

4

Descrição axiomática do Origami

Os primeiros estudos sobre as combinações de dobras no Origami começaram na década de 1970. Segundo Lang (2004), em 1989 Humiaki Huzita – matemático ítalo-japonês – apresentou diversos documentos na “*First International Meeting of Origami Science and Technology*”³⁵ (Primeira Reunião Internacional de Origami, Ciência e Tecnologia). Dentre eles, havia um estudo sobre as seis operações básicas capazes de alinhar retas e pontos pré-existent em uma folha de papel por meio de uma única dobra. Este foi o primeiro registro de construções interligando as dobraduras à Geometria.



Figura 1 - Retrato de Humiaki Huzita³⁶

Lang (2004) afirma ainda que, em 1989, o matemático francês Jacques Justin publicou um artigo, no qual foram descritas sete combinações possíveis de alinhamentos. Todavia, segundo Rafael (2011), o sétimo axioma foi formalizado apenas em 2001, pelo matemático japonês Koshiro Hatori.

³⁵ Conferência científica internacional organizada por Humiaki Huzita e realizada na Itália.

³⁶ Disponível em:

<http://www.thaigoodview.com/library/contest2552/type2/dev01/01/origami/math_en.html>. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

As descobertas foram feitas por pesquisadores e em períodos diferentes. Entretanto, esta lista de axiomas é mundialmente conhecida como “Axiomas de Huzita-Hatori”.

Este estudo tomou proporções grandes o suficiente para que o Origami começasse a assumir seu merecido espaço no meio científico. Um exemplo que ilustra este fato é que Hatori (2003) cita problemas matemáticos, que podem ser resolvidos, com eficiência, por meio destas operações, tais como equações de segundo, terceiro e quarto grau com coeficientes racionais; trisseção de um ângulo e a duplicação do cubo.

Os estudiosos, no entanto, levantaram a seguinte questão: “será que não existe mais nenhum axioma além destes que constam na lista?”. Graças ao físico americano Robert Lang (2004), esta dúvida foi sanada. Em seu artigo: “*Origami and Geometric Constructions*”³⁷ (Origami e construções geométricas), Lang demonstrou que a lista dos sete axiomas é completa.

4.1. Os axiomas de Huzita-Hatori

A seguir, serão mostrados os axiomas de Huzita-Hatori juntamente com os diagramas³⁸ que ilustram as dobragens.

Axioma 1: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que os contém.

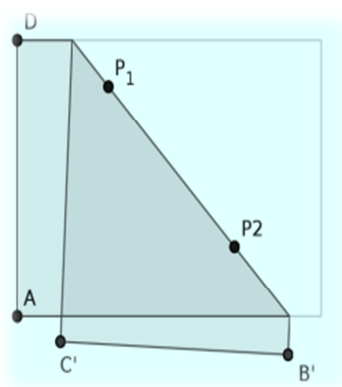


Figura 2 - Axioma de Huzita

³⁷ Demonstração disponível em:

<http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf>. Acesso em 24 de dezembro de 2014

³⁸ Diagramas disponíveis em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila11_yolanda.pdf>. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

Axioma 2: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra capaz de torná-los coincidentes.

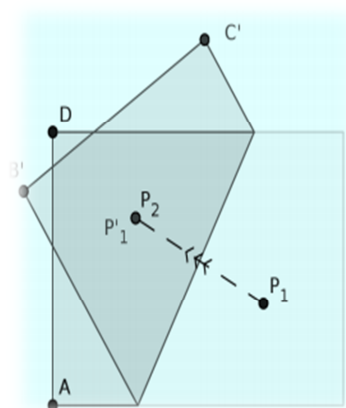


Figura 3 - Axioma de Huzita

Axioma 3: Dadas duas retas distintas, r_1 e r_2 , existem no máximo duas dobras capazes de colocar uma reta sobre a outra. Se r_1 e r_2 são paralelas ou o ponto de interseção encontra-se fora do papel, então, a dobra é única.

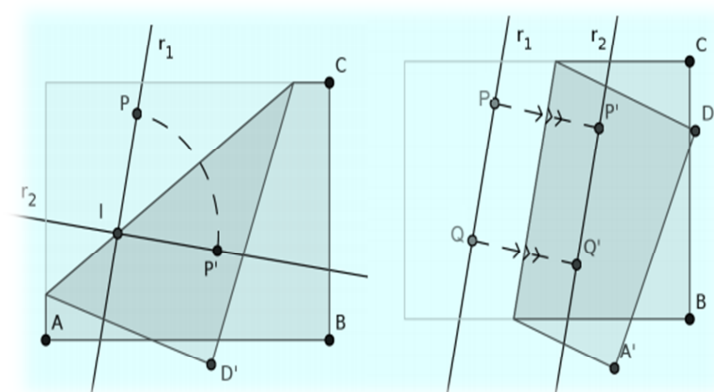


Figura 4 - Axioma de Huzita

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r , existe apenas uma dobra perpendicular a r que passa por P .

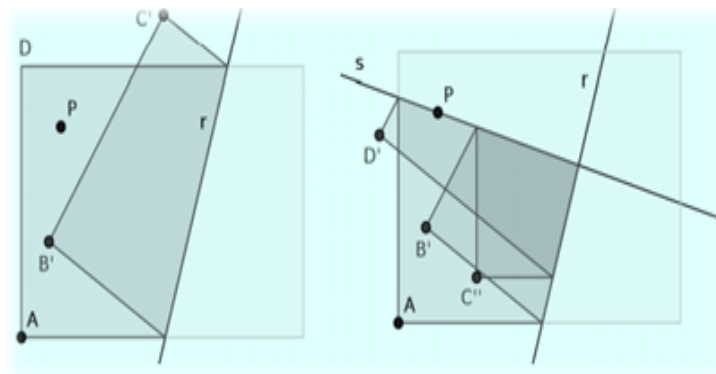


Figura 5 - Axioma de Huzita

Axioma 5: Dados dois pontos P_1 e P_2 , e uma reta r , se a distância entre P_1 e P_2 for maior ou igual à distância de P_2 à r , existe pelo menos uma dobra capaz de fazer com que P_1 incida em r de forma que a mesma passe pelo ponto P_2 . Se a distância de P_1 a P_2 for igual a distância de P_2 a r , então, a dobra é única, caso contrário, existem duas dobras possíveis.

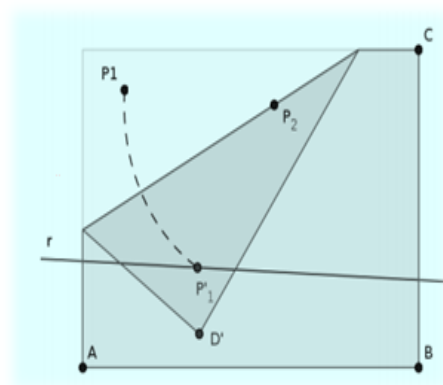


Figura 6 - Axioma de Huzita

Axioma 6: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 e duas retas não paralelas r_1 e r_2 (se paralelas, a distância entre as mesmas não deve ser superior à distância entre os pontos) existe uma dobra que faz, simultaneamente, com que P_1 incida em r_1 e P_2 em r_2 .

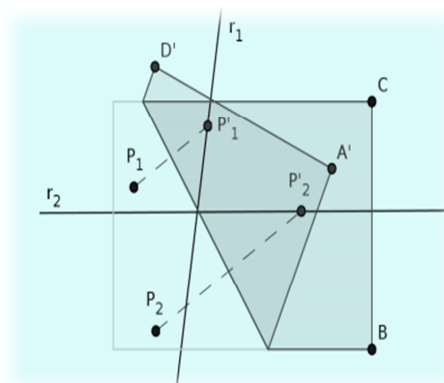


Figura 7 - Axioma de Huzita

Axioma 7: Dadas duas retas r_1 e r_2 não paralelas e um ponto P não pertencente a r_1 , existe uma dobragem que faz P incidir em r_1 de forma que o vinco gerado pela dobra seja perpendicular a r_2 .

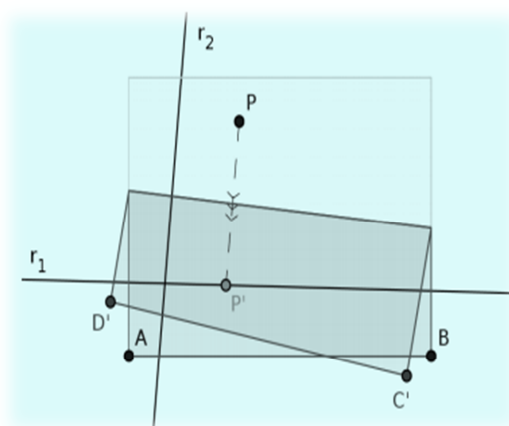


Figura 8 - Axioma de Hatori

4.2. A reta e o ponto

A fim de que a apresentação e explicação dos “Axiomas de Huzita-Hatori” sejam de fato compreendidas, a seguir, serão mostrados alguns conceitos de reta e ponto no plano $\mathbb{R}^2$.

4.2.1. A reta

De acordo com um dos axiomas elencados pela Geometria Euclidiana, tem-se que, por dois pontos passa uma única reta. Esta informação permite definir a referida equação, utilizando diferentes artifícios, tais como: vetores e produto interno.

Entretanto, será focado neste texto o estudo da equação reduzida de uma reta no plano que, por sua vez, possui lei de formação dada por $y = mx + n$, em que: x e y são as coordenadas do ponto pertencente à reta, m é o seu coeficiente angular³⁹ (ou declividade) e n é o coeficiente linear da mesma.

Seja r uma reta pertencente ao plano $\mathbb{R}^2$, será visto a seguir, uma maneira de encontrar sua equação reduzida.

Dados dois pontos A e B pertencentes à reta r , em que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $x_1 \neq x_2$, para encontrar a equação que passa por tais pontos, resolve-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Ou seja:

$$n = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$$

$$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

Logo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$n = y_1 - x_1 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \text{ ou } n = y_2 - x_2 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Desta maneira, a equação reduzida da reta r é dada por:

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot x + y_1 - x_1 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$\text{Equivalentemente, } y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot x + y_2 - x_2 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

É válido observar que os dois valores m e n são suficientes para descrever praticamente qualquer reta, uma vez que a mesma é definida pelo conjunto dos pares ordenados (x, y) que satisfazem a equação. As retas paralelas ao eixo das ordenadas são definidas com equações do tipo $x = a$.

³⁹ O coeficiente angular da reta é a tangente do seu ângulo de inclinação.

4.2.2. O ponto

Um ponto é representado em $\mathbb{R}^2$ por meio do par ordenado (x, y) . Tem-se, ainda, que interseção de duas retas não paralelas e não coincidentes no $\mathbb{R}^2$ é um ponto.

A distância entre dois pontos no plano pode ser encontrada da seguinte maneira:

Seja $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos do plano $\mathbb{R}^2$.

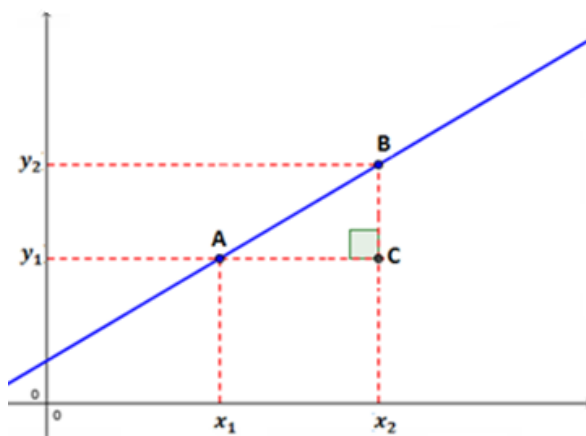


Figura 9 - Distância entre dois pontos

A distância do ponto A ao ponto B é dada pela hipotenusa do triângulo ABC , em que $C = (x_2, y_1)$. Se $|AC| = |x_1 - x_2|$ e $|CB| = |y_1 - y_2|$, utilizando o Teorema de Pitágoras, encontra-se que a distância entre os pontos A e B , representada por $d(A, B)$ é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

4.2.3. Explicação analítica dos axiomas

Segundo Oliveira (2008), na axiomática apresentada, admite-se um referencial ortonormado em um papel de tamanho suficiente para conter as construções necessárias. Além disso, a garantia da existência das dobras está relacionada às soluções geométricas que a seguir serão apresentadas. Prova-se a existência das referidas dobras encontrando as equações das retas que as definem.

Cavacami e Furuya (2009) salientam que:

- As dobras geram vincos que representam retas;
- Se P é um ponto da folha a ser dobrada, então P é levado ao seu simétrico P' em relação ao vinco (reta gerada pela dobra);
- O vinco gerado pela dobra é a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$;
- Tal vinco é também a bissetriz de cada ângulo $P\hat{Q}P'$, em que Q é um ponto qualquer pertencente à reta de dobragem.

Como se pode observar, as mediatrizes, bissetrizes, perpendiculares e paralelas são construções essenciais no Origami. Sendo assim, é necessário que estes conceitos sejam previamente conhecidos.

Axioma 1: Dobragem única através de dois pontos

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, prova-se a existência desta dobragem, encontrando a equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 .

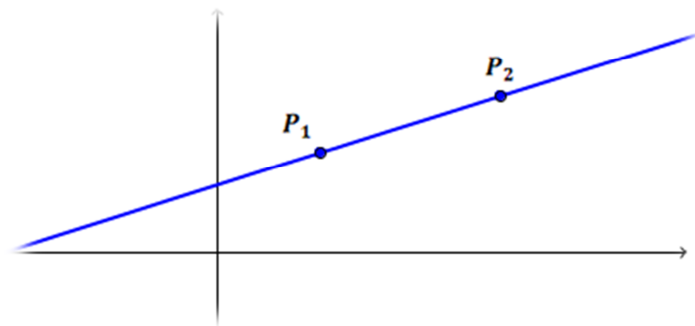


Figura 10 - Reta definida por dois pontos

De fato, seja $r: y = mx + n$, a reta gerada pela dobragem. Tem-se:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, encontra-se a equação reduzida da reta conforme mostrado na seção anterior, cujos coeficientes são dados por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad n = y_1 - mx_1 \quad \text{ou} \quad n = y_2 - mx_2.$$

Axioma 2: Uma única dobragem que torna dois pontos coincidentes

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, a dobra que os torna coincidentes é a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$. Ou seja, o vinco gerado pela dobra passa pelo ponto médio M do segmento $\overline{P_1P_2}$ dado por $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

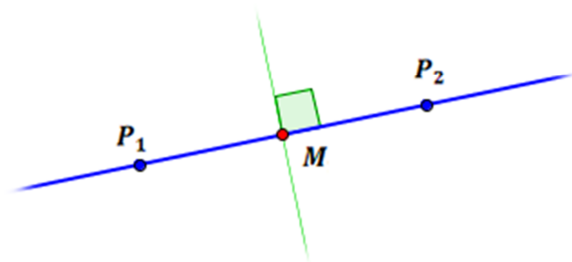


Figura 11 - Mediatriz

Ao serem utilizados os resultados obtidos na explicação do axioma 1, conclui-se que o coeficiente angular da reta definida pelos pontos P_1 e P_2 é dado por: $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Desta maneira, o coeficiente angular⁴⁰ da reta perpendicular à reta definida pelos pontos P_1 e P_2 e que passa pelo ponto M é dado por: $m_2 = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$.

Efetuada as devidas substituições, conclui-se que o coeficiente linear da reta definida pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$ é dado por:

$$n_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} - \left(\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2y_2 - 2y_1}.$$

Ou seja, a reta pretendida é expressa por: $y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}x + \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2y_2 - 2y_1}$.

Axioma 3: Dobragem capaz de colocar uma reta sobre a outra

Sejam $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_2x + n_2$ duas retas não coincidentes, tem-se que as mesmas podem ser paralelas ou concorrentes. Analisam-se, a seguir, três casos:

(I) Ao considerar r_1 e r_2 paralelas, em que $m_1 = m_2 = 0$ e $n_1 \neq n_2$, encontra-se $r_1: y = n_1$ e $r_2: y = n_2$. Para se encontrar a reta de dobragem se faz a média aritmética entre os valores n_1 e n_2 . Logo, a reta pretendida é dada por: $y = \frac{n_1 + n_2}{2}$, conforme se pode ver na ilustração abaixo.

⁴⁰ Duas retas com coeficientes angulares m_1 e m_2 , respectivamente, são perpendiculares se e somente se $m_1 \cdot m_2 = -1$.

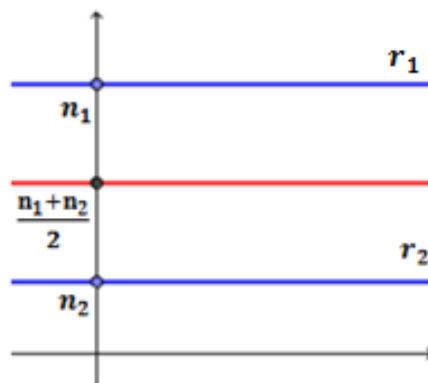


Figura 12 - Reta de dobragem

(II) Ao considerar r_1 e r_2 paralelas em que $m_1 = m_2 \neq 0$ e $n_1 \neq n_2$, obtém-se $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_1x + n_2$, tal que $P = (x_1, m_1x_1 + n_1)$ é um ponto pertencente à reta r_1 e $t: y = -\frac{x}{m_1} + m_1x_1 + n_1 + \frac{x_1}{m_1}$ é a equação da reta perpendicular à r_1 que passa por P . Chama-se de P' o ponto de interseção entre as retas r_2 e t .

Desta maneira, as coordenadas de P' serão dadas por meio da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{m_1} + m_1x_1 + n_1 + \frac{x_1}{m_1} \\ y = m_1x + n_2 \end{cases}$$

$$m_1x + n_2 = -\frac{x}{m_1} + m_1x_1 + n_1 + \frac{x_1}{m_1}$$

$$m_1x + \frac{x}{m_1} = m_1x_1 + n_1 - n_2 + \frac{x_1}{m_1}$$

$$x\left(m_1 + \frac{1}{m_1}\right) = m_1x_1 + n_1 - n_2 + \frac{x_1}{m_1}$$

$$x\left(\frac{m_1^2 + 1}{m_1}\right) = \frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1}$$

$$x = \frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1}$$

$$y = m_1\left(\frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1}\right) + n_2$$

Segue que: $P' = \left(\frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1}, m_1\left(\frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1}\right) + n_2\right)$

A reta pretendida possui coeficiente angular igual a m_1 e passa por M : o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$, conforme ilustra a figura a seguir.

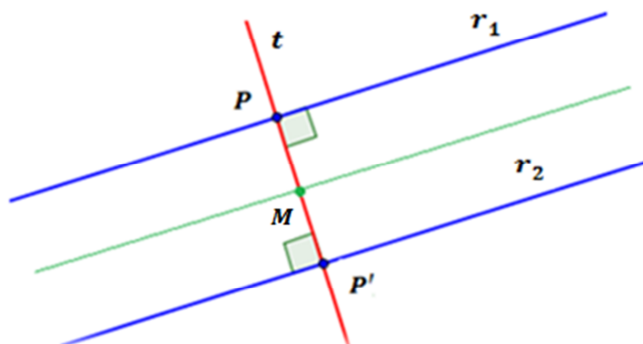


Figura 13 - Reta de dobragem

A reta desejada poderia ter sido encontrada, ainda, por meio do método utilizado no estudo do axioma 2.

(III) Para r_1 e r_2 concorrentes, tem-se que uma reta de dobragem é determinada pela bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas r_1 e r_2 , em que $m_1 \neq m_2$ e, conseqüentemente, $m_1 - m_2 \neq 0$.

A fim de se encontrar o ponto I de interseção entre as retas r_1 e r_2 , resolve-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$$

$$m_1x + n_1 = m_2x + n_2$$

$$m_1x - m_2x = n_2 - n_1$$

$$x(m_1 - m_2) = n_2 - n_1$$

$$x = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$$

Substituindo na segunda equação:

$$y = \frac{m_2n_2 - m_2n_1 + m_1n_2 - m_2n_2}{m_1 - m_2}$$

$$y = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{Logo, } I = \left(\frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{m_1 - m_2} \right)$$

Considerando uma circunferência auxiliar de centro I e raio arbitrário d , sua equação será expressa por: $\left(x - \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}\right)^2 + \left(y - \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_1 - m_2}\right)^2 = d^2$

Considera-se, ainda, que as retas r_1 e r_2 intersectam a circunferência em quatro pontos distintos:

- A reta r_1 intersecta nos pontos: $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$.
- A reta r_2 intersecta nos pontos: $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$.

Neste caso, a reta que determina a bissetriz de um dos ângulos formados passa pelos pontos médios M_1 e M_2 dos segmentos $\overline{P_1 P_3}$ e $\overline{P_2 P_4}$, respectivamente, em que $M_1 = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$ e $M_2 = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$, conforme se pode verificar na ilustração a seguir.

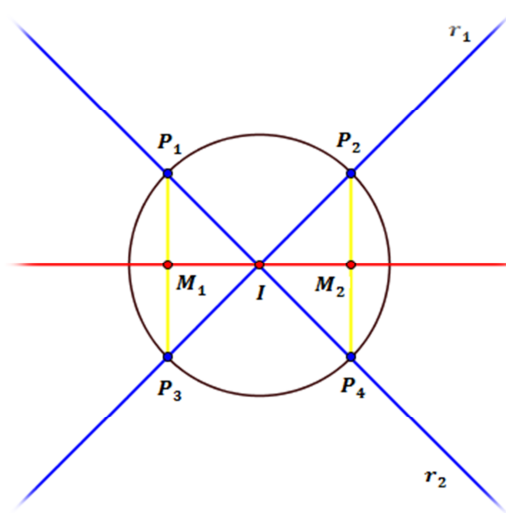


Figura 14 - Reta dada pela bissetriz

Para determinar a equação da reta, basta utilizar o mesmo processo de resolução sugerido na explicação do primeiro axioma. Este problema pode, ainda, ser resolvido por meio da adição de vetores. A dobra que pode ser obtida neste caso encontra-se por meio dos pontos médios dos segmentos $\overline{P_1 P_2}$ e $\overline{P_3 P_4}$, respectivamente.

Axioma 4: Única dobragem perpendicular a uma reta, em que o vinco gerado pela dobra passa por um ponto dado

Seja o ponto $P = (x, y)$ e a reta $r: y = mx + n$, para que seja definida a equação da reta obtida por meio da dobra, é necessário considerar uma

circunferência auxiliar de centro P , cujo raio é maior do que a distância entre a reta r e o centro P da circunferência. Sendo assim, a reta intersecta a circunferência em dois pontos chamados P_1 e P_2 .

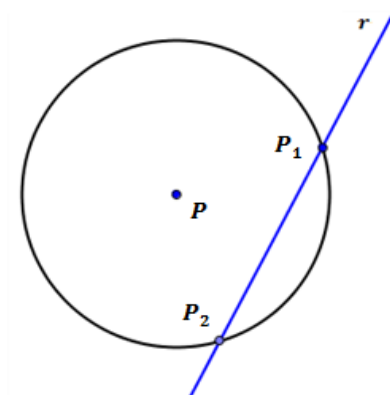


Figura 15 - Reta r

A reta pretendida passa pelo ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$ e o centro P da circunferência ou, ainda, se poderia utilizar a demonstração do segundo axioma em relação aos pontos P_1 e P_2 .

Axioma 5: Dobra capaz de fazer um ponto incidir em uma reta, de forma que o vinco gerado pela dobra passe por outro ponto

Dados os pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e a reta $r: y = mx + n$, para que se obtenha a equação pretendida, encontra-se a interseção entre a referida reta e a circunferência auxiliar de centro P_2 e raio $\overline{P_1P_2}$, designado por d . Seja a equação da circunferência dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = d^2$, determinam-se as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção entre ambas resolvendo o sistema a seguir:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = d^2 \end{cases}$$

Substituindo:

$$(x - x_2)^2 + (mx + n - y_2)^2 = d^2$$

$$(1 + m^2)x^2 + (2mn - 2x_2 - 2my_2)x + (x_2^2 + n^2 - 2ny_2 + y_2^2 - d^2) = 0$$

Pode-se observar que este problema carece da solução de uma equação do segundo grau. Portanto, pode-se obter zero, uma ou duas soluções para a mesma.

Se a distância entre os pontos P_1 e P_2 for menor do que a distância entre o ponto P_2 e a reta r , o discriminante da equação acima será negativo, ou seja, não existirá ponto de interseção entre a circunferência de raio $\overline{P_1P_2}$ e a reta r .

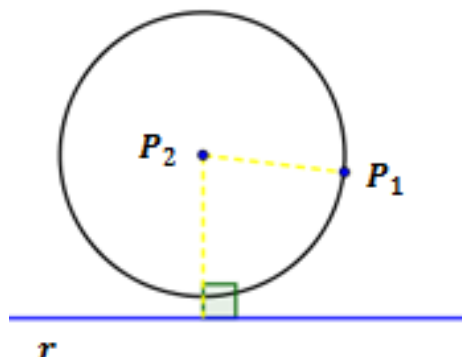


Figura 16 - Nenhum ponto de interseção

Se a distância entre os pontos P_1 e P_2 for igual à distância entre o ponto P_2 e a reta r , o discriminante da equação acima será igual a zero, ou seja, haverá apenas um ponto de interseção P'_1 entre a circunferência de raio $\overline{P_1P_2}$ e a reta r . Neste caso, a equação da reta pretendida é dada pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P'_1}$.

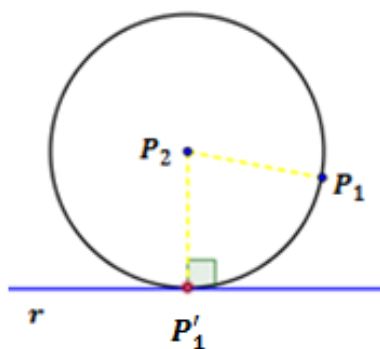


Figura 17 - Um ponto de interseção

Se a distância entre os pontos P_1 e P_2 for maior do que distância entre P_2 e a reta r , o discriminante da equação será positivo, ou seja, existirão dois pontos de interseção entre a circunferência de raio $\overline{P_1P_2}$ e a reta r que será chamada de P'_1 e P''_2 .

Dados M_1 e M_2 , os pontos médios dos segmentos $\overline{P_1P'_1}$ e $\overline{P_1P''_1}$ respectivamente, serão efetuadas duas dobras distintas determinadas pelos segmentos $\overline{P_2M_1}$ e $\overline{P_2M_2}$.

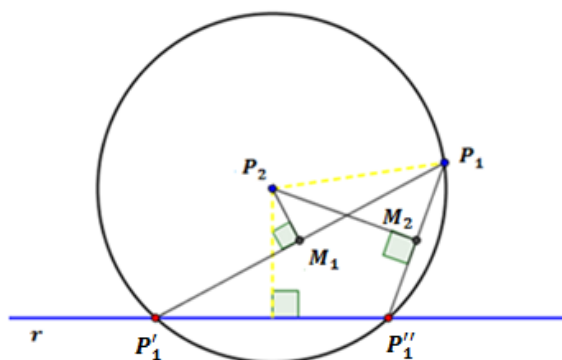


Figura 18 - Dois pontos de interseção

Cabe a observação de que por meio deste axioma é possível determinar a reta tangente à parábola de foco P_1 e diretriz r , em que a referida reta passa por P_2 .

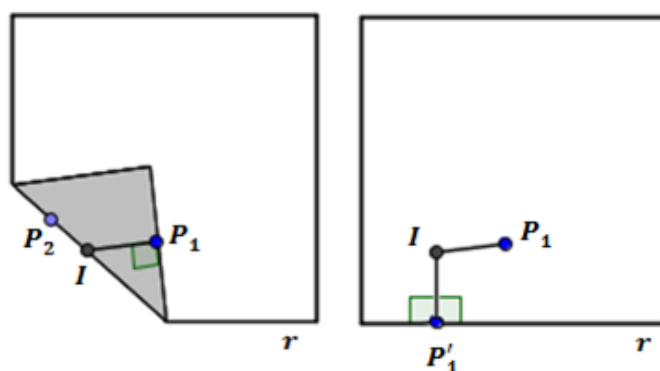


Figura 19 - Aplicação do axioma 5

Conforme a ilustração acima sugere, ao ser efetuada a dobra, se fará com que P_1 incida em um ponto P'_1 da parte da diretriz dobrada (em uma direção diferente da inicial). Encontra-se, ainda, um ponto I de interseção entre um segmento perpendicular à parte diretriz que passa por P'_1 e a reta de gerada pela dobra. Por construção, os segmentos $\overline{IP'_1}$ e $\overline{IP_1}$ têm o mesmo comprimento. Sendo

assim, por definição, o ponto I pertence à parábola de foco P_1 e diretriz r , cuja reta de dobragem é tangente à curva pelo ponto I .

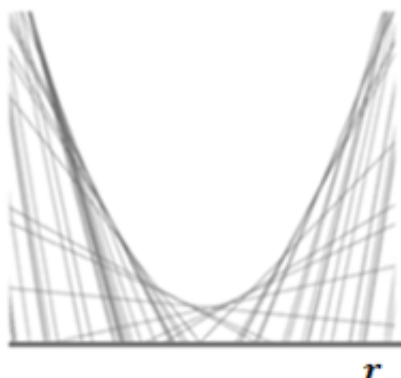


Figura 20 - Formação de uma parábola

Axioma 6: Dobra que faz dois pontos distintos incidirem em duas retas distintas

Com relação aos axiomas apresentados anteriormente, não há garantia de independência entre os mesmos, já que todos geram construções que dependem apenas de régua e compasso. Todavia, o axioma agora referido gera uma construção que não pode ser feita por meio destes instrumentos, o que mostra que o sexto axioma não é consequência dos cinco primeiros.

Conforme visto na explicação do axioma anterior, dados os pontos P_1 e P_2 e as retas r_1 e r_2 , ao ser feita uma dobragem de forma que P_1 incida em r_1 , se estará determinando com o vinco, uma reta tangente à parábola de diretriz r_1 e foco P_1 . O mesmo ocorre para o ponto P_2 e a reta r_2 . “Deste modo, este axioma consiste em encontrar uma reta simultaneamente tangente a duas parábolas distintas.” (Monteiro, p.18, 2008).

Sem perda de generalidade, é tomado $r_1: y = -1$ e $P_1 = (0,1)$. Seja P_1' um ponto pertencente à diretriz r_1 , se tem que $P_1' = (t, -1)$ é o ponto em que P_1 incide na reta r_1 através da dobragem. Por construção, esta dobragem é dada pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_1'}$. M_1 , sendo este o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_1'}$, portanto $M_1 = \left(\frac{t}{2}, 0\right)$.

A equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_1' é dada por $y = -\frac{2x}{t} + 1$.

Portanto, o coeficiente angular a da reta definida pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_1'}$ é dado por $a = \frac{t}{2}$ e o coeficiente linear b da mesma é dado por $b = -\frac{t^2}{4}$.

Assim, $y = \frac{tx}{2} - \frac{t^2}{4}$ é a equação da reta representada pelo vinco gerado por meio da dobra.

A fim de ser definida esta reta, se quer que o ponto médio de $\overline{P_2P_2'}$ também pertença ao vinco gerado pela dobra anteriormente descrita, em que $P_2 = (x_1, y_1)$ e $P_2' = (x, y)$, ou seja, se quer que o ponto $M_2 = \left(\frac{x_1+x}{2}, \frac{y_1+y}{2}\right)$ pertença à reta de dobragem definida pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_1'}$.

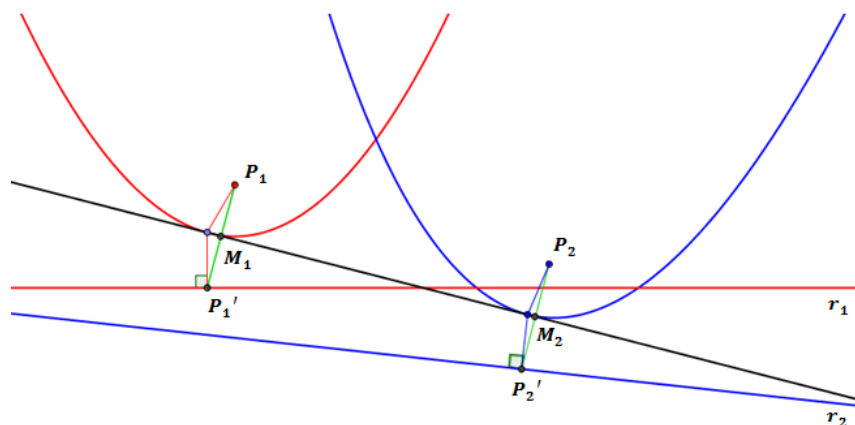


Figura 21 - Tangente comum a duas parábolas

Desta maneira, será feita a seguinte substituição:

$$\frac{y_1 + y}{2} = \frac{t(x_1 + x)}{4} - \frac{t^2}{4}$$

Mostra-se que as retas definidas por P_1 e P_1' e P_2 e P_2' , respectivamente, têm a mesma inclinação, visto que a reta de dobragem é mediatriz dos segmentos $\overline{P_1P_1'}$ e $\overline{P_2P_2'}$. Em virtude disso, encontra-se a seguinte equação: $-\frac{2}{t} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

Fazendo substituições por meio das duas equações anteriormente mostradas, se tem como resultado a seguinte equação:

$$(y_1 + y)(y_1 - y)^2 = (x_1^2 - x^2)(y_1 - y) - 2(x_1 - x)^2$$

Pode ser encontrado zero, uma, duas ou três dobras que satisfaçam este axioma. Se as retas r_1 e r_2 forem paralelas e a distância entre elas for maior do que distância entre os dois pontos P_1 e P_2 será impossível resolver este problema, pois não existirá tangente comum às parábolas descritas.

Axioma 7: Única dobragem capaz de fazer um ponto incidir em uma reta, por meio de uma dobragem perpendicular a uma outra reta não paralela à inicial

O referido axioma foi acrescentado por Koshiro Hatori apenas em 2001, cuja demonstração é consequência dos axiomas 4 e 2. Apesar deste fato, a sua importância na lista não é invalidada, pois sua construção é feita por meio de um movimento único.

Dados o ponto $P = (x_1, y_1)$, e as retas $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_2x + n_2$, é necessário determinar uma dobragem que faça com que o ponto P seja levado à P' pertencente à reta r_1 e, simultaneamente, seja perpendicular a r_2 . Para isso, a reta r_3 que passa por P e P' deverá ser paralela à reta r_2 e, conseqüentemente, a reta desejada será determinada pela mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.

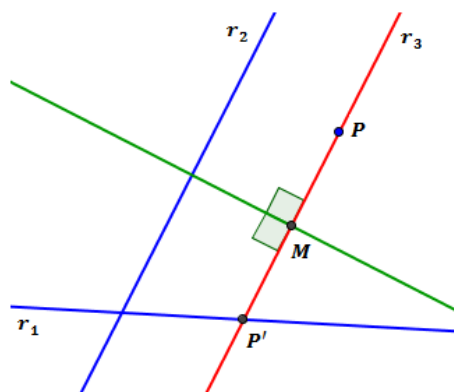


Figura 22 - Construção do sétimo axioma

Seja $r_3: y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$ a reta paralela à r_2 que passa por P , encontram-se as coordenadas do ponto P' por meio de interseção entre as retas r_1 e r_3 resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + (y_1 - m_2x_1) \end{cases}$$

Logo:

$$m_1x + n_1 = m_2x + (y_1 - m_2x_1).$$

$$x(m_1 - m_2) = y_1 - m_2x_1 - n_1$$

$$x = \frac{y_1 - m_2x_1 - n_1}{m_1 - m_2}$$

Substituindo x na primeira equação:

$$y = m_1 \left(\frac{y_1 - m_2x_1 - n_1}{m_1 - m_2} \right) + n_1$$

$$\text{Conclui-se, assim, que } P' = \left(\frac{y_1 - m_2x_1 - n_1}{m_1 - m_2}, m_1 \left(\frac{y_1 - m_2x_1 - n_1}{m_1 - m_2} \right) + n_1 \right)$$

Agora, basta realizar a dobragem, pelo axioma 2, que torna os pontos P e P' coincidentes.