5
A construção das Curvas Cônicas através do Origami

Anteriormente foi visto que as curvas cujas equações são do segundo grau podem ser obtidas por meio da interseção entre um cone duplo e um plano. Além disso, foi possível observar as definições e as propriedades importantes neste estudo. Entretanto, no Ensino Médio, a abordagem do referido assunto, na maioria das vezes é, excessivamente, relacionada à memorização das equações e uso de artifícios algébricos.

Este método, por sua vez, desencadeia um rápido esquecimento das definições e propriedades muito importantes, além de se propiciar que o discente desconheça o conceito essencial de lugar geométrico.

Existem diversos recursos pedagógicos, que são capazes de facilitar a aprendizagem não apenas do tema exposto, mas de diversos assuntos matemáticos. Dentre eles, se tem os Softwares, jogos e diferentes materiais concretos. No entanto, existe um recurso que sobressai no quesito acessibilidade e que em nada perde no quesito eficiência: o papel. Em virtude disso, neste capítulo faz-se a união entre o estudo das Curvas Cônicas e o Origami.

Segundo Oliveira (2004), o método das dobraduras utilizado para a construção destas curvas também é chamado de método de Van Schooten. No ano de 1657, o referido matemático holandês publicou o "*Exercitationum mathematicarum libri quinque*" (Os cinco livros de exercícios matemáticos), em que o mais famoso dentre os cinco manuscritos é dedicado à descrição de diferentes instrumentos para traçar cônicas.

A seguir, mostra-se um modelo para o uso do Origami, cujas construções das curvas são dadas por meio da formação de retas tangentes às mesmas representadas por vincos gerados pelas dobras. Este modelo pode ser reproduzido nas aulas de Ensino Médio, a fim de incrementar o desenvolvimento do assunto em questão.

5.1. A elipse

Nesta seção será mostrado o passo a passo da construção da curva, a matemática presente no método utilizado e a identificação dos seus elementos por meio do uso dos axiomas de Huzita-Hatori.

5.1.1. Construção da curva através das dobraduras

Para a construção é preciso uma folha de papel vegetal quadrada com uma circunferência já construída.

Seguem os passos necessários para a obtenção da curva:

- Tome dois pontos distintos da circunferência e faça uma dobra de maneira que os mesmos tornem-se coincidentes (axioma 2).

- Repita o processo descrito no item anterior, a partir de um par de pontos diferentes dos utilizados inicialmente.

- Marque o ponto de interseção entre os vincos gerados pelas dobras descritas anteriormente. Este ponto é o centro da circunferência, ao qual se chama de F_1.

Figura 1 - O centro $\boldsymbol{F_1}$ do círculo

- No interior da circunferência, marque o ponto fixo F_2.

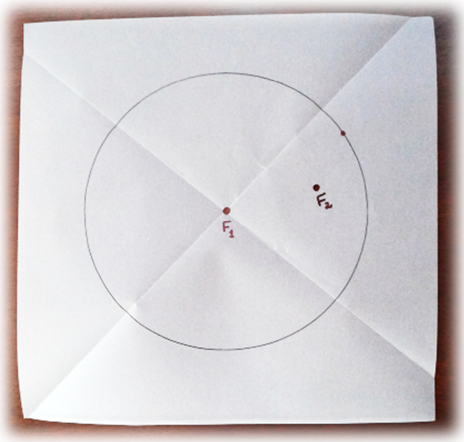

Figura 2 - Escolha do ponto $\boldsymbol{F_2}$

- Escolha um “ponto de partida” pertencente à circunferência e efetue uma dobra de forma que F_2 coincida com o referido ponto (axioma 2). Faça o mesmo processo com o máximo de pontos possíveis, percorrendo por toda a circunferência.

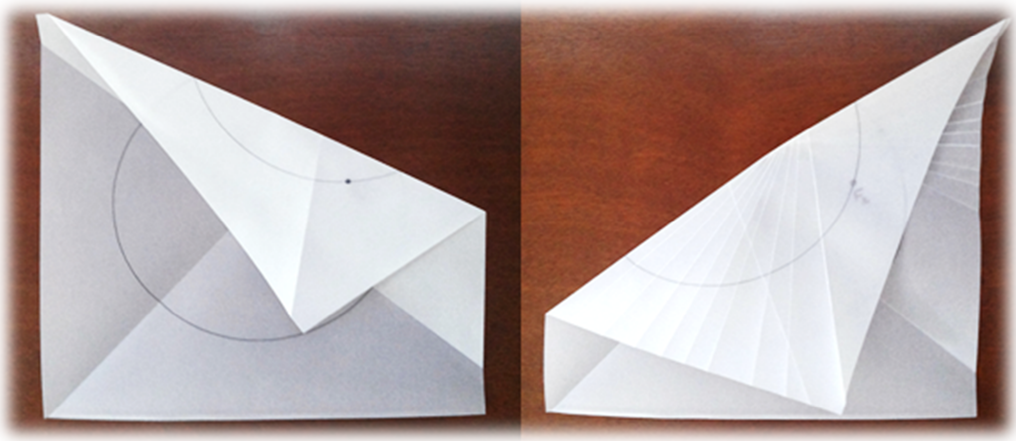

Figura 3 - Construção da curva

Será visto, a seguir, que a curva obtida é uma elipse.

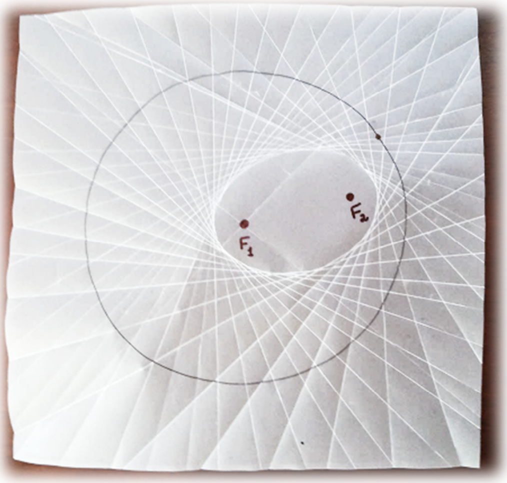

Figura 4 - A curva através das dobraduras

5.1.2. A matemática do método utilizado

Observe que os vincos criados para a obtenção do centro da circunferência são mediatrizes dos segmentos determinados pelos pontos escolhidos.

A escolha do ponto F_2 é feita por meio de uma única restrição: este ponto fixo deve ser localizado no interior da circunferência. Observa-se adiante que esta condicionante está relacionada à definição do lugar geométrico da elipse. Desta maneira, os pontos fixos F_1 e F_2 são os focos da curva.

Quando se escolhe um ponto P pertencente à circunferência de raio r e se faz com que o mesmo coincida com o foco F_2, o vinco obtido é uma reta que é chamada de t. Além disso, será denominado o ponto de interseção entre o raio $\overline{F_1P}$ e a reta t de ponto G.

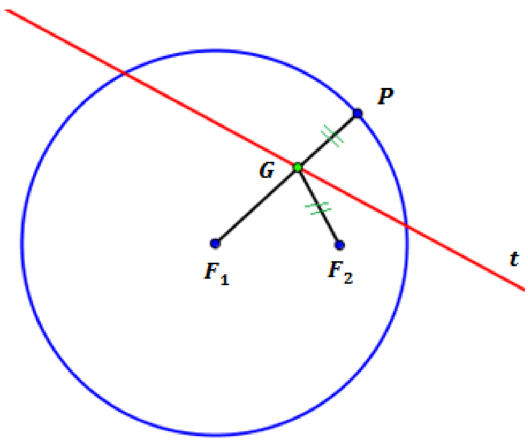

Figura 5 - Construção da reta t

Por construção, $|\overline{PG}| = |\overline{GF_2}|$. Como $|\overline{F_1G}| + |\overline{GP}| = r$, de igual forma $|\overline{F_1G}| + |\overline{GF_2}| = r$. Portanto, o ponto G pertence à elipse.

Pode-se mostrar, ainda, que o ponto G é o único na reta de dobragem no qual a soma das distâncias aos focos F_1 e F_2 é igual ao comprimento do raio da circunferência, ou seja, será mostrado que o vinco gerado pela dobra representa a reta tangente à curva que passa por G.

Seja Q um ponto pertencente à circunferência *e* I o ponto de interseção entre o raio $\overline{F_1Q}$ e a reta t. Suponha-se que I pertence à elipse. Assim, $|\overline{F_1I}| + |\overline{IF_2}| = r$. Ocorre que $|\overline{F_1I}| + |\overline{IQ}| = r$. Logo, $|\overline{IQ}| = |\overline{IF_2}|$. Como I pertence à reta de dobragem que fez com que P incidisse em F_2, conclui-se que $|\overline{IP}| = |\overline{IF_2}|$. Daí segue que $|\overline{IP}| = |\overline{IQ}|$.

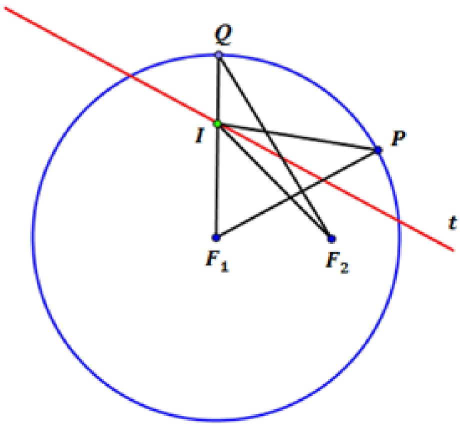

Figura 6 - Unicidade do ponto G

Portanto, se $|\overline{F_1I}| + |\overline{IP}| = r = |\overline{F_1P}|$, conclui-se que I pertence ao segmento $\overline{F_1P}$, ou seja, os pontos I e G são coincidentes. Desta maneira, a reta de dobragem que é chamada de reta t é tangente à curva, pois intersecta a mesma em um único ponto.

5.1.3. Identificação dos elementos através das dobraduras

Identifica-se a seguir a reta focal, os vértices A_1 e A_2, o eixo focal, a reta não focal, os vértices B_1 e B_2, o eixo não focal e o centro C da elipse a partir dos Axiomas de Huzita-Hatori. Vejam-se os passos necessários:

- Reta focal: realize a dobra que passa pelos focos F_1e F_2 (axioma 1) e observe que reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértices A_1 e A_2: para obtê-los, marque os pontos de interseção entre a curva e o vinco que representa a reta focal.

- Eixo focal: segmento $\overline{A_1A_2}$.

- Reta não focal: efetue a dobra que faz com que F_1e F_2 tornem-se coincidentes (axioma 2) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértices B_1 e B_2: para obtê-los, marque os pontos de interseção entre a curva e o vinco que representa a reta não focal.

- Eixo não focal: segmento $\overline{B_1B_2}$.

- Centro C: para obtê-lo, marque o ponto de interseção entre os vincos gerados (reta focal e não focal).

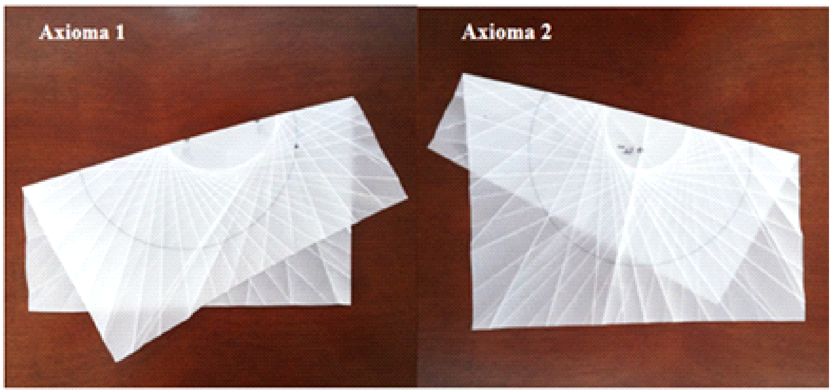

Figura 7 - Aplicação dos axiomas

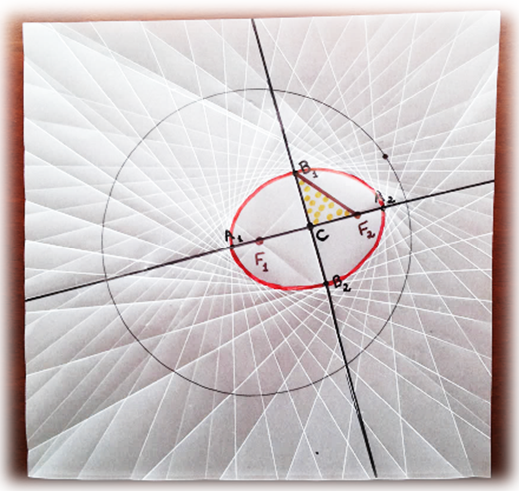

Figura 8 - Os elementos da elipse

Tem-se, ainda, a excentricidade da elipse. Analisa-se a mesma medindo a distância entre o centro C da curva e os focos $F_1 e\ F_2$, além da distância entre o centro C e os vértices $A_1\ e\ A_2$. Ao serem divididos os respectivos valores, se encontra um resultado menor do que um (considerando $F_1 e\ F_2$ não coincidentes).

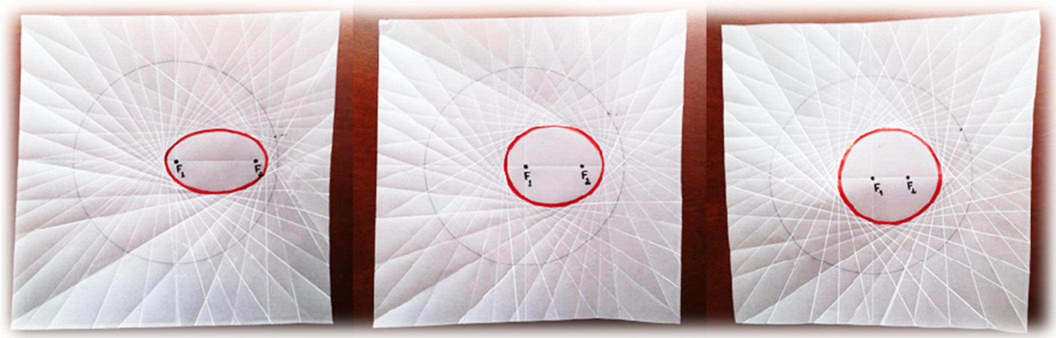

Figura 9 - Excentricidade da elipse

Quanto maior for a distância entre os focos, a curva terá aspecto mais “achatado”. Desta maneira, o estudante poderá notar que quando os focos coincidem, obtém-se uma circunferência, ou seja, a circunferência é um caso especial de elipse.

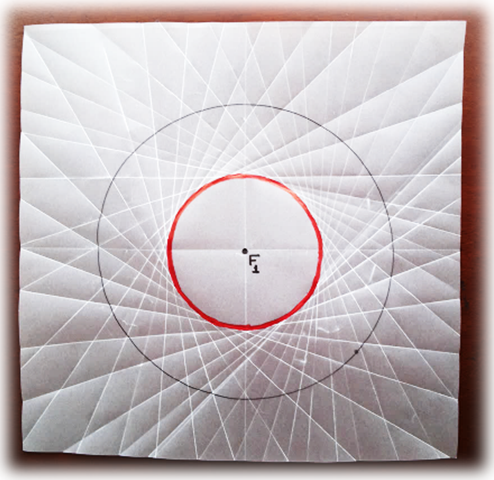

Figura 10 - Construção de uma circunferência

No Ensino Médio, as Curvas Cônicas, em geral, são mostradas quase sempre centradas na origem com focos pertencentes ao eixo das ordenadas. Esta limitação de abordagem induz o aluno a entender que as curvas existem apenas daquela maneira.

Uma aula conduzida com o auxílio das construções do Origami pode auxiliar a percepção do aluno sobre a existência das transformações de coordenadas, desde que, previamente, seja estabelecido um sistema original de eixos ortogonais *XOY*.

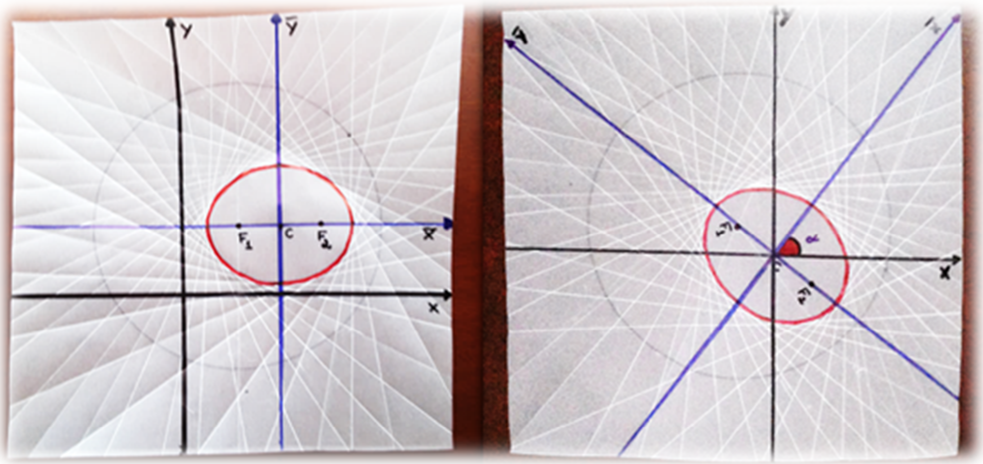

Figura 11 - Translação e rotação de elipses

5.2.
A hipérbole

Nesta seção serão mostrados o passo a passo da construção da curva, a matemática presente no método utilizado e a identificação dos seus elementos por meio do uso dos axiomas de Huzita-Hatori.

5.2.1.
Construção da curva através das dobraduras

Conforme feito na construção da elipse, para se iniciar a construção da curva pretendida, é preciso uma folha de papel vegetal quadrada com uma circunferência já construída. A seguir são mostrados os passos para tal construção:

- Para se encontrar o centro F_1da circunferência se seguem os mesmos passos descritos na construção da elipse.

Figura 12: o centro $\boldsymbol{F_1}$ do círculo

- No exterior da circunferência, marque o ponto fixo F_2.

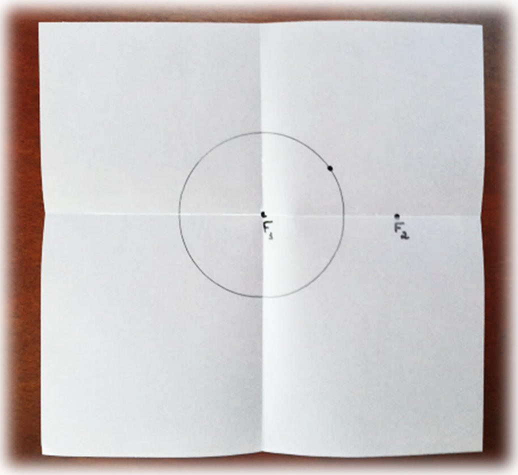

Figura 13: escolha do ponto $\boldsymbol{F_2}$

- Escolha um “ponto de partida” pertencente à circunferência e efetue uma dobra de forma que F_2 coincida com o referido ponto (axioma 2). Faça o mesmo processo com o máximo de pontos possíveis, percorrendo por toda a circunferência.

Figura 14 - Construção da curva

Será visto a seguir que a curva obtida é uma hipérbole.

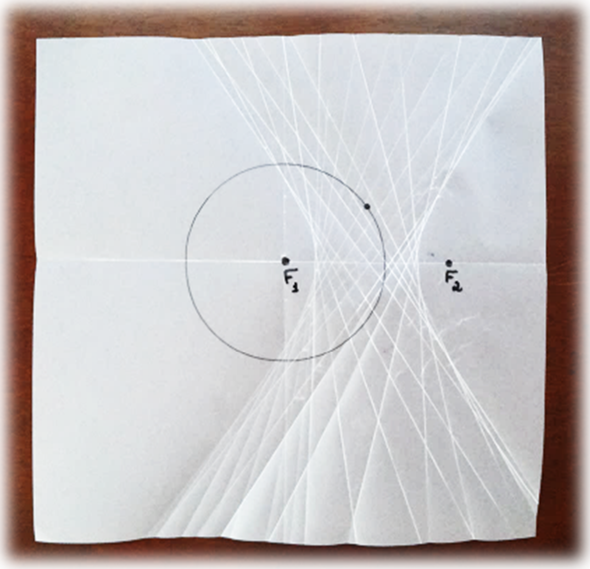

Figura 15 - A curva através das dobraduras

5.2.2.
A matemática do método utilizado

Quando se escolhe um ponto P pertencente à circunferência de raio r e se faz com que o mesmo coincida com o foco F_2, o vinco obtido é uma reta que será chamada de t. Além disso, será denominado o ponto de interseção entre o raio $\overline{F_1P}$ e a reta t de ponto G e pontos fixos F_1 e F_2 que são os focos da curva.

Por construção, $|\overline{PG}|$ = $|\overline{GF_2}|$. Ora, se $|\overline{F_1G}|$ - $|\overline{PG}|$ = r, tem-se de igual forma, que $|\overline{F_1G}|$ - $|\overline{GF_2}|$ = r e, portanto, o ponto G pertence à hipérbole.

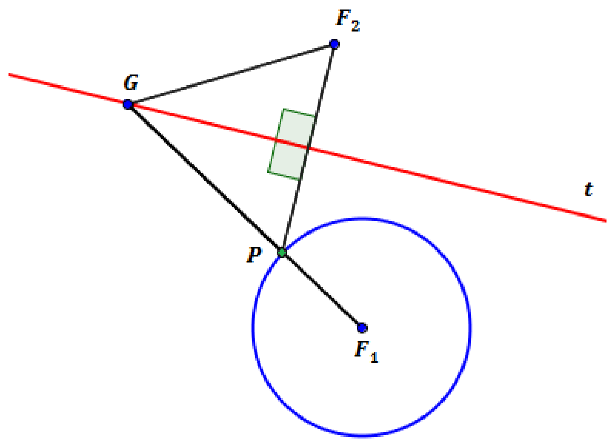

Figura 16 - Formação da reta tangente à hipérbole

A prova da unicidade do ponto G é análoga à mostrada na explicação da elipse.

5.2.3. Identificação dos elementos através da dobradura

Identifica-se a seguir: a reta focal, os vértices A_1 e A_2, o eixo focal, a reta não focal, os vértices B_1 e B_2, o eixo não focal e o centro C da hipérbole a partir dos Axiomas de Huzita-Hatori. Vejam-se os passos necessários para identificação de cada elemento:

- Reta focal: realize a dobra que passa pelos focos F_1e F_2 (axioma 1) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértices A_1 e A_2: para obtê-los, marque os pontos de interseção entre a curva e o vinco que representa a reta focal.

- Eixo focal: segmento $\overline{A_1A_2}$.

- Reta não focal: efetue a dobra que faz com que F_1e F_2 tornem-se coincidentes (axioma 2) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

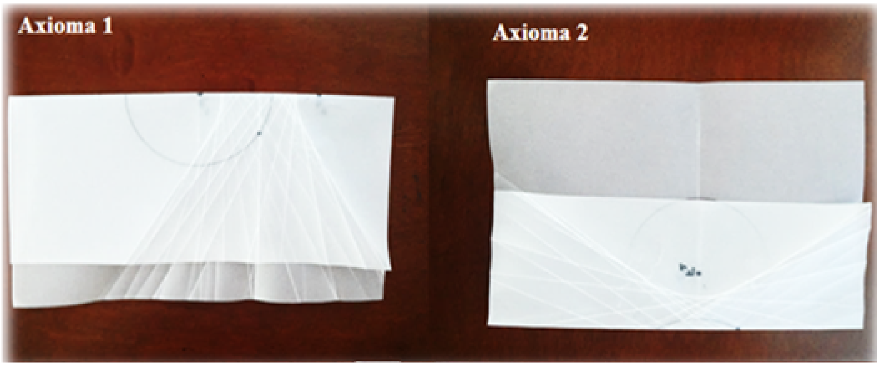

Figura 17 - Aplicação dos axiomas

- Vértices B_1 e B_2: faça uma dobra de forma que o centro C coincida com o vértice A_1 (axioma 2), marque o ponto em que o foco F_2 incide na reta focal, faça duas possíveis dobras que passam por A_1 e fazem com que, simultaneamente, o ponto marcado encoste-se à reta não focal (axioma 5) e marque os pontos pertencentes à reta não focal, que coincidem com o ponto, anteriormente marcado, obtendo os vértices B_1 e B_2.

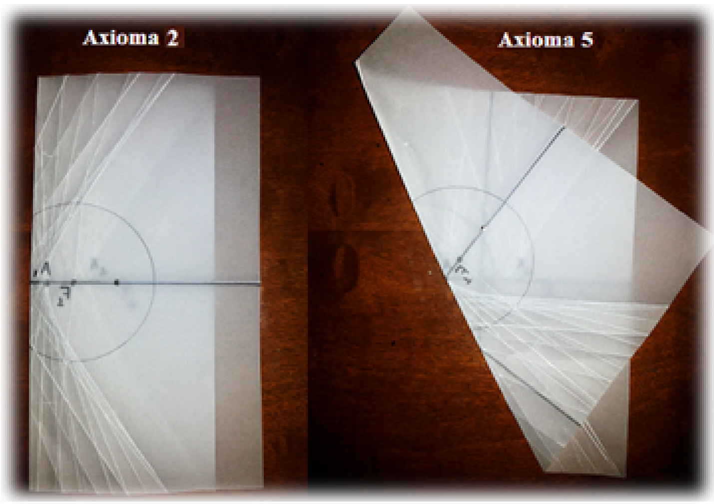

Figura 18 - Aplicação dos axiomas

Observe que as dobras podem ser feitas considerando o vértice A_2.

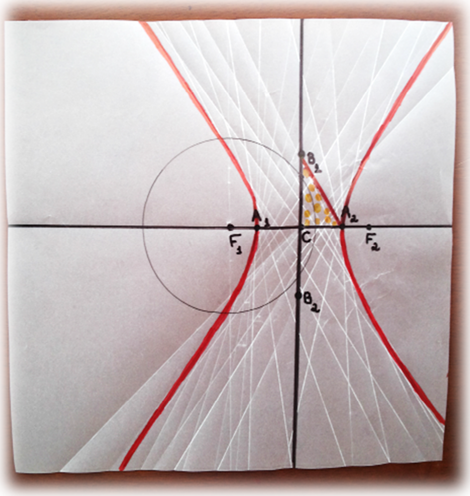

Figura 19 - Os elementos da hipérbole

A fim de se encontrar as assíntotas da hipérbole construída, obtém-se o retângulo da base por meio das seguintes instruções:

- Realize as dobras perpendiculares à reta focal que passam pelos vértices A_1 e A_2 (axioma 4).

- Realize as dobras perpendiculares à reta não focal que passam pelos vértices B_1 e B_2 (axioma 4).

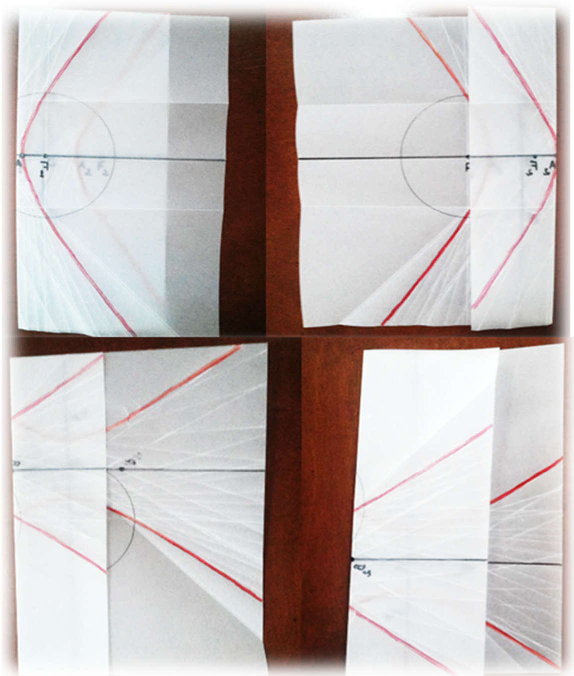

Figura 20 - Aplicação do axioma 4

- Obtenha os vértices do retângulo da base marcando os pontos de interseção entre os vincos criados.

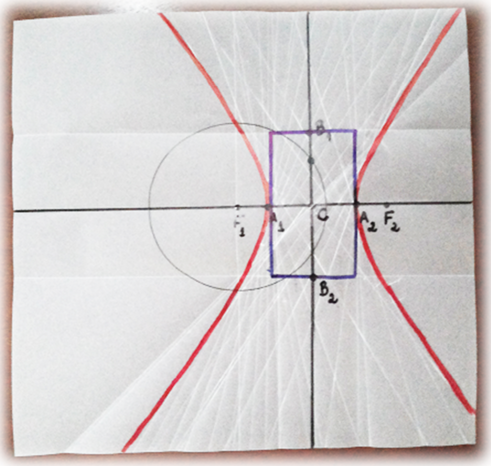

Figura 21 - Retângulo da base

- Obtenha as assíntotas da hipérbole efetuando as dobras que passam pelo centro C da curva e os vértices do retângulo da base (axioma 1). Note que estes vincos definem as diagonais do retângulo.

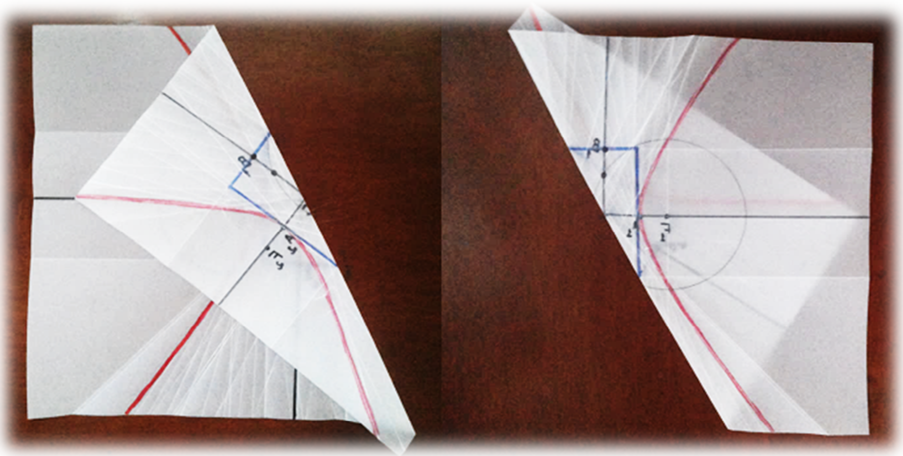

Figura 22 - Aplicação do axioma 1

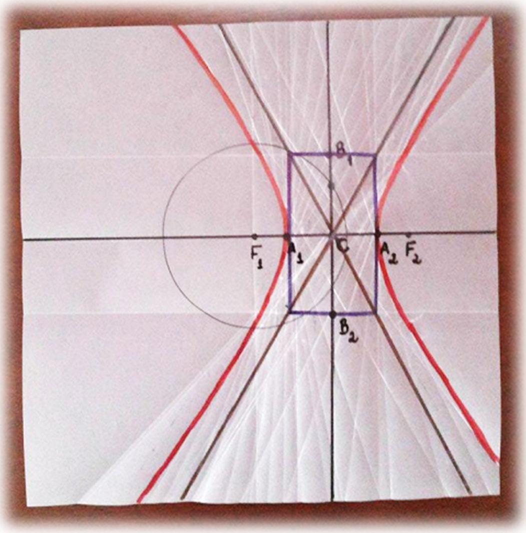

Figura 23 - As assíntotas da hipérbole

Tem-se, ainda, a excentricidade da hipérbole. Analisa-se a mesma medindo a distância entre o centro C da curva e os focos $F_1 e\, F_2$, além da distância entre o centro C e os vértices $A_1\, e\, A_2$. Ao serem divididos os respectivos valores, encontra-se um resultado maior do que um (considerando $F_1 e\, F_2$ não coincidentes).

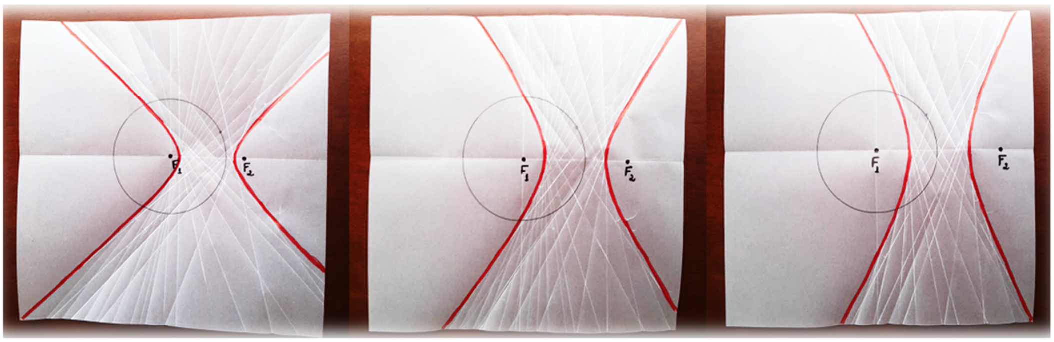

Figura 24 - Excentricidade da hipérbole

Com as construções se pode perceber que quanto mais os focos estão próximos, as curvas ficam mais acentuadas. No caso dos focos mais afastados, as curvas tornam-se menos acentuadas.

As transformações de coordenadas poderão ser abordadas da mesma maneira que foram apresentadas no estudo da elipse.

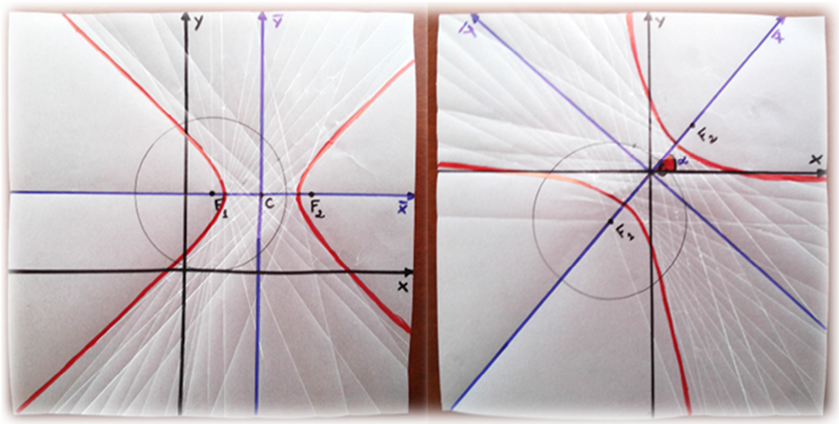

Figura 25 - Translação e rotação da hipérbole

5.3. A parábola

A seguir, apresenta-se a construção da curva, a matemática presente no método utilizado e a identificação dos seus elementos.

5.3.1. Construção da curva através das dobraduras

Precisa-se de uma folha de papel vegetal quadrada com uma reta (que será chamada de *d*) já construída. A seguir, serão mostrados os passos para tal construção:

- Marque um ponto F qualquer na folha não pertencente à reta d.

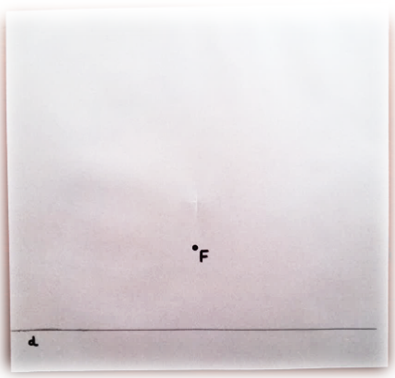

Figura 26 - O ponto *F*

- Escolha um ponto qualquer pertencente à reta d e faça uma dobra de maneira que tal ponto torne-se coincidente ao ponto F (axioma 2).

-. Repita o passo anterior considerando o máximo de pontos “percorrendo” por toda a reta.

Figura 27 - Aplicação do axioma

Ao serem realizadas as dobras, se encontra uma curva formada pelos vincos gerados. Percebe-se a seguir que esta curva é uma parábola.

Figura 28 – A parábola através do Origami

5.3.2.
A matemática do método utilizado

Seja F o foco da parábola e d a sua diretriz e, dado um ponto F' pertencente à reta d, ao se fazer uma dobragem de maneira que F e F' coincidam, constata-se que parte da diretriz ficará dobrada em outra direção diferente da inicial.

Considere, ainda, o segmento $\overline{PF'}$ perpendicular à parte "dobrada" da diretriz, em que F' é o pé da perpendicular e P é o ponto de interseção entre o segmento e o vinco gerado pela dobra.

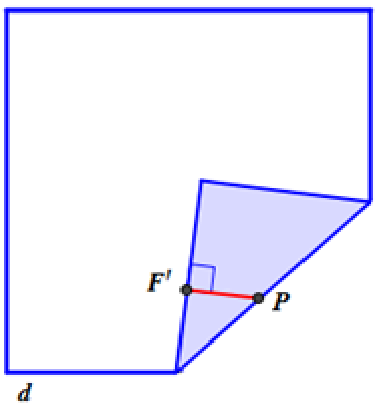

Figura 29 - Segmento $\overline{PF'}$

Por construção, $|\overline{PF}| = |\overline{PF'}|$. Logo, P pertence à parábola.

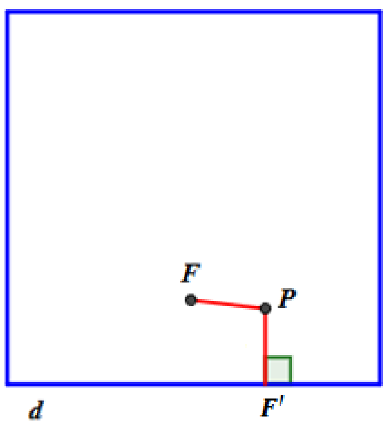

Figura 30 - O ponto pertencente à parábola

A prova da unicidade do ponto P é análoga à mostrada no estudo da elipse. Além disso, pode-se observar que, como o triângulo FPF' é isósceles, o vinco gerado é a bissetriz do ângulo $F\hat{P}F'$. Portanto, esta é a reta tangente à parábola que passa por P (conforme demonstrado no capítulo 2).

5.3.3. Identificação dos elementos através das dobraduras

Identifica-se, a seguir, a reta focal e o vértice *V* da parábola a partir das seguintes instruções:

- Reta focal: efetue a dobra perpendicular à diretriz *d* que passa pelo foco *F* (axioma 4) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértice *V*: obtenha-o marcando a interseção entre a curva e o vinco que representa a reta focal.

Figura 31 - Aplicação do axioma 4

Para identificar o parâmetro[41] da curva, deve-se efetuar uma dobra fazendo com que o foco *F* e o ponto de interseção entre a reta focal e a diretriz *d* coincidam (axioma 2) e observe que o vinco gerado pela dobra passa pelo vértice *V*. Por construção, d(*F*,*V*) = d(*V*, *d*).

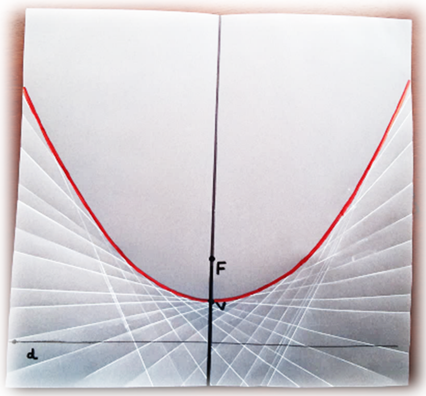

Figura 32 - Os elementos da parábola

[41] A notação usual para o parâmetro da parábola é o número 2p = d(F, d).

É comum que o estudante acredite que, como nas curvas anteriores, a excentricidade da parábola seja a responsável por deixá-la mais “aberta” ou “fechada”.

Ao ser comparada a distância entre o foco *F* e um ponto *P* qualquer da parábola e a distância entre o mesmo ponto *P* e a diretriz da parábola, nota-se que estas distâncias são iguais. Ao se dividirem esses valores, encontram-se sempre o número um como resultado. Portanto, a excentricidade de uma parábola é sempre igual a um, o que nos faz perceber que, na verdade, todas as parábolas são semelhantes entre si.

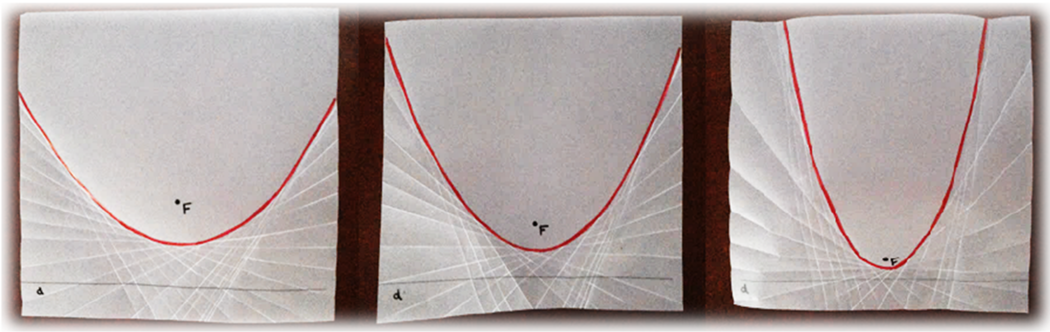

Figura 33 - Parábolas semelhantes

Assim como nas curvas apresentadas anteriormente, a existência da translação e rotação da parábola também pode ser mostrada na atividade com o Origami, conforme se pode observar na imagem a seguir.

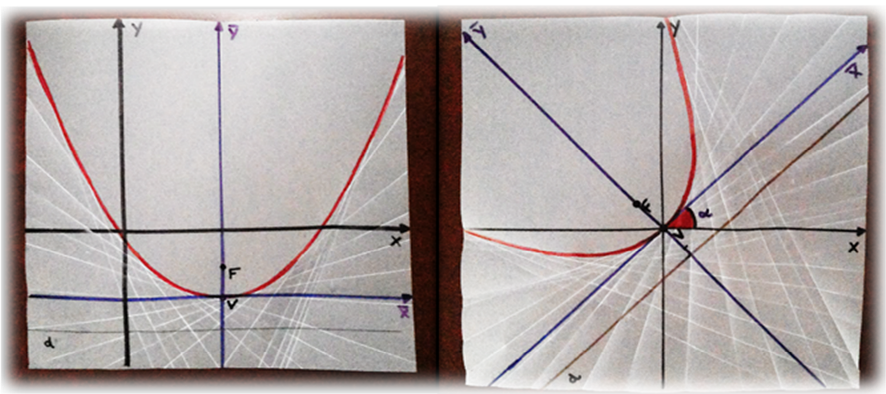

Figura 34 - Translação e rotação da parábola