juntamente com muitos Judeus para o campo de concentração em Theresienstadt onde veio a falecer. Não se sabe muito sobre seu falecimento. Um fato muito triste e de grande perda para a humanidade.

Após termos conhecido um pouco da história do autor de teorias tão grandiosas e valiosas para o desenvolvimento científico daquela época e de estudos até hoje desenvolvidos principalmente na área do estudo dos complexos, podemos dar prosseguimento.

Posteriormente estudaremos os polígonos, que é o assunto principal neste trabalho. Com as definições e características pertinentes para utilização do

Teorema de Pick, para o cálculo de área, que é o objeto de estudo na qual está baseada toda a estrutura do mesmo.

A seguir veremos uma situação que motivou a pesquisa.

## **2.1. Situação hipotética**

Durante uma aula no ensino fundamental, a qual o assunto central era sobre área, um aluno perguntou ao professor se existia uma maneira de calcular áreas de figuras com formatos estranhos, mesmo que seus lados fossem segmentos de reta. O professor disse que sim, "bastava recortar a figura em formas conhecidas como triângulos, por exemplo". Nesse momento ele perguntou se haveria outra maneira, o professor disse não saber e a partir disso começou a tratar de investigar sobre tal informação.

Em sua procura, após algumas buscas, o professor deparou-se com o Teorema de Pick. Infelizmente já havia terminado o ano letivo quando o encontrou, portanto a resposta para o aluno não foi dada. Pode até ser que este aluno nem se lembre mais da pergunta feita durante aquela aula, mas a sensação de busca pelo conhecimento só aumentou depois desta pergunta sem resposta precisa.

(Relato de um professor que não quis se identificar).

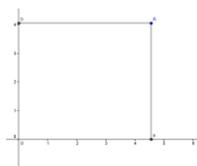
Este é o fato desencadeador, ou motivador, dessa apresentação sobre o teorema de Pick, o qual será descrito neste trabalho para que sirva como referência e fonte de pesquisa para professores e estudantes de matemática, de nível básico ou superior. Pois quando há curiosidade por parte do discente, o professor deve dar o devido esclarecimento, com a maior profundidade possível (respeitando os limites do conhecimento) e com profundidade adequada para que o aluno seja capaz de entender a resposta, com intuito de alavancar a curiosidade das mentes do amanhã.

Uma frase que se ouviu durante algum tempo foi: "*Não são as respostas, mas sim as perguntas que movem o mundo*", e esta é uma realidade inerente ao ser humano. Quanto mais nos deparamos com questionamentos relacionados a coisas e fatos de diferentes realidades mais buscamos as mudanças e o conhecimento

(entendimento) através de questionamentos, muito dos quais não há sempre uma resposta.

## 2.2. Localização de um ponto no plano

Dado um ponto no plano cartesiano este tem duas projeções ortogonais. Passando por ele uma reta paralela ao eixo Vertical (Y) esta se intercepta com o eixo X em um valor denominado abscissa e, passando por ele uma reta paralela ao eixo horizontal (X) esta se intercepta com o eixo Y, ordenada no eixo Vertical (Y). Assim um ponto no plano fica localizado com sua representação ortogonal nos eixos coordenados.

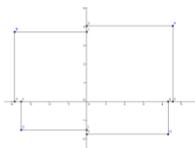


**Figura 2 – Ponto no Plano**

Como vimos no exemplo acima o ponto A do plano fica determinado com suas projeções ortogonais a em X e b em Y, ou seja, o ponto A tem abscissa a e ordenada b, sendo estas representações de números reais, e isso é o suficiente para determinar a posição de qualquer ponto no plano.

O plano é dividido pelo eixo vertical e pelo eixo horizontal em quatro regiões denominadas quadrantes, e esses são caracterizados pelos pontos neles contidos.

O primeiro deles é o qual apresenta somente valores positivos para as coordenadas dos pontos nele contidos. O segundo deles é o qual apresenta somente valores positivos para a ordenada e negativos para abscissa dos pontos nele contidos. O terceiro deles é o qual apresenta somente valores negativos para as coordenadas dos pontos nele contidos. O quarto deles é o qual apresenta somente valores negativos para a ordenada e positivos para abscissa dos pontos nele contidos.



**Figura 3 – Pontos nos quadrantes**

Podemos observar o exemplo acima considerando o parágrafo anterior a localização dos pontos A, B, C e D, no primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrante respectivamente, pois o ponto A têm coordenadas positivas, o ponto B têm ordenada positiva e abscissa negativa, o ponto C têm coordenadas negativas e o ponto D têm ordenada positiva e abscissa negativa.

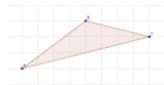
A seguir veremos um problema que está bem relacionado com o Teorema de Pick.

### 2.3.

#### **Problema introdutório**

Mostre que: se os vértices de um triângulo têm coordenadas inteiras então sua área é a metade de um número inteiro positivo, ou seja, um número racional.

Solução:



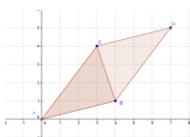
**Figura 4–Triângulo**

Uma maneira de se provar isso é com a utilização de vetores, como segue:

Sejam os vértices  $A (x_1, y_1)$   $B (x_2, y_2)$   $C (x_3, y_3)$ , de coordenadas inteiras, então os vetores  $AB$  e  $AC$  também tem coordenadas inteiras, pois  $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  e a diferença de inteiros é um inteiro, analogamente  $AC = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ .

$AB = (a, b)$  e  $AC = (c, d)$ , todas as coordenadas inteiras.

E podemos entender a área do triângulo  $ABC$ , como sendo a metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores  $AB$  e  $AC$ , e este sabemos calcular como o módulo do produto vetorial.



**Figura 5 – Losango**

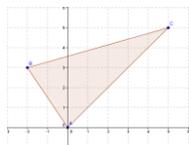
$|AB \times AC| = |ad - bc|$ , que é um número inteiro e denota a área do paralelogramo que é o dobro da área do triângulo pedido.

E a área do triângulo pedido continua sendo inteiro se a área do paralelogramo for par, pois para a área do triângulo este número será dividido por dois. Será a metade do valor encontrado para a área do paralelogramo. Caso o

resultado não seja par a área do triângulo não será um inteiro, mas será metade de um número ímpar, ou seja, um racional. De toda forma o valor da área do triângulo é representado por um número racional, como queríamos demonstrar.

Outra Solução:

Podemos supor sem perda de generalidade que um dos vértices está na origem do sistema de coordenadas, A (0,0) e os outros dois B ( $x_2$ ,  $y_2$ ) C ( $x_3$ ,  $y_3$ ), de tal forma que  $y_2$  e  $y_3$  são não negativos, de coordenadas inteiras, onde os segmentos AB e AC estão no primeiro ou no segundo quadrante ou sobre os eixos coordenados.

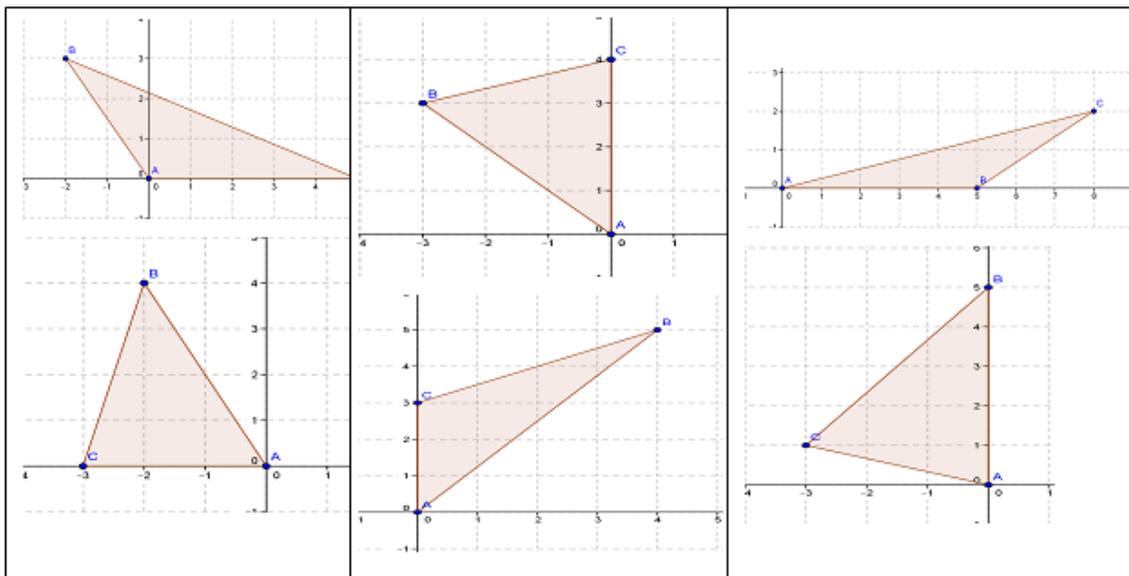


**Figura 6 – Triângulo com vértices no primeiro e segundo quadrantes**

Temos nesse momento seis possibilidades para os segmentos AB e AC, ou eles estão sobre um dos eixos coordenados, ou estão sobre um dos dois quadrantes, primeiro ou segundo. As possibilidades são: os dois estarem sobre os eixos coordenados; um estar sobre um eixo e o outro estar no primeiro quadrante, ou no segundo; os dois estarem no primeiro quadrante, ou no segundo; os dois estarem em quadrantes distintos.

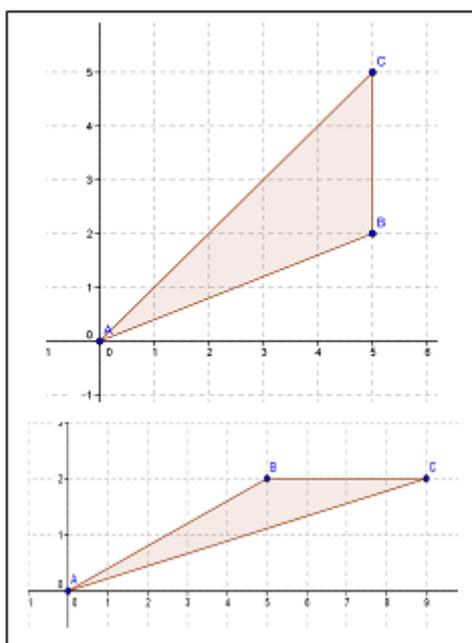
Se AC estiver sobre o eixo das abscissas, então a área será dada por  $|y_2 \cdot x_3|/2$ , base vezes altura relativa a esta base sobre dois, analogamente se estiver sobre o eixo das ordenadas teremos a área dada por  $|y_3 \cdot x_2|/2$ . Do mesmo modo se AB estiver sobre o eixo das abscissas teremos  $|y_3 \cdot x_2|/2$ , base vezes altura sobre dois,

analogamente se estiver sobre o eixo das ordenadas teremos a área dada por  $|y_2 \cdot x_3|/2$ .



**Figura 7 – Triângulos com um dos lados sobre o eixo**

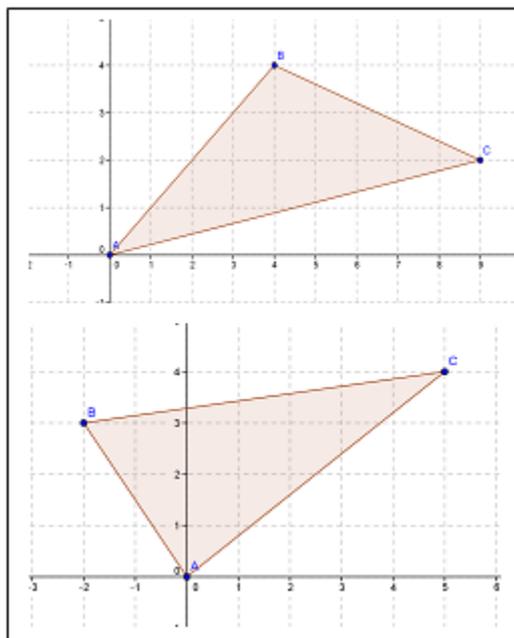
Se ambos tiverem uma mesma coordenada em X, significa que o triângulo possui o lado BC paralelo ao eixo Y, então, basta calcular  $|y_3 - y_2| \cdot x_2/2$ , onde o módulo da diferença das coordenadas em Y delimita o comprimento da base, e a coordenada  $x_3 = x_2$  em módulo representa a altura do triângulo. Analogamente se faz quando  $y_3 = y_2$ , toma-se a base como sendo, em módulo,  $x_3 - x_2$  e a altura  $y_3$ .



**Figura 8 – Triângulo de vértice na origem e um lado paralelo ao eixo**

**Caso os pontos B e C não tenham a mesma coordenada nem em X nem em Y, então podemos ainda ter um dos casos em que o segmento AC esteja em um dos dois quadrantes e com isso teremos dois casos para pensar que são:**

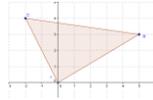
Se o segmento se encontra no mesmo quadrante de AB, ou no quadrante vizinho.



**Figura 9 – Triângulo de coordenadas distintas**

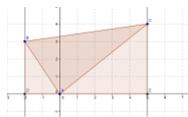
Pensemos da seguinte forma, eles têm as coordenadas distintas, caso contrário, seria o mesmo ponto e não teríamos um triângulo, pois as situações onde eles têm uma coordenada em comum já foram analisadas.

No caso em que os lados AB e AC estão em quadrantes vizinhos, podemos proceder como segue:



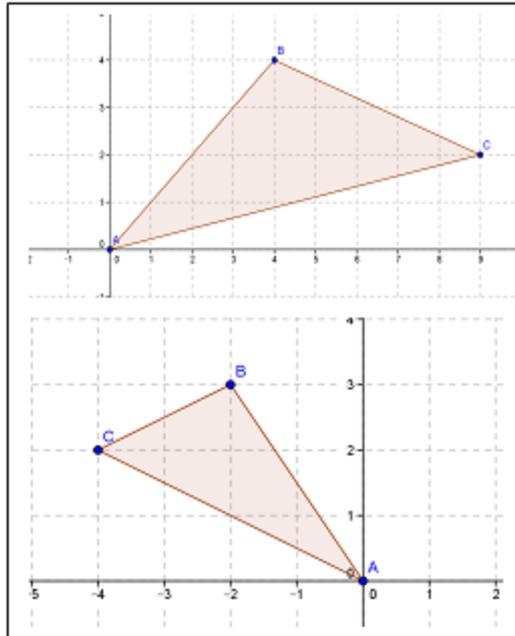
**Figura 10 – Triângulo de coordenadas distintas**

Passando por C uma reta paralela ao eixo Y e passando por B uma reta paralela ao eixo X teremos um trapézio retângulo delimitado pelas retas paralelas ao eixo Y, pelo eixo X e pelo lado BC do triângulo ABC, onde as bases têm medidas  $y_3$  e  $y_2$  e a altura deste trapézio é dada por  $(|x_3 - x_2|)$ . Retirando deste trapézio os triângulos de bases  $|x_3|$  e  $|x_2|$  e alturas relativas a essas bases  $y_3$  e  $y_2$ , respectivamente, teremos a área do triângulo ABC. Como as operações aqui descritas de subtração, multiplicação e divisão (por 2) de inteiros onde certamente o resultado, que é a área do triângulo, é um racional.



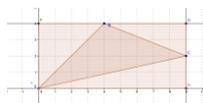
**Figura 11 - Trapézio**

No caso em que os lados AB e AC estão no mesmo quadrante, podemos proceder supondo que  $x_3$  seja maior que  $x_2$ , em módulo, da seguinte forma:

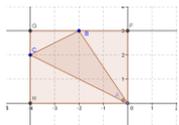


**Figura 12 – Triângulo num mesmo quadrante**

Passando por C uma reta paralela ao eixo Y e passando por B, se este possuir ordenada maior que a ordenada de C, uma reta paralela ao eixo X teremos um retângulo delimitado pelas retas paralelas ao eixo Y e ao eixo X e pelos próprios eixos coordenados, onde os lados têm medidas  $x_3$  e  $y_2$  e agora teremos que retirar os triângulos retângulos que compõem este retângulo para descobrir a área do triângulo ABC. Logo a área é dada por:



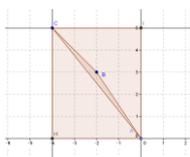
**Figura 13 – Retângulo no primeiro quadrante**



**Figura 14 – Retângulo no segundo quadrante**

$$|x_3| \cdot y_2 - (|x_3| \cdot y_3 - y_2 \cdot |x_2| - (|x_3 - x_2| \cdot |y_3 - y_2|))/2.$$

Por outro lado o ponto B poderia possuir ordenada menor que a ordenada de C, então teríamos que passar por C uma reta paralela ao eixo X e outra paralela ao eixo Y, logo formaríamos um retângulo de área  $|x_3| \cdot y_3$  e deste retiraríamos os triângulos de bases  $|x_3|$ ,  $|x_3|$  e  $y_3$  e alturas relativas a essas bases  $y_3$ ,  $y_2$  e  $|x_2|$ , respectivamente. Como as operações aqui descritas de subtração, multiplicação e divisão de inteiros onde certamente o resultado, que é a área do triângulo ABC, é um racional, concluímos que a área pedida é sempre um racional, como queríamos demonstrar.



**Figura 15 – Retângulo sobre os eixos coordenados**

Podemos aqui pensar como seria provar a mesma situação para a área de um pentágono, por exemplo. Claro que conseguiríamos provar, mas como ficou bem longa a segunda demonstração podemos ter uma ideia de como proceder desta forma para polígonos, um processo quase que inviável de fato muito trabalhoso. Por outro lado podemos pensar em outras maneiras de se trabalhar com problemas deste tipo.

E este problema nos auxilia a entender um teorema interessante na matemática, o Teorema de Pick, que é o tema central deste trabalho. Veremos a seguir dois teoremas que a princípio não estão relacionados diretamente com os teoremas de Pick, mas na verdade estes estão bem interligados especialmente o que diz respeito ao teorema central deste trabalho.

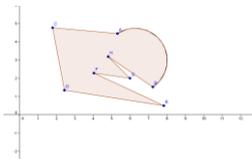
### 3 Linha fechada simples

#### 3.1. Teorema de Jordan

Toda curva fechada simples em um plano divide-o em duas partes, interior e exterior a curva fechada dada.

Aqui não faremos uma demonstração deste argumento, mas elucidaremos a ideia do mesmo, que consiste tão somente em relatar o fato de em qualquer curva descrita em um plano diremos curva fechada se e somente se a região composta entre os segmentos (aqui entendidos como partes, podendo ser, por exemplo, partes de uma circunferência) da curva e todo o restante do plano sejam conjuntos disjuntos, ou seja, todo e qualquer ponto do plano que não pertence ao interior da curva só pode ser externo. Ou seja, um ponto só pode pertencer à parte de dentro da curva ou ser externa, exterior a curva exclusivamente.

Neste trabalho estamos interessados na região interna da curva fechada no plano.



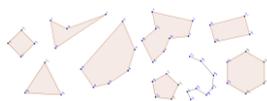
**Figura 16 – Curva fechada simples**

## Polígonos

Considerando  $n$  ( $n \geq 3$ ) pontos em sequência de um plano, onde três consecutivos quaisquer não são colineares, em qual dois consecutivos sempre e somente são ligados por um segmento de reta. Chamamos de linha poligonal a forma feita por estes segmentos de reta e no caso desta linha for fechada, ou seja, há um segmento de reta que une o primeiro e o último ponto da linha poligonal a esta forma juntamente com seu interior denominamos polígono, e estes dois pontos primeiro e último também são considerados consecutivos.

O nome polígono significa muitos ou vários ângulos. Isso porque a figura formada possui muitos ângulos, no mínimo três em seu interior. E além dos ângulos no polígono há outros elementos de igual importância, são eles: os vértices (pontos em questão), arestas, ou lados (segmentos de reta que ligam vértices consecutivos).

A princípio estamos interessados em polígono simples e por um polígono simples entende-se um que é topologicamente equivalente a um círculo ou ainda, é tal que qualquer que seja a aresta deste polígono esta se intersecta somente com duas outras, únicas, arestas do polígono nos vértices comuns, ou seja, duas arestas não consecutivas, não se intersectam. A seguir alguns exemplos de polígonos simples e linha poligonal aberta simples.



**Figura 17 – Linha poligonal simples**

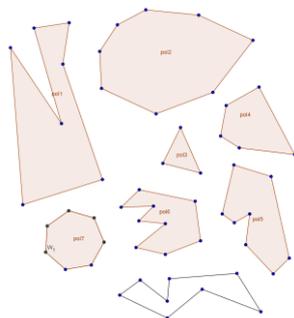
Os pontos destacados são os vértices e as regiões mais escuras, que são as partes internas dos polígonos, são as áreas de cada polígono simples.

Observação: A linha poligonal aberta não delimita uma região, por isso não possui área, pois é uma curva aberta, logo não se pode usar o Teorema de Jordan.

Na imagem anterior todas as linhas poligonais, com exceção da linha poligonal aberta, são polígonos simples. Estes são os quais estudaremos neste capítulo, eles podem ser classificados como convexo ou côncavo. Definiremos a seguir o que são polígonos convexos e polígonos côncavos de forma elementar.

Lembrando do fato, primeiramente, que toda reta contida em um plano divide-o em duas regiões denominadas semiplanos.

Polígono convexo é o polígono simples tal que a reta que contém qualquer uma de suas arestas faz com que todas as outras arestas estejam em um mesmo semiplano. Caso exista uma aresta do polígono simples tal que a reta que a contém não deixe totalmente as outras arestas em um mesmo semiplano então este é denominado côncavo.



**Figura 18 – Polígonos simples**

Destes polígonos simples, apenas os polígonos POL2, POL3, POL4 e POL7 são convexos, todos os outros polígonos são côncavos. Vale lembrar ainda que para estes é válido o teorema de Jordan visto anteriormente.

Relembraremos a seguir outro argumento bem caracterizado, a malha quadriculada, na utilização do teorema de Pick que é centro de nosso estudo.

## 4 Teorema de Pick

### 4.1. Rede ou malha sobre o plano

Por pontos de rede no plano entendemos como sendo as interseções das retas verticais com as retas horizontais do plano tomadas paralelas aos eixos coordenados, sendo as retas verticais obtidas com  $X=1, X=-1, X=2, X=-2, \dots$  e analogamente as retas horizontais obtidas fazendo o mesmo no eixo das ordenadas ou seja com ordenadas inteiras.

Outra maneira é tratar estes pontos supondo uma malha quadriculada ou mesmo uma rede de pesca, onde os pontos em questão são os nós da rede ou, no caso da malha, as interseções das retas verticais com as horizontais.

Estes pontos que denominamos aqui são os quais utilizaremos no Teorema de Pick.

### 4.2. Teorema de Pick

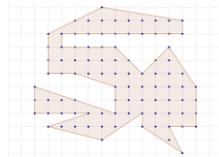
O Teorema de Pick relata um meio para calcular área de um polígono simples através da contagem de pontos. Basta que primeiramente este polígono esteja em um plano de coordenadas inteiras, os pontos em questão são estes contidos no polígono.

Os vértices do polígono devem ser pontos como os descritos anteriormente, ou seja, pontos de coordenadas inteiras, na realidade este é um critério para o teorema aqui descrito.

Os pontos do plano, em relação ao polígono, podem estar em seu interior, exterior, ou contidos na linha poligonal que delimita o polígono (em pelo menos uma de suas arestas). Os pontos que interessam para tal contagem são os interiores e os contidos em sua linha poligonal.

Sejam  $A$  o número de pontos contidos no interior do polígono e  $B$  o número de pontos contidos nas arestas do polígono então a área do polígono é dada por:  $A + (1/2) \cdot B - 1$ .

Agora poderemos calcular área de figuras planas com formatos diferentes como o da figura a seguir:



**Figura 19 – Figura plana**

De fato podemos determinar a área deste polígono simples, sendo o total de pontos internos 44 e o total de pontos sobre o bordo 50, que é dada por:  $44 + 50/2 - 1 = 44 + 25 - 1 = 68$

Podemos calcular a área do retângulo que envolve a figura e retirar deste os polígonos mais simples que estão entorno da figura para aferir a veracidade do Teorema para este polígono. Retirando do retângulo os triângulos, trapézios e retângulos menores temos:

$$11 \times 12 - 4 \times 2/2 - 6 \times 1/2 - 9 \times 1 - 2 \times 1 - 4 \times 2/2 - 2 \times 3/2 - 6 \times 1 - (6+3) \times 1/2 - 6 \times 2/2 - 3 \times 1/2 - 3 \times 1 - (2+1) \times 4/2 - (3+1) \times 3/2 - 3 \times 2/2 - (2+1) \times 2/2 = 68$$

A fim de facilitar o entendimento estabeleceremos aqui, a princípio, à área de um triângulo que tenha como vértice pontos de coordenadas inteiras, e estes são os únicos que pertencerão ao triângulo, não haverá mais (seja no bordo ou interior).

**Lema 1** - Dado um triângulo cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras e este não possui outros pontos deste tipo em seu bordo ou interior, então a área deste triângulo é  $1/2$  unidade de área. (Estes triângulos serão denominados primários).

Demonstração:

Consideremos um triângulo cujos vértices são:  $A = (0,0)$ ,  $B = (a, b)$  e  $C=(c, d)$ , que não tem nenhum outro ponto de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior. Sendo que todo e qualquer triângulo de coordenadas inteiras descrito no plano cartesiano, como vimos no exercício introdutório, pode ter seus vértices escritos desta forma, sendo um deles a origem do sistema.

Dizer que este triângulo não tem pontos de coordenadas inteiras em seu bordo quer dizer que não tem pontos em nenhum de seus lados, a não ser os vértices, e isso implica em dizer que  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , pois se  $\text{mdc}(a, b) = q$  ( $q$  diferente de 1) teríamos  $\text{mdc}(a, b) = q \cdot (\text{mdc}(r, s))$ , onde  $r$  e  $s$  são inteiros tais que  $a = q \cdot r$  e  $b = q \cdot s$ , deste modo teríamos o ponto  $Q = (r, s)$  sobre o lado  $AB$  do triângulo, pois neste caso o segmento  $AB$  seria múltiplo do segmento  $AQ$ .

A seguir ilustraremos as divisões consecutivas de  $a$  por  $b$ , sendo estes primos entre si, temos aqui uma mera ilustração algébrica do fato, pois pelo Algoritmo de Euclides, as divisões consecutivas chegam no máximo ao  $\text{mdc}$ , e isto ocorre quando o último resto for zero.

Divisor	Dividendo	Quociente	Resto
12	35	2	11
11	12	1	1
1	11	11	0

**Figura 20 – Algoritmo de Euclides**

Exemplo de um ponto  $B$  de coordenadas inteiras:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fazendo operações podemos fazer com que este ponto chegue ao ponto  $(1,0)$  como segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix}$$

Podemos entender o ocorrido aqui descrito como sendo uma transformada com operação matricial que corresponde aos cisalhamentos feitos no triângulo, como veremos a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ b \end{pmatrix}$$

Essa multiplicação refere-se a primeira divisão feita no algoritmo descrito acima, e a mesma corresponde a um cisalhamento feito no triângulo fazendo com que o vértice B passe para o ponto de coordenadas  $(r_1, b)$ . Continuando com os cisalhamentos, e tendo com isso a movimentação do vértice B sobre o plano até este estar sobre o ponto  $(1, 0)$  se  $\alpha$ , índice do resto na divisão, tiver ordem ímpar e  $(0, 1)$  se  $\alpha$  tiver ordem par, no algoritmo acima.

Sem perda de generalidade suponhamos que o vértice B' seja o ponto de coordenadas  $(1, 0)$  e agora podemos nos preocupar em onde estaria o vértice C, sabendo que o vértice C' está sobre o ponto de coordenadas  $(x, y)$ . Podemos traçar por A uma paralela a C'B' e por C' uma paralela a AB' e com isso determinar o ponto D', interseção das retas respectivamente paralelas aos lados AB' e C'B', formando um paralelogramo AB'C'D'.

A reta determinada por C'D' intersectará em algum ponto o eixo Y. Como esta reta é paralela ao eixo X e passa pelo ponto  $(x, y)$  logo o ponto da interseção

desta reta com o eixo Y será o ponto  $(0, y)$ , onde  $y$  é um número inteiro diferente de zero, ou seja  $|y| \geq 1$ , sendo  $|y|$  a altura do paralelogramo  $AB'C'D'$ .

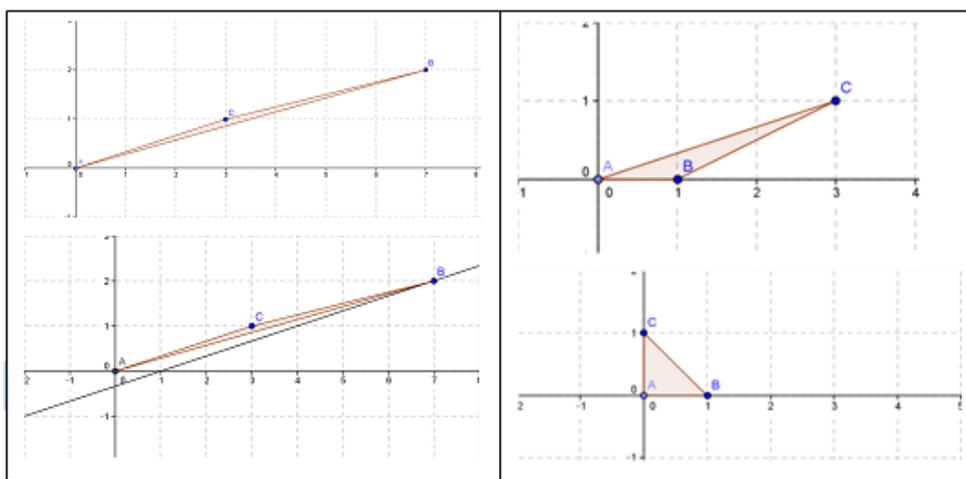
Queremos provar que  $|y|=1$ , pois caso contrário teríamos outros pontos de coordenadas inteiras sobre o triângulo  $AB'C'$ , o que é uma contradição, e para isso prosseguiremos da seguinte forma:

Tomando a reta  $s$  paralela ao eixo Y passando por  $B'$  e  $r$  paralela ao eixo X passando pelo ponto  $(0, a)$ , onde  $a=1$ , se  $y$  for positivo,  $a=-1$ , se  $y$  for negativo. A interseção das retas  $r$  e  $s$  determinam o ponto  $(1, a)$ , de coordenadas inteiras e se  $|y| > 1$  então este ponto fará parte do paralelogramo  $AB'C'D'$  ou o ponto  $(0, 1)$  ou o ponto  $(0, -1)$  fará parte de  $AB'C'D'$ , o que implica em existir ao menos um ponto de coordenadas inteiras no triângulo  $AB'C'$  além dos vértices, pois os triângulos  $AB'C'$   $AC'D'$  são congruentes, o que contradiz o fato de não existir outros pontos no triângulo  $AB'C'$ .

Portanto  $|y|=1$ , como queríamos demonstrar.

Vejamos, em um exemplo, para esclarecer o que ocorreria após as primeiras transformações do triângulo sendo feito alguns cisalhamentos.

Dado o triângulo de coordenadas  $A = (0, 0)$ ,  $B = (7, 2)$  e  $C = (3, 1)$ . Passando por  $B$  uma reta paralela ao lado  $AC$ , e fazendo percorrer, por esta reta, o ponto  $B$  até intersectar o eixo X no ponto  $(1, 0)$ , e isso equivale a efetuar uma divisão das coordenadas de  $B$  pelas coordenadas de  $C$ . Sendo neste caso, pensando em coordenadas temos:  $B = 2 \times C + (1, 0)$ . E isso pode ser entendido também como quantas vezes  $AC$  cabe em  $AB$  e quantas unidades sobram.



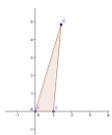
**Figura 21 – Triângulos primários**

Por fim passamos por C uma reta paralela a AB, novo, até encontrar o eixo Y no ponto (0, 1).

Suponhamos por absurdo que após os cisalhamentos, por algum motivo o vértice B chegue ao (1, 0) e o vértice C, não esteja sobre nenhuma das retas ditas anteriormente, paralela a X passando por (0, 1) ou (0, -1).

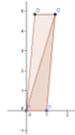
Traçando por C uma reta paralela a AB e passando por A uma reta paralela a BC, a interseção destas retas determina o ponto D, formando assim o paralelogramo ABCD, onde os lados AB e CD têm uma unidade de comprimento, o que é um absurdo, pois neste caso teríamos pelo menos mais um ponto no interior do triângulo ABC e do triângulo ADC (que são congruentes), e isso contradiz o fato de não haver pontos no interior do triângulo, ou mais pontos no seu bordo.

Logo o vértice C não distaria mais de uma unidade da reta AB e isso manteria o triângulo com área meio. Portanto não há outra hipótese para o vértice C a não ser que este esteja sobre uma das paralelas ao eixo X passando pelos pontos (0, 1), (0, -1). Para melhor ilustrar o fato segue uma possível posição do vértice C:



**Figura 22 – Triângulo primário**

Acima vimos um caso de onde poderia estar o vértice C e logo a seguir traçamos as paralelas aos lados AB e BC passando pelos vértices C e A, respectivamente.



**Figura 23 – Paralelogramo primário**

Portanto teremos uma situação plausível para o vértice C, que é estar sobre ponto (0, 1) determinando o triângulo ABC, que por sua vez tem metade da unidade de área.

Isso nos permite dizer que permanece  $\frac{1}{2}$  à área do triângulo, pois dois pontos do triângulo estão sobre a reta  $y=0$  (eixo horizontal) e o outro ponto está sobre a reta  $y=1$  ou  $y=-1$  linha horizontal. Fizemos uma ilustração do fato aqui descrito com um triângulo nas condições dadas.

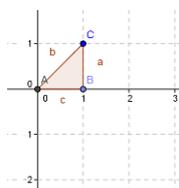
Analisando geometricamente o exemplo dado, passando por B uma reta paralela a AC encontramos o ponto de coordenadas inteiras (4, 1) fazendo um cisalhamento no vértice B “chegar” até este ponto. Seguidamente um novo cisalhamento em B até “chegar” no ponto (1, 0) e por fim um novo cisalhamento no vértice C até o ponto (0, 1).

De fato em todo triângulo que exista uma reta  $r$  paralela a reta  $s$  determinada pelos pontos (0, 0) e (a, b), que contenha o ponto (c, d), onde de coordenadas inteiras, observemos que  $r$  tem distância de uma unidade desta reta  $s$ , isto ocorre de tal forma que não há pontos de coordenadas inteiras nem no interior e nem no bordo do triângulo, de fato a área continua sendo  $\frac{1}{2}$ .

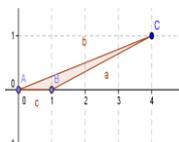
A área permanece inalterada se houver cisalhamento no ponto (a, b) para qualquer outro ponto (x,y), onde x, y são números inteiros, da reta  $r$ . Assim o triângulo após os cisalhamentos passa a ter coordenadas (0, 0), (1, 0) e (0, 1). Como para efeito de cálculo de área o sistema pode ser modificado para um novo

sistema de coordenadas, então está demonstrado que qualquer triângulo, nas condições dadas, tem área  $1/2$ .

A seguir uma ilustração do caminho inverso do que foi descrito acima.



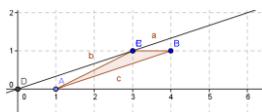
**Figura 24 – Triângulo primário**



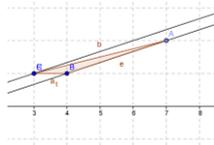
**Figura 25 –**

### **Cisalhamento do triângulo**

Neste caso a reta  $Y=1$  que é paralela ao eixo  $X$ , onde se encontra o ponto  $A$ , mantém a propriedade aqui descrita.



**Figura 26–Segundo cisalhamento**



**Figura 27 – Último cisalhamento no plano**

A seguir estudaremos algumas propriedades dos polígonos simples.

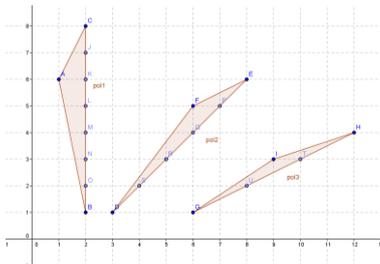
**Lema 2** - Todo triângulo no plano de vértices em  $\mathbb{Z}^2$  pode ser dividido em triângulos primários.

Demonstração:

Se o triângulo for o primário então não há o que demonstrar. Caso contrário o triângulo tem pontos em seu interior e (ou somente) sobre o seu bordo, além dos vértices.

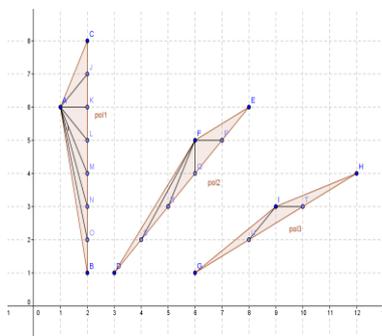
Primeiro suponhamos que há pontos somente no bordo do triângulo, ou seja, não há pontos em seu interior. Sendo assim tomemos o vértice oposto ao lado que tem pontos de coordenadas inteiras entre os vértices contidos nele, e tracemos segmentos de reta com uma extremidade em cada dos vértices e a outra no vértice oposto como ilustrado no triângulo a seguir.

Situação: o triângulo em um, único, dos três lados possui três ou mais pontos e nenhum ponto em seu interior. Temos que este pode ser dividido em  $(n-2)$  triângulos primários, onde  $n$  é o número de pontos sobre a linha poligonal.



**Figura 28 – Triângulos com pontos sobre o plano**

Partindo do vértice oposto ao lado que possui mais de dois pontos, pelo menos um dos pontos sobre o bordo que não é vértice. Traçamos segmentos de reta com extremidade neste vértice e nos pontos entre os outros dois vértices do triângulo num total de  $(n-3)$  segmentos traçados.



**Figura 29 – Triângulos ligados pelo vértice oposto**

Somente para os vértices do triângulo é que não será traçado nenhum segmento mais, e como são três os vértices aí esta a justificativa do  $(n-3)$ , pois para cada ponto que não é vértice traçamos um segmento deste até o vértice oposto. Como vimos na figura anterior.

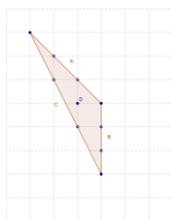
Como foram traçados  $(n-3)$  segmentos internos ao triângulo a partir do seu vértice formando assim  $(n-2)$  triângulos primários pois a cada linha, segmento, traçada partindo do lado do triângulo divide-o em duas regiões. O que conclui esta parte da demonstração.

Mostramos as figuras para mera ilustração do fato aqui descrito nos parágrafos anteriores. A figura 29 foi ampliada para melhor visualização do "recorte" feito no triângulo.

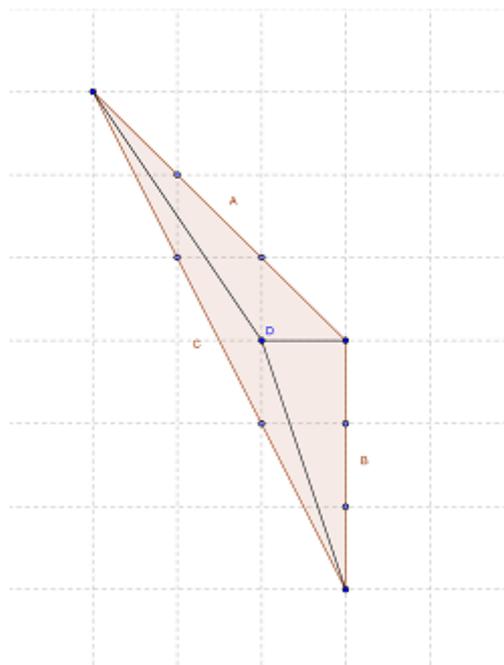
Segundo caso:

Supondo que haja um único ponto no interior do triângulo então por este podemos traçar três segmentos um para cada vértice do triângulo formando três

triângulos nos quais cada vértice do triângulo original foi duplicado. Então aplicando o que foi dito anteriormente e lembrando que o ponto interno foi triplicado, pois agora é vértice simultaneamente de três triângulos, então temos, sendo A, B e C a quantidade de pontos em cada lado do triângulo entre os vértices do mesmo:



**Figura 30 – Pontos no interior do triângulo**



**Figura 31 – Triângulos com ponto interior e sobre o lado oposto**

Agora temos três triângulos com as condições dadas anteriormente e estes sabemos calcular quantos triângulos primários cabem dentro. Basta utilizarmos a quantidade de pontos que estão sobre a linha poligonal de cada triângulo novo e agruparmos os valores encontrados e descobriremos quantos serão os triângulos primários em que podemos repartir o triângulo dado.

Logo o total de triângulos primários que teremos será dado pela soma da quantidade destes em cada novo triângulo formado. Lembrando que cada vértice do primeiro triângulo é vértice agora de dois triângulos e para cada triângulo novo, além dos pontos contidos em cada lado, há um ponto, que é um vértice, que era o ponto contido no interior do primeiro triângulo. Teremos a quantidade de triângulos primários dada por:

$$(A + 1 - 2) + (B + 1 - 2) + (C + 1 - 2) = (A + B + C) - 3 = (n + 3) - 3 = n$$

Primeiramente para cada lado do triângulo original somou-se um, que se refere ao ponto interno ao primeiro triângulo, antes do “recorte”, utilizando a relação anterior ficamos com a primeira igualdade.

A segunda igualdade é o resultado da soma dos lados, sendo que os vértices são contados duas vezes, logo há três pontos a mais além do contido na linha poligonal original.

A última igualdade se refere a área total do triângulo e também pode ser entendida como  $(n-2)$  triângulos mais uma unidade de área, pois o ponto no interior do triângulo pode ser entendido como foi visto como representando uma unidade de área que são dois triângulos primários.

Portanto dado um triângulo qualquer podemos repetir o processo de maneira tal a ter somente triângulos primários dentro do triângulo.

Tomemos por exemplo um ponto interno do triângulo qualquer e por este traçamos três segmentos de reta ligando estes aos vértices do triângulo. Formamos assim três novos triângulos nos quais os pontos internos estão redistribuídos, ou seja, os pontos ou estão dentro de algum triângulo novo formado ou estão sobre os segmentos traçados, logo sobre um lado de dois triângulos novos formados.

Efetuando o mesmo processo nos novos triângulos formados e operando de modo a não haver mais pontos internos a nenhum triângulo, perfazendo como feito neste Teorema, primeiro caso, e isso completa nossa demonstração.

QED.

Pensaremos a seguir sobre o fato de existirem pontos no interior do triângulo e lembrando, convenientemente, da situação na qual um ponto "toma conta" de uma área como foi dito no início deste trabalho temos a seguinte situação:

**Lema 3** - Propriedade aditiva do teorema de Pick

Sejam  $P$  e  $Q$  polígonos simples descrito em uma malha quadriculada de vértices de coordenadas inteiras e estes dois polígonos possuam unicamente uma aresta comum sendo esta a interseção entre eles.

Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  e  $n_1, n_2, m_1, m_2, \dots, m_k$  os vértices de  $P$  e  $Q$  respectivamente. Supondo agora que em ambos os polígonos vale o teorema de Pick separadamente e provaremos que vale para a união dos mesmos a seguir:

Tomemos por  $I_1$  e  $I_2$ , os pontos internos de P e Q, e  $S_1$  e  $S_2$ , os pontos contidos na linha poligonal de P e Q, respectivamente. Observando que a quantidade de arestas de P são k e quantidade de arestas de Q são  $k+2$ . Então a área dos polígonos P e Q são respectivamente:

$$I_1 + (S_1 / 2) - 1$$

$$I_2 + (S_2 / 2) - 1$$

Sendo somadas essas duas equações temos a contagem dos pontos da seguinte forma, pontos internos do polígono P e do polígono Q são internos ao polígono formado a partir da soma destes. Assim como os pontos sobre as linhas poligonais de ambos, exceto o segmento formado pelos vértices  $n_1$  e  $n_2$  inclusive, formam a nova linha poligonal do polígono soma. Todos os pontos dos polígonos contidos no segmento  $n_1$  e  $n_2$ , passam a serem pontos internos do polígono soma exceto os pontos  $n_1$  e  $n_2$  que continuam na linha poligonal.

Agrupando toda a informação contida no parágrafo anterior e as equações dadas, temos que a área do polígono soma será dada pela soma dos pontos internos dos polígonos P e Q, que são internos a polígono soma, juntamente com a duplicidade dos pontos contidos no segmento  $n_1$  e  $n_2$ , inclusive, e destes os únicos pontos que não são internos ao polígono soma são  $n_1$  e  $n_2$ .

E os outros segmentos que formam os polígonos P e Q formam a linha poligonal do polígono soma, ou seja, estes pontos contidos nestas linhas poligonais estão sobre a linha poligonal do polígono soma assim como os pontos  $n_1$  e  $n_2$ , porem os pontos  $n_1$  e  $n_2$  são contados nesta soma como sendo internos. Deveriam ser contados no grupo das metades uma única vez, pois são pontos sobre a linha poligonal, mas são contados duas vezes. São na verdade duas metades contadas de forma excedente, uma metade de  $n_1$  e uma metade de  $n_2$  que resultam em um inteiro, simplificando a equação de forma a deixá-la no formato do teorema de Pick. Desta forma a área do polígono soma será:

$$I_1 + (S_1 / 2) - 1 + I_2 + (S_2 / 2) - 1 = (I_1 + I_2) + ((S_1 / 2) + (S_2 / 2)) - 1 - 1 =$$

$$= (I_1 + I_2) + (((S_1 - K) / 2) + ((S_2 - K) / 2)) + k - 1 - 1 =$$

$$(I_1 + I_2 + k - 1) + ((S_1 - K) / 2) + ((S_2 - K) / 2) - 1 = I_3 + (S_3 / 2) - 1$$

Onde  $I_3$  é a quantidade de pontos internos,  $S_3$  é a quantidade de pontos sobre a linha poligonal, e seja  $K$  a quantidade de pontos entre os pontos  $n_1$  e  $n_2$  não os incluindo, de modo que o resultado fica demonstrado.

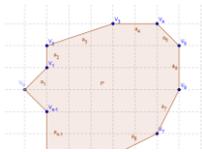
QED

O teorema de Pick para polígonos convexos segue agora do próximo teorema. O caso geral (não convexo) será discutido posteriormente.

**Teorema 2** - Todo polígono convexo de  $n$  vértices pode ser dividido em  $(n-2)$  triângulos justapostos.

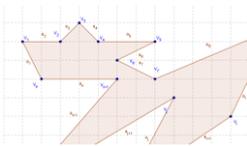
Escolhido um vértice  $A$  qualquer e a partir deste traçarmos todas as suas diagonais  $(n-3)$ , pois o vértice em questão não forma diagonal somente consigo e com os dois vértices adjacentes a ele, ou seja, do total de  $n$  vértices são descontados três, o próprio e seus dois adjacentes. E sabendo que um segmento qualquer que contém dois vértices, não adjacentes, de um polígono o divide em duas regiões, temos: quando traçarmos a primeira diagonal dividiremos o polígono em duas regiões, quando traçarmos a segunda diagonal o dividiremos em três regiões, e assim chegaremos a dividir em  $(n-2)$  regiões triangulares, quando traçarmos as  $(n-3)$  diagonais.

**Lema 4** - Considere uma poligonal simples, com mais de três vértices estes sendo  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v_0$  e lados (arestas)  $a_1 = v_0 v_1, \dots, a_n = v_{n-1} v_n$ . Existe uma diagonal  $v_i v_j, |i - j| > 1$ , não vizinhos, disjunta de todos os lados.



**Figura 32–Poligonal simples**

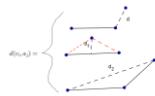
Definição: Considere distância  $v_i$  a  $a_j$  dada por:  $d$  tal que este seja a distância de  $v_i$  a projeção ortogonal de  $v_i$  sobre  $a_j$ , se esta estiver sobre  $a_j$ , caso contrário  $d$  será a menor distância de um vértice de  $a_j$  a  $v_i$ , ou seja tomando o vértice de  $a_j$  mais próximo de  $v_i$ .



**Figura 33–Figura plana**

Na figura anterior podemos observar que para o lado  $a_7$  o vértice mais próximo é o  $v_{n-1}$ , e para o lado  $a_n$  o vértice mais próximo é o  $v_6$ . Nesta mesma figura podemos verificar que para o lado  $a_2$  o vértice mais próximo é o  $v_3$ .

Para escolher a diagonal desejada procure a menor distância possível entre os pares aresta e vértice  $(a, V)$ , e trace a diagonal, segmento que une um dos vértices de  $a$  e o vértice  $V$ .



**Figura 34 - Diagonal**

Demonstração: Considere a distância mínima dentre todos os pares  $(v_i, a_j)$ ,  $v_i \notin a_j$ . As diagonais  $d, d_1$  e  $d_2$ , ( $d_1$  as traçadas em vermelho).

Teremos somente que analisar os casos em que poderiam haver alguns problemas, um segmento entre as situações ditas anteriormente. Separaremos em casos para pensar se seria possível tal problema ocorrer realmente.

Primeiro caso:



**Figura 35–Primeira impossibilidade da diagonal**

O desenho acima ilustra o que não pode ocorrer, pois estamos tomando a menor distância do vértice  $C$  ao segmento onde este não pertença, logo seria o segmento  $DE$  e não o segmento  $AB$ .

Segundo caso:



**Figura 36–Segunda impossibilidade da diagonal**

Em todos os casos aqui descritos há pelo menos um ponto mais próximo de AB que o ponto C, logo nenhum desses casos podem ocorrer, pois estamos tomando sempre a menor distância possível.

Terceiro caso:



**Figura 37 – Terceira impossibilidade da diagonal**

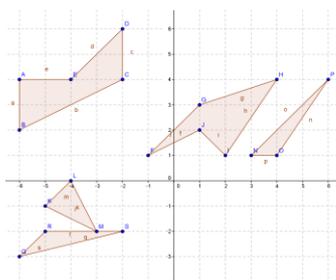
Em um dos casos aqui descritos há pelo menos um ponto mais próximo de AB que o ponto C, e os outros dois não são possíveis, pois nos referimos aqui a polígono simples, logo nenhum desses casos aqui feitos podem ocorrer, pois estamos tomando sempre a menor distância possível sem que haja interseção entre arestas.

Formada a diagonal temos que nos ater agora tão somente se esta é interna ou externa ao polígono, se for interna somamos áreas, mas se for externa subtraímos áreas dos novos polígonos formados.

#### **Teorema de Pick:**

Em um polígono cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano ( $\mathbb{Z}^2$ ), ou de uma malha quadriculada, podemos calcular a área deste polígono como se segue.

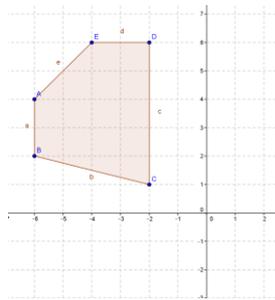
Vejamos alguns exemplos:



**Figura 38 – Polígonos de coordenadas inteiras**

Observe que para esta contagem os pontos "dominam" uma região como se cada ponto contado fosse o vértice de um quadrado e estes vértices (pontos) delimitam uma área quadrangular, que é na verdade a unidade de medida da área.

Nestes exemplos fica fácil a contagem de pontos e verifica-se o inteiro da área de modo adequado, porém se configura ideal para calcular área de polígonos maiores, com mais vértices e maior dimensão (tamanho mais abrangente)?



**Figura 39 – Polígono de coordenadas inteiras no plano**

Faremos aqui uma breve demonstração da veracidade deste fato.

Partindo do princípio que todo polígono simples pode ser decomposto em  $(n-2)$  triângulos pelo Teorema 2 e que estes possuem pontos de coordenadas inteiras do plano então podemos provar que a área do polígono é dada, nas condições vistas anteriormente, por :

$$A + (1/2).B - 1.$$

### **DEMONSTRAÇÃO 1**

A demonstração é feita por indução no número de vértices:

O caso de triângulos já foi discutido.

Lema 4 junção de duas partes ou diferença.

Consideremos um polígono com os seus vértices sendo pontos de coordenadas inteiras em uma malha quadriculada. Sejam B e A, o número de pontos da malha situados sobre a linha que delimita o polígono e no interior,

respectivamente. Então após decompor o polígono em  $(L-2)$  regiões triangulares, o que é possível fazer pelo Teorema 2. Temos a seguinte situação para os pontos do bordo do polígono, estes são pontos da linha poligonal dos triângulos formados após esta decomposição.

Observando que os pontos que eram pontos interiores ao polígono agora são ou interiores a um triângulo ou são duplicados em bordo de dois triângulos justapostos, obtidos na decomposição anterior, podemos então utilizar o Teorema 4, para obter a área de cada triângulo aqui descrito.

Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  e  $m_1, m_2, \dots, m_k$  a quantidade de pontos contidos na linha poligonal fechada e no interior dos respectivos  $k$  triângulos obtidos e pelo Teorema quatro

$m_i + (n_i/2) - 1$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , representa a área do triângulo de ordem  $i$ .

Tomando agora o somatório (reagrupando todas as áreas, triângulos, novamente) de todos os triângulos e observando que os pontos que eram internos do polígono e porventura ficaram sobre o bordo de dois triângulos, como aqui nesta contagem estes foram divididos por dois e os  $(L-1)$  vértices que foram contados duas vezes e o vértice do polígono que foi contado  $k$  vezes enfim retirando todo o excedente e reordenado a contagem ficamos com:

$$A + (B/2) - 1$$

Como sendo a área do polígono dado, sendo a quantidade de pontos no interior do polígono e na linha poligonal, respectivamente  $A$  e  $B$ .

QED

## 5 Análises posteriores

Neste capítulo abordaremos o conceito de Polígonos não Simples, os Teoremas de Euler para polígonos e o Teorema de Pick para polígonos não simples.

### 5.1. Teorema 4

Todo triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras no plano onde há  $n$  pontos na linha poligonal e  $m$  pontos em seu interior possui área dada por:

$$m + (n/2) - 1 \text{ unidade de área.}$$

Demonstração:

No caso onde os três lados possuem simultaneamente três pontos e nenhum ponto em seu interior temos que este pode ser dividido em quatro triângulos primários ligando os pontos que não são vértices e neste caso a área do triângulo é dada por:

$$(4 \cdot (1/2)) = 2 \text{ unidades de área.}$$

e neste caso a área do triângulo fornecido anteriormente é dada por, onde  $n$  representa o número de pontos na linha poligonal que delimita o polígono:

$$((n-2)/2) = (n/2) - 1.$$

Se observarmos o mesmo ocorre na situação anterior poderíamos escrever  $(6/2) - 1$  e obteríamos o mesmo resultado. Assim para o caso de o triângulo não possuir pontos em seu interior temos uma maneira de calcular sua área se soubermos quantos pontos estão sobre sua poligonal, basta dividir esta quantidade por dois e deduzir uma unidade do total.

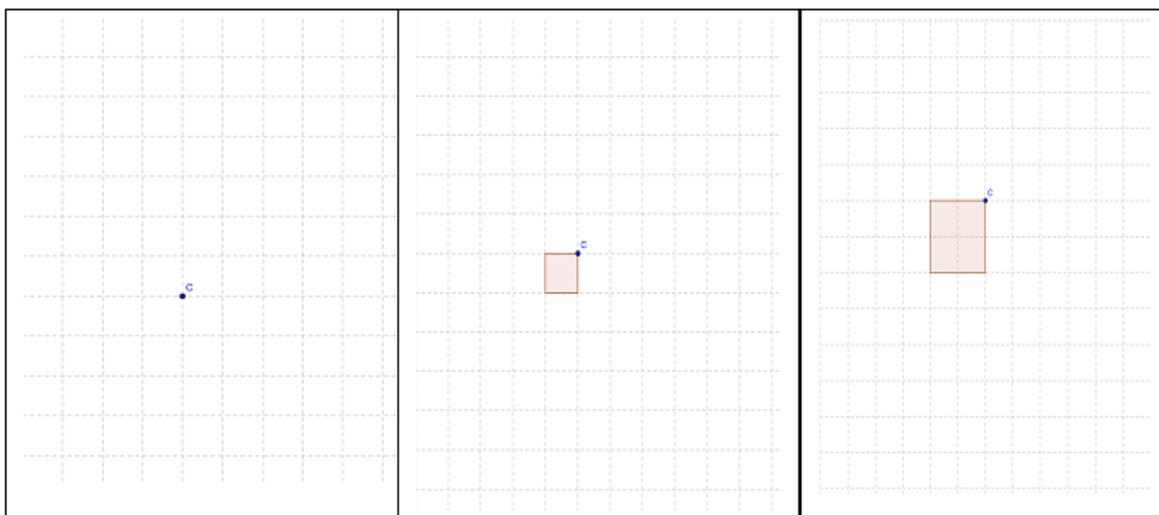
Consideraremos o triângulo em questão totalmente contido no primeiro quadrante do plano como condição para efetuar a operação aqui citada. Portanto cada ponto no interior do triângulo delimita uma unidade de área e juntando esta informação com a anterior temos: sejam  $m$  o número de pontos no interior do triângulo e  $n$  o número de pontos sobre a linha poligonal a área total deste triângulo é dada por:

$$m + ((n/2) - 1) = m + (n/2) - 1.$$

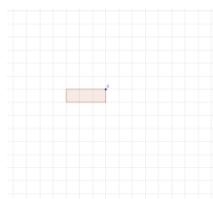
### Um esboço de outra demonstração

Uma observação interessante é que cada ponto fora do eixo de coordenadas inteiras do plano cartesiano "cuida" ou "toma conta" de uma determinada área de uma unidade de área do plano a partir da origem do sistema, podemos citar alguns exemplos, o ponto  $(1,0)$  pode se referir a área do quadrado  $((0,0), (1,0), (1,1), (0,1))$ .

Notemos na malha a seguir que cada ponto retrata uma área, e esta diminui ou aumenta conforme o ponto  $C$  se movimenta na malha.



**Figura 40 – Pontos na malha quadriculada**



**Figura 41 – Posição do ponto na malha**

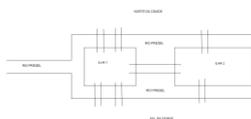
Tendo a posição inicial do ponto C como origem e a partir daí observar a posição deste na malha e fazer a contagem da área determinada pela sua nova posição considerando a sua movimentação na horizontal e na vertical e tendo como unidade de área os quadrados da malha e contando estes quadrados verifica-se a área delimitada pela posição inicial e posição final do ponto C em questão.

Observando ainda que a média (contagem de pontos) entre o menor e o maior caminho percorrido pelo ponto, sem passar pelo interior de nenhum quadrado da malha, ou seja, passando somente pelo seu bordo, e contando a quantidade de pontos nota-se que a área é uma unidade de área a menos que a média do total de pontos por onde o ponto C passa até chegar ao seu ponto de "parada".

Sem mais delongas, consideremos agora um polígono sobre uma malha quadriculada cujos vértices estão sobre os nós desta malha (pontos de coordenadas inteiras).

## 5.2. Teorema de Euler

Em uma cidade chamada Königsberg na antiga Prússia, no século 18 havia um problema relacionado com sete pontes que cruzavam o rio Pregel e ligava duas ilhas desta cidade. Os moradores da cidade questionavam se seria possível por uma caminhada contínua atravessar as sete pontes, sem passar duas vezes pela mesma ponte. A figura a seguir ilustra o problema.



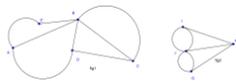
**Figura 42–Esboço da cidade**

Um matemático chamado Leonhard Euler não só resolveu como também esclareceu o problema. Ele pensou que o mais importante não era a extensão das terras, mas sim a quantidade de coisas que as interligariam. E criou uma teoria sobre problemas desse tipo. Esta teoria trata de problemas relacionados com curvas e vértices e será descrito a seguir de forma sucinta e elementar afim de melhor elucidar de maneira objetiva o contexto aqui descrito.

### 5.3. Grafos

Grafo é um par  $(V, A)$  onde  $V$  e  $A$  são chamados de vértices e arestas, respectivamente, de um conjunto de arcos, onde cada arco (segmento de reta ou curva) possui dois vértices, e estes são os pontos que delimitam os arcos, são suas extremidades. Um vértice pode pertencer a dois ou mais arcos do Grafo, e este é sempre um conjunto fechado. Uma aresta é descrita pelos seus vértices.

Exemplos:



**Figura 43 – Grafos planares**

Voltando ao problema das pontes podemos agora escrever o teorema criado por Euler após o fato ocorrido e assim resolver o problemas das pontes, ou seja, decidir se o mesmo tem ou não solução e se tiver qual seria e com uma explicação plausível. Nos exemplos anteriores a figura dois ilustra o Grafo que Euler usou para resolver o problema, os pontos  $G, H, I$  e  $J$  são as extensões de terra e, como são desconsideradas, pois não tem influência alguma sobre a solução do problema são consideradas pontos, vértices do grafo e as pontes, que são os caminhos que interligam as terras, são as arestas.

Um caminho em grafo é uma sequência de passagens sobre as arestas do grafo, sem repetir nenhuma aresta, passando por arestas consecutivas com um vértice em comum. Um grafo é dito conexo se de qualquer vértice, dito inicial pode-se chegar em um outro vértice qualquer, dito vértice final.

#### **5.4. Teorema de Euler para Grafos**

Enunciaremos a seguir o teorema de Euler para grafos sem a sua devida demonstração para que o trabalho aqui descrito não perca seu foco central, mas sendo importante para o mesmo, há a necessidade de enunciar tal teorema.

O teorema de Euler para Grafos diz o seguinte:

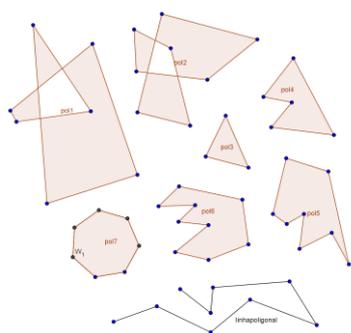
Se um grafo planar possui  $v$  vértices,  $a$  arestas,  $r$  regiões e  $c$  componentes conexos temos a seguinte relação:  $v + r - a = c + 1$ . Onde as regiões são as partes do plano obtidas após traçar as arestas ligando vértices não consecutivos.

#### **5.5. O Teorema de Pick para polígonos entrecruzados**

É possível enunciar e demonstrar uma variação do Teorema de Pick para polígonos entrecruzados. Não daremos todos os detalhes mas faremos alguns comentários.

Pensemos agora na situação de orientação da construção de um polígono, que a princípio pode ser qualquer, e como o caso deste ser simples o teorema de Pick se aplica perfeitamente, então tomemos um polígono não simples qualquer construído sobre a malha quadriculada e vejamos o que acontece com os números do mesmo ao efetuarmos a comparação entre a contagem de pontos internos e sobre a linha poligonal, utilizando a ideia do teorema de Pick, deste polígono e sua área.

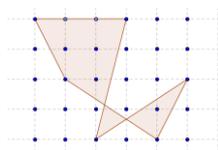
A princípio temos que observar quais os pontos estão sobre a linha poligonal e quais estão no interior do polígono, feito isto deve-se atentar a orientação da construção do dado polígono pois a mesma nos auxiliará a determinar quais dos pontos estão realmente dentro polígono e quais estão apenas entre alguns dos lados mas não fazem parte do interior do polígono, portanto não devem ser contados para efetuar a comparação aqui descrita.



**Figura 44—Polígonos simples e não simples**

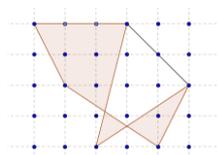
Os polígonos POL1 e POL2 são ditos polígonos não simples, são tais que as arestas se intersectam em pontos que não são vértices, e estes serão estudados neste capítulo. E há ainda os polígonos nos quais um vértice pertence a mais de duas arestas estes também são não simples e também serão vistos. Logo todo polígono no qual uma aresta se intersecta com mais de duas arestas este é dito não simples e será estudado agora que terminamos os estudos referentes aos polígonos simples.

Vamos calcular, com o auxílio do geogebra, a área de polígonos não simples, como os vistos anteriormente, e verificar se é possível relacionar estes cálculos de área com o Teorema de Pick. O que faremos aqui não é uma demonstração, mas uma utilização do Teorema de Pick com polígonos entrecruzados. Vejamos alguns exemplos:



**Figura 45– Hexágono não simples**

Este hexágono construído no geogebra têm 6 unidades de área, de acordo com o próprio programa. Se usarmos o Teorema de Pick nos polígonos, pentágono e triângulo sobre o pentágono, formados traçando uma diagonal externa neste hexágono como segue podemos pensar em usar o Teorema.



**Figura 46– Pentágono e triângulo simples**

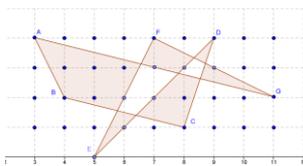
As áreas do pentágono e triângulo são, pelo Teorema de Pick, respectivamente:

$$8 + (8/2) - 1 = 11 \text{ e } 4 + (4/2) - 1 = 5.$$

Efetuada a subtração das áreas obteremos a área do polígono original.

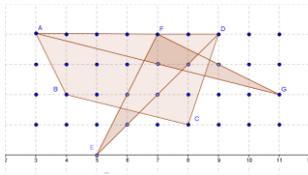
$$11 - 5 = 6.$$

Vejam os mais um exemplo e procederemos do mesmo modo que anteriormente para denotar a área de um polígono não simples.



**Figura 47– Heptágono não simples**

Podemos traçar as diagonais externas AF e FD e observarmos que A, F e D são colineares. Formamos assim um quadrilátero ABCD, e dois triângulos DEF e AFG. Procedendo como no exemplo anterior calcularemos a área do polígono ABCDEFG fazendo a diferença de áreas.



**Figura 48– Quadrilátero simples e triângulos**

A área de ABCD é dada por:

$$9 + (9/2) - 1 = 12,5 \text{ unidades de área}$$

A área de AFG é dada por:

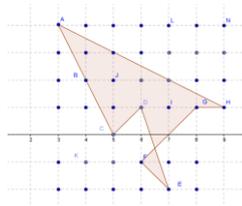
$$1 + (8/2) - 1 = 4$$

A área de DEF é dada por:

$$1 + (8/2) - 1 = 4$$

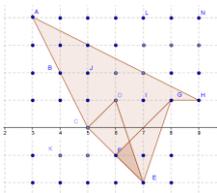
Portanto a área do polígono ABCDEFG é 4,5 unidades de área.

Vejam um terceiro e último exemplo apresentado aqui neste trabalho, este com um nível de dificuldade um pouco maior que os outros dois e também com uma solução parecida com as duas anteriores. Um octógono, que quando traçamos as diagonais externas percebemos um novo entrecruzamento dos dois triângulos formados, logo há dois cálculos à serem feitos além dos já conhecidos. Vejam o problema.



**Figura 49– Octógono não simples**

Traçadas as diagonais GE e CF, construímos os triângulos CDE e EFG, tais que estes se entrecruzam nos segmentos DE e FG.



**Figura 50– Pentágono simples e triângulos entrecruzados**

A área de ACFEGH é dada por:

$$7 + (9/2) - 1 = 10,5 \text{ unidades de área}$$

A área de EFG é dada por:

$$1 + (4/2) - 1 = 2$$

A área de CDE é dada por:

$$0 + (4/2) - 1 = 1$$

Portanto a área do polígono ABCDEFG é 7,5 unidades de área.

## 6 Considerações finais

Temos aqui uma excelente ferramenta para a determinação de áreas de polígonos simples, com a utilização de matemática discreta.

A priori este teorema trata somente de área de polígonos simples, com exatidão, mas no decorrer de alguns estudos que este nos remete e a ideias que posteriormente podem ser tratadas, com mais rigor, podemos verificar o que ocorreria com polígonos não simples de maneira mais aprofundada.

Porém aqui cabe uma dúvida convidativa: Existe relação equivalente a esta, que é válida, em outras dimensões?

## 7 Referências bibliográficas

Delgado, Jorge e outros, **Geometria Analítica**, Rio de Janeiro SBM 2013.

Julianelli, José Roberto, **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**, Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

Lima, Elon Lages e outros, **A matemática do Ensino Médio- volume2**, sexta edição, Rio de Janeiro SBM 2006.

Lima, Elon Lages, **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**, sexta edição, Rio de Janeiro SBM 2006.

Lima, Elon Lages e outros, **Temas e Problemas Elementares**, terceira edição, Rio de Janeiro SBM 2006.

Martinez, Fábio Brochero e outros, **Teoria dos Números**, segunda edição, Rio de Janeiro IMPA 2011.

Muniz Neto, Antônio Caminha, **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**, Rio de Janeiro SBM 2012.