2
As Cônicas

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013), historiadores creditam ao matemático grego Menaecmus (380 a. C – 320 a.C.) a descoberta do estudo das Curvas Cônicas. Acredita-se que o referido geômetra tenha usado as curvas como mecanismo para resolução do clássico Problema Deliano[1].

Contudo, a principal associação histórica às curvas em questão é dada ao matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.). Apolônio é o autor da importantíssima obra chamada "As Cônicas", composta por oito livros, dos quais os quatro primeiros foram escritos em grego e os três seguintes traduzidos em árabe, sendo, infelizmente, o oitavo volume perdido. Segundo Boyer (1974), a obra de Apolônio é considerada a mais completa no que se refere ao presente estudo.

De acordo com Eves, o "Grande Geômetra" [2] utilizou pela primeira vez os nomes "Parábola", "Elipse" e "Hipérbole" para designar as seções descritas. O autor, ainda, afirma:

> Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou obliquo. (Eves, 2011, p. 199)

[1] Conhecido também como problema da duplicação do cubo, este é um dos três problemas geométricos, a saber: a trisseção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo. Dada a aresta de um cubo, o objetivo neste problema é construir, com o auxílio da régua e do compasso, a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do inicial.

[2] Assim era conhecido o matemático Apolônio de Perga que, por sua importância nos estudos da Geometria, tornou-se um dos mais originais matemáticos gregos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

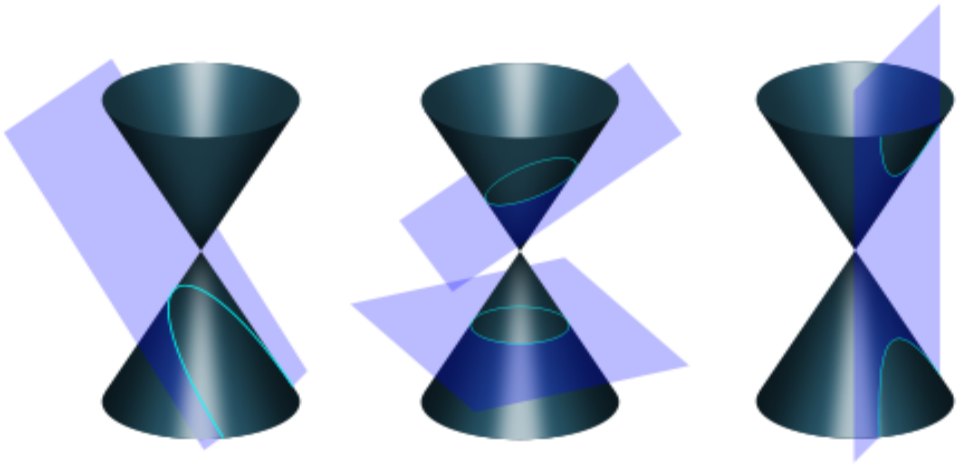

Figura 1 - Seções Cônicas[3]

Como se pode observar na figura fornecida acima, quando o plano é paralelo a uma geratriz do cone, a curva obtida é uma parábola. Se o plano secciona apenas uma das folhas do cone e, além disso, intercepta todas as geratrizes, a curva gerada é uma elipse. A hipérbole, por sua vez, é obtida por meio da interseção entre o plano e ambas as folhas do cone.

Ainda, neste estudo, existem as cônicas degeneradas, tais como uma reta (parábola), um ponto (elipse) e um par de retas (hipérbole). Estas também são obtidas por meio de intersecções entre um plano e um cone circular duplo.

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013), em 1636, ao elaborar a obra "*Ad locos planos et solidos isagoge*" (Introdução aos lugares planos e sólidos), Pierre de Fermat (1601 – 1665) estabeleceu um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana. Com isso, o matemático e cientista francês mostrou que as curvas cônicas podem ser descritas por equações algébricas de duas variáveis combinadas com os conceitos dos lugares geométricos[4] discutidos por Apolônio. Em sua linguagem atual, as equações são descritas por:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

De acordo com Venturi:

> Coube a Pierre de Fermat (1601 – 1665) a descoberta das equações da reta e da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

[3] Disponível em: <http://www.galileu.esalq.usp.br/mostra_topico.php?cod=73>. Acesso em 30 de dezembro de 2014.

[4] De acordo com Machado (1982), denominamos lugar geométrico a um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

> Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau à sua forma mais simples. (Venturi, 1949, p. 21)

As contribuições de Fermat foram primordiais para o estudo destas curvas. Segundo o referido autor, muitos historiadores acreditam que tal manuscrito tenha sido o marco zero da Geometria Analítica.

A seguir, serão mostradas as definições dos lugares geométricos representados pelas curvas cônicas, além dos seus elementos e equações mais simples conforme proposto no Ensino Médio. É dado destaque, ainda, às transformações de coordenadas e retas tangentes às curvas.

2.1. Elipse

2.1.1. Definição

Machado traz a seguinte definição para a elipse: "A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano, F_1 e F_2, é uma constante $2a$ *(*maior do que a distância $\overline{F_1F_2}$)". (Machado, 1982, p. 116)

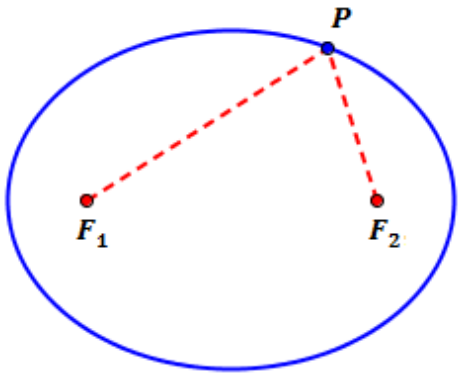

Figura 2 - A elipse

Desta maneira, seja E uma elipse, tem-se que:

$E = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

2.1.2.
Notações usuais

É comum encontrar as seguintes notações[5] para os elementos da elipse:

- A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 da elipse é chamada de reta focal. Além disso, $|\overline{F_1F_2}| = 2c$;

- Os pontos de interseção entre a curva e a reta focal são chamados de vértices A_1 e A_2;

- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de eixo focal, em que $|\overline{A_1A_2}| = 2a$;

- O ponto médio do eixo focal é chamado de centro C;

- A reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro C é chamada de reta não focal;

- Os pontos de interseção entre a curva e a reta não focal são chamados de vértices B_1 e B_2;

- O eixo não focal é determinado pelo segmento $\overline{B_1B_2}$ cuja notação usual para seu comprimento é $2b$;

- A excentricidade da elipse é determinada pelo número $e = \frac{c}{a}$, em que $0 \leq e < 1$.

Observe que $|\overline{F_1B_1}| = |\overline{B_1F_2}| = |\overline{F_1B_2}| = |\overline{F_2B_2}|$ e $|\overline{F_1B_1}| + |\overline{B_1F_2}| = 2a$. Portanto, $|\overline{F_1B_1}| = |\overline{B_1F_2}| = |\overline{F_1B_2}| = |\overline{F_2B_2}| = a$. Além disso, $a^2 = b^2 + c^2$.

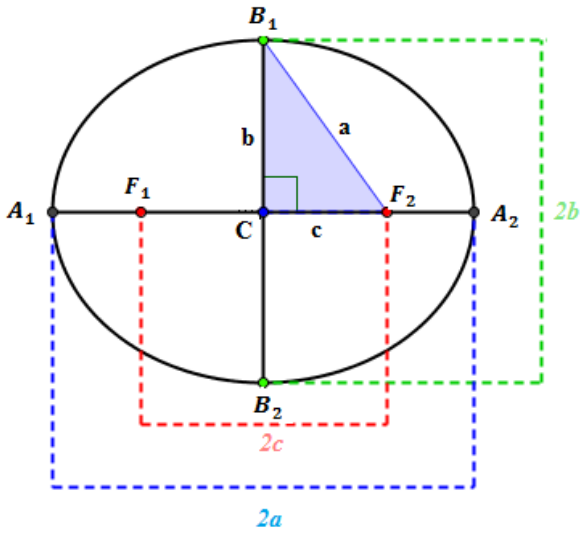

Figura 3 - Elementos da elipse

[5] Estas notações são utilizadas para efeito de simplificação.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

2.1.3.
Forma canônica da Elipse centrada na origem

Podem-se relacionar as definições enunciadas a um sistema de eixos ortogonais XOY, em que P ∈ $\mathbb{R}^2$. Divide-se o estudo da forma canônica da elipse centrada na origem nos seguintes casos:

1º caso: seja E uma elipse centrada na origem cuja reta focal coincide com o eixo OX, tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por:

$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$.

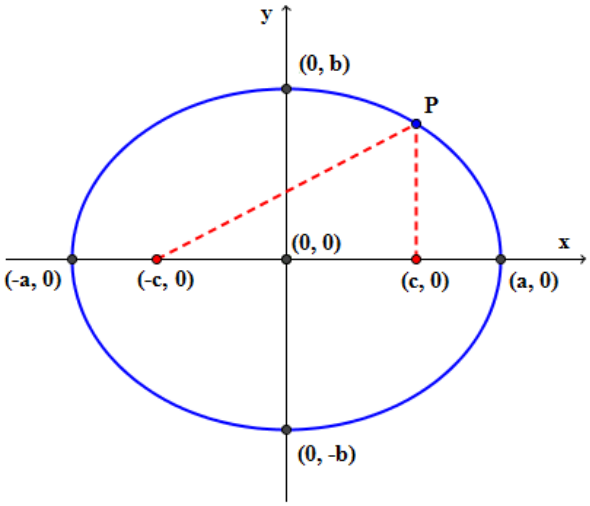

Figura 4 - Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX

A partir da definição do lugar geométrico da elipse, encontra-se a equação que a define por meio do cálculo da distância entre dois pontos.

Por definição, se P = (x, y) pertence à elipse, então d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + 2.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + 2y^2 = 4a^2$$

$$2.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2y^2 - (x + c)^2 - (x - c)^2$$

$$2.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2y^2 - 2x^2 - 2c^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} == 2a^2 - y^2 - x^2 - c^2$$

Ou ainda:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

$$\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx).(x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} = 2a^2 - y^2 - x^2 - c^2$$

$$(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = [2a^2 - (x^2 + c^2 + y^2)]^2$$

$$-4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2)$$

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + c^2 + y^2)$$

Substituindo $c^2 = a^2 - b^2$:

$$-(a^2 - b^2)x^2 = a^4 - a^2(x^2 + a^2 - b^2 + y^2)$$

$$-a^2x^2 + b^2x^2 = a^4 - a^2x^2 - a^4 + a^2b^2 - a^2y^2$$

$$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

Conclui-se, assim, que a equação da elipse é dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2º caso: seja *E* uma elipse centrada na origem cuja reta focal coincide com o eixo OY, tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por:

$F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

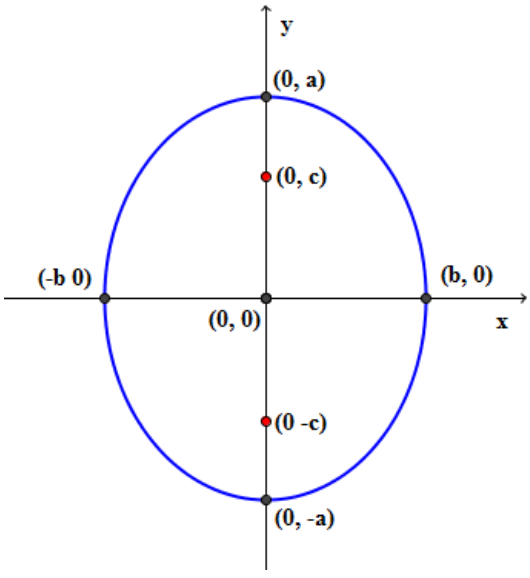

Figura 5 - Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY

Utilizando os mecanismos expostos no primeiro caso, encontra-se a seguinte equação: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

2.2.
Hipérbole

2.2.1.
Definição

Machado traz a seguinte definição para a hipérbole: “A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a diferença, em valor absoluto, das distâncias a dois pontos fixos desse plano, F_1 e F_2, é uma constante $2a$ *(*menor do que a distância $\overline{F_1F_2}$)”. (Machado, 1982, p. 121)

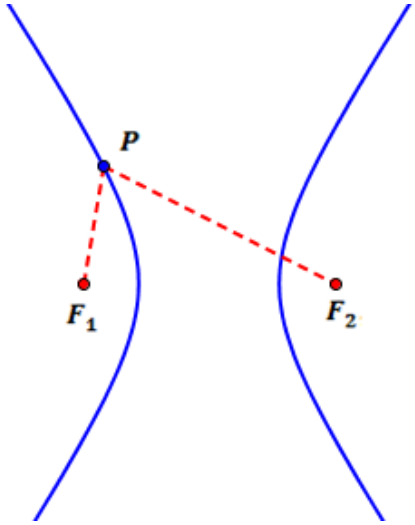

Figura 6 - A hipérbole

Desta maneira, seja H uma hipérbole, tem-se que:

$H = \{P \,|d(P, F_1) - \, d(P, F_2) = \pm 2a\}$.

2.2.2.
Notações usuais

É comum encontrar as seguintes notações para os elementos da hipérbole:

- A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 da hipérbole é chamada de reta focal. Além disso, $|\overline{F_1F_2}| = 2c$;

- Os pontos de interseção entre a curva e a reta focal são chamados de vértices A_1 e A_2;

- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de eixo focal, em que $|\overline{A_1A_2}| = 2a$;

- O ponto médio do eixo focal é chamado de centro C;

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

- A reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro C é chamada de reta não focal;

- O eixo não focal da hipérbole é determinado pelo segmento $\overline{B_1B_2}$ cujo comprimento é $2b$ e o seu ponto médio é o centro C, em que $b^2 = c^2 - a^2$.

- Os pontos B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole;

- A excentricidade da curva é determinada pelo número $e = \frac{c}{a}$, em que $c > a$ e consequentemente, $e > 1$.

- O retângulo da base de H tem os vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 como os respectivos pontos médios dos seus lados e as retas que contêm as diagonais do retângulo da base da hipérbole são as assíntotas[6] de *H*. Desta maneira, as assíntotas da hipérbole são as retas que passam pelo centro C da curva e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal.

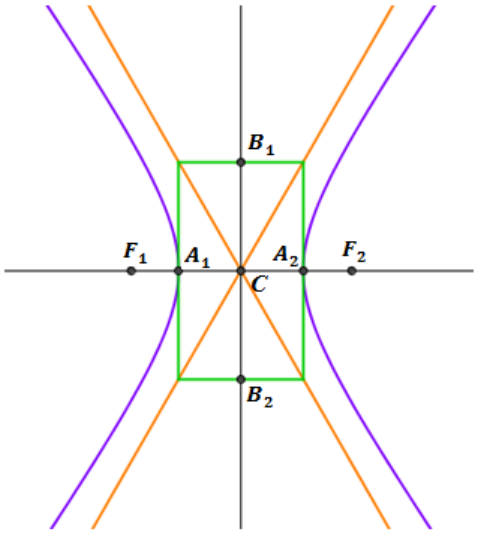

Figura 7 - Elementos da hipérbole

2.2.3. Forma canônica da hipérbole centrada na origem

Conforme feito no estudo da elipse, utilizam-se as definições enunciadas em um sistema de eixos ortogonais *XOY*, em que $P \in \mathbb{R}^2$. Divide-se o estudo da forma canônica da hipérbole centrada na origem nos seguintes casos:

[6] As assíntotas não interceptam a hipérbole.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

1º caso: seja H uma hipérbole centrada na origem, cuja reta focal coincide com o eixo OX, tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ *e* $B_2 = (0, b)$.

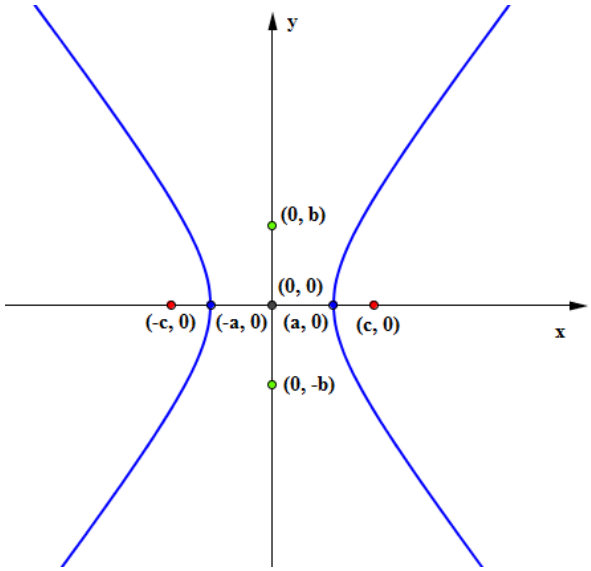

Figura 8 - Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX

A partir da definição da hipérbole, encontra-se a equação que a define através do cálculo da distância entre dois pontos.

Por definição, se $P = (x, y)$ pertence à hipérbole, então:

$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a.$

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$(x+c)^2 - 2.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + 2y^2 = 4a^2$$

$$-2.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2y^2 - (x+c)^2 - (x-c)^2$$

$$-2.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2y^2 - 2x^2 - 2c^2$$

Ou ainda:

$$\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx).(x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} = -2a^2 + y^2 + x^2 + c^2$$

$$(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = [-2a^2 + (x^2 + c^2 + y^2)]^2$$

$$-4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2)$$

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + c^2 + y^2)$$

Substituindo $c^2 = a^2 + b^2$:

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 - a^2y^2$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

Dividindo ambos os membros por $-a^2b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

Encontra-se, assim, a equação da hipérbole dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2º caso: seja *H* uma hipérbole centrada na origem, cuja reta focal coincide com o eixo *OY*, tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por:

$F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

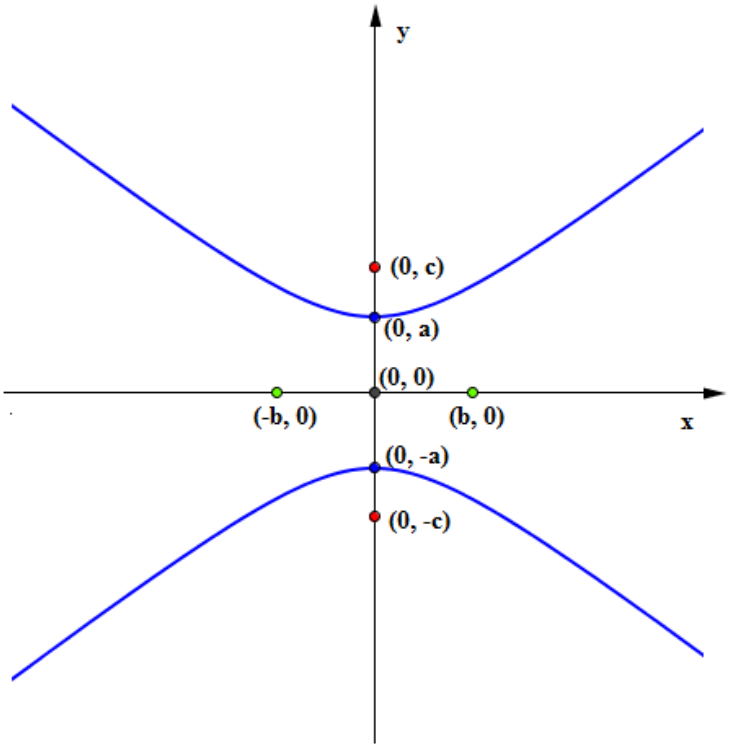

Figura 9 - Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY

Utilizando os mecanismos expostos no primeiro caso, obtém-se a seguinte equação: $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

2.3.
Parábola

2.3.1.
Definição

Machado traz a seguinte definição para a parábola: “A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta dada d, F∉ d, deste plano. O ponto F chama-se foco e a reta d chama-se diretriz da parábola”. (Machado, 1982, p. 109)

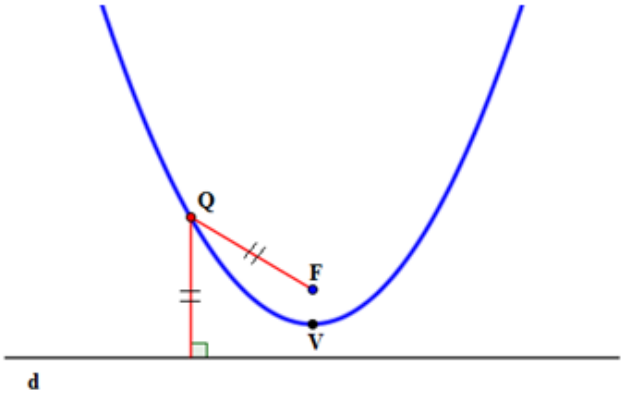

Figura 10 - A parábola

Desta maneira, seja P uma parábola, tem-se que:

$P = \{Q \mid d(Q,F) = d(Q,d)$.

2.3.2.
Notações usuais

É comum serem encontradas as seguintes notações para os elementos da parábola:

- A reta que contém o foco *F* e é perpendicular à diretriz é chamada de reta focal da parábola.

- O ponto da parábola *P* que pertence à reta focal é chamado de vértice[7] *V*;

- A distância entre o foco e a diretriz da parábola, chamada de parâmetro, é usualmente notada por *2p* (note que $d(V,F) = d(V,d) = p$);

[7] Se D é o ponto de interseção entre a reta focal e a diretriz, então V é o ponto médio do segmento $\overline{FD}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

- A excentricidade da parábola é o quociente entre $d(Q,F)$ e $d(Q,r)$. Como estes valores são iguais, a excentricidade da parábola é igual a 1.

2.3.3.
Forma canônica da parábola centrada na origem

Conforme feito no estudo das curvas, anteriormente apresentadas, utilizam-se as definições enunciadas em um sistema de eixos ortogonais *XOY*, em que $Q \in \mathbb{R}^2$. Divide-se o estudo da forma canônica da parábola centrada na origem nos seguintes casos:

1º caso: considerando a parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX*, tem-se duas situações:

- Seja *P* a parábola de foco *F* à direita da diretriz *d*, os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0,0)$, foco $F = (p,0)$ e diretriz: $d: x = -p$.

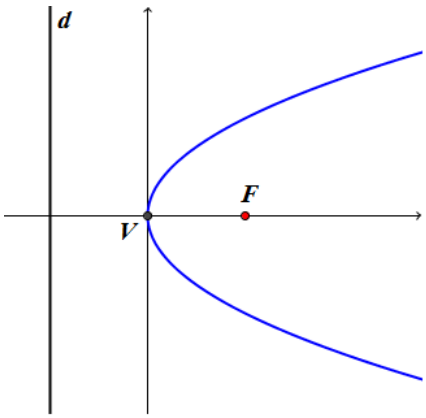

Figura 11 - Parábola de foco à direita da diretriz

Conhecendo a definição do lugar geométrico da parábola, pode-se encontrar a equação que a define por meio do cálculo da distância entre dois pontos e distância entre ponto e reta.

Seja $Q = (x, y)$, por definição, tem-se que $d(Q, F) = d(Q, d)$. Além disso, $d(F, d) = 2p$.

Tem-se que:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$
$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$
$$y^2 = 4xp.$$

- Seja P a parábola de foco F à esquerda da diretriz d, os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0,0)$, foco $F = (-p, 0)$ e diretriz d: $x = -p$.

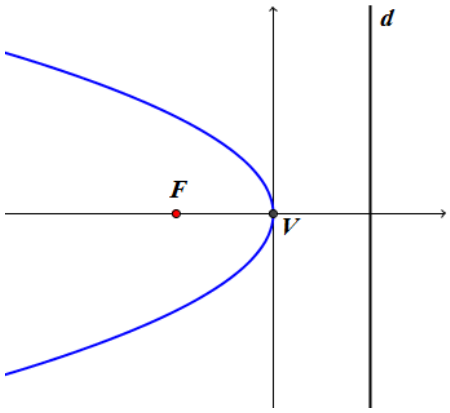

Figura 12 - Parábola de foco à esquerda da diretriz

De forma análoga à parábola de foco F à direita da diretriz d, encontra-se: $y^2 = -4xp$.

2º caso: considerando a parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY, têm-se duas situações:

- Seja P a parábola de foco F acima da diretriz d, os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0,0)$, foco $F = (0,p)$ e diretriz d: $y = -p$.

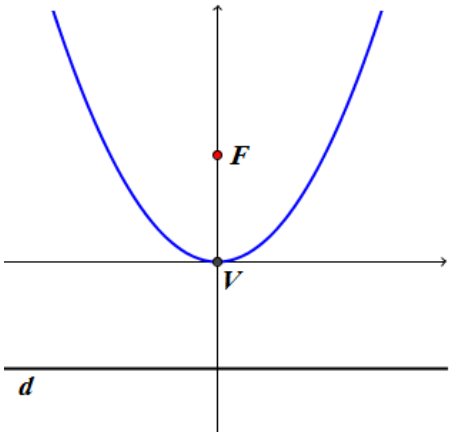

Figura 13 - Parábola de foco acima da diretriz

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

Conforme feito anteriormente, encontra-se a equação que a define por meio dos cálculos de distância entre dois pontos e entre reta e ponto.

Tem-se que:

$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$

$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$

$x^2 = 4yp$

- Seja *P* a parábola de foco *F* abaixo da diretriz *d*, os seus elementos são dados pelo vértice *V* = $(0, 0)$, foco F = $(0, -\mathrm{p})$ e diretriz *d: y = p*.

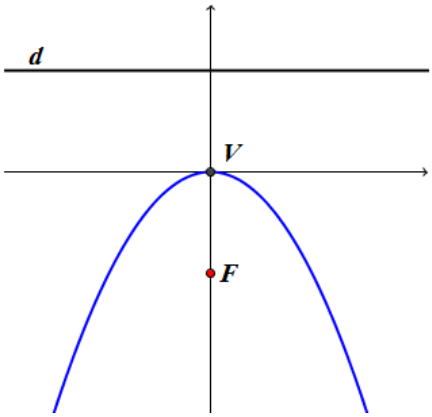

Figura 14 - Parábola de foco abaixo da diretriz

De forma análoga à parábola de foco F à direita da diretriz *d*, obtém-se:

$x^2 = -4yp$.

2.4. Transformações de coordenadas

Algumas vezes, as equações de curvas cônicas ou as coordenadas de um ponto em relação a certo sistema de referência serão tratadas em relação a um novo sistema. Desta maneira, a cônica cuja equação é referida a um sistema de eixos coordenados *XOY* transformar-se-á em uma equação relacionada a um novo sistema $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ obtido por meio de uma translação e/ou rotação de eixos. Estas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

transformações não modificam o gráfico ou forma da curva, alterando apenas sua equação.

A seguir, será feita a dedução de fórmulas capazes de relacionar as coordenadas de um ponto qualquer do plano referidas a um sistema original com as coordenadas do mesmo ponto relacionadas ao segundo sistema. Algebricamente, o objetivo da aplicação das fórmulas que serão apresentadas é eliminar um ou mais termos da equação do segundo grau com duas variáveis, dada por: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.4.1. Translações de eixos coordenados

Em relação às translações dos eixos coordenados, Cattai (2010) apresenta a seguinte definição:

> A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos sejam paralelos aos antigos eixos, respectivamente e semelhantemente orientados, é denominada translação dos eixos coordenados. (Cattai, 2010, p. 6).

Seja *XOY* o sistema original de eixos ortogonais, o sistema transladado $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ possui eixos ortogonais paralelos aos primeiros e origem dada por (x_0, y_0). Além disso, seja P um ponto qualquer do plano, cujas coordenadas no sistema de eixos ortogonais original são dadas por **(x, y)**, tem-se que no sistema transladado de eixos ortogonais tais coordenadas são expressas por $(\bar{x}, \bar{y})$, conforme se pode observar na figura a seguir.

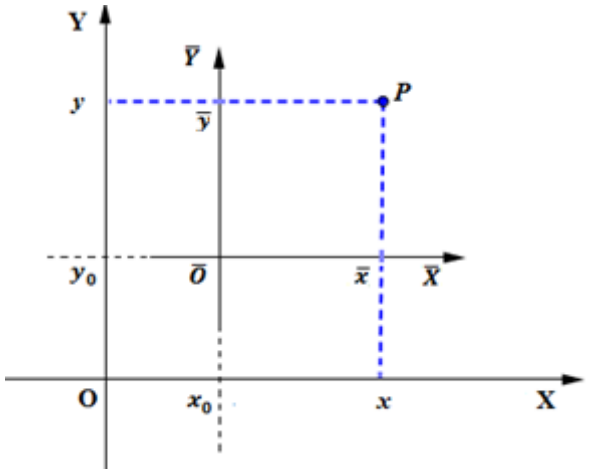

Figura 15 - Translação de eixos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

Pode-se perceber que as coordenadas do ponto P nos sistemas XOY e $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}$$

A partir destas relações de translação é possível obter as equações da elipse, hipérbole e parábola transladadas. Além disso, é válido destacar que por meio das referidas fórmulas é possível eliminar os termos do primeiro grau da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.4.2. Rotações de eixos coordenados

No que se refere ao estudo das rotações dos eixos coordenados, Cattai (2010) apresenta a seguinte definição: "A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos eixos possuam a mesma origem, é denominado rotação dos eixos coordenados". (Cattai, 2010, p. 8)

Portanto, rotacionar os eixos coordenados implica em manter a origem fixa e "girar" os eixos em um determinado ângulo α. Considerando XOY, o sistema original de eixos ortogonais e $\bar{X}O\bar{Y}$ o sistema rotacionado, em que: P é um ponto do plano tal que P = (x,y) no sistema original, P = $(\bar{x}, \bar{y})$ no sistema rotacionado e O é a origem de ambos os sistemas, tem-se a seguinte ilustração:

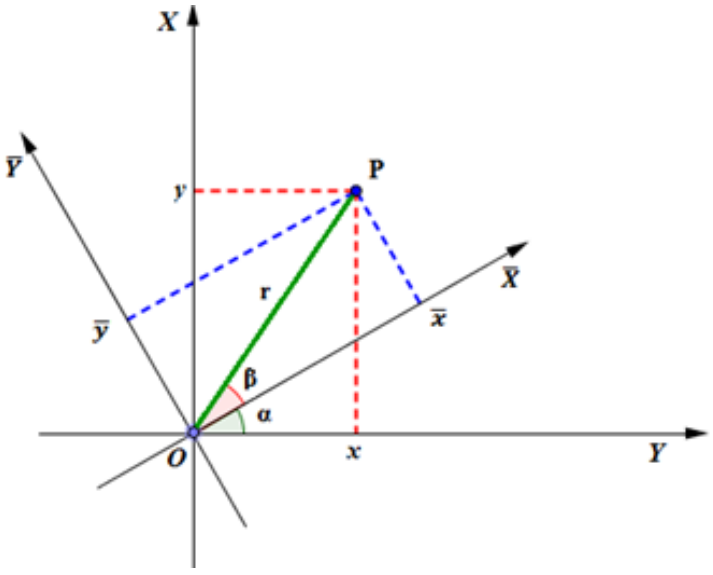

Figura 16 - Rotação de eixos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

Utilizando as informações fornecidas na figura e as razões trigonométricas, têm-se as seguintes igualdades:

$x = cos(\alpha+\beta)r$

Além disso, $r = \frac{\bar{x}}{cos\beta} = \frac{\bar{y}}{sen\beta}$

Sabendo que $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta$, tem-se:

$x = \frac{\bar{x}}{\cos\beta}.\cos\alpha.\cos\beta - \frac{\bar{y}}{\text{sen}\beta}.\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$

Conclui-se então que: $x = \bar{x}.cos\alpha - \bar{y}.sen\alpha$

De forma análoga, encontra-se:

$y = sen(\alpha+\beta)r$

Seja $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha.cos\beta + cos\alpha.sen\beta$, tem-se:

$y = \frac{\bar{x}}{cos\beta}.sen\alpha.cos\beta + \frac{\bar{y}}{sen\beta}.cos\alpha.sen\beta$

Conclui-se, desta maneira, que $y = \bar{x}.sen\alpha + \bar{y}.cos\alpha$

Por meio de artifícios semelhantes se podem encontrar as fórmulas referentes à $\bar{x}$ e $\bar{y}$. É importante destacar que por meio das fórmulas de rotação aqui apresentadas, é possível eliminar os termos em *xy* da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.5. Tangentes a uma cônica

Seja uma curva cônica *C*, cuja equação é dada por $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e uma reta *t* em que sua equação é expressa por $y = mx + n$, obtém-se os pontos de interseção entre ambas por meio da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$$

Por substituição, encontra-se: $Ax^2 + Bx(mx+n) + C(mx+n)^2 + Dx + E(mx+n) + F = 0$. Ou ainda: $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (Bn + 2Cmn + D + Em)x + Cn^2 + En + F = 0$. Desta maneira, esta equação possui zero, uma, ou duas soluções.

Neste caso, Siqueira e Costa fornecem a seguinte definição para a tangência: "As retas que têm somente um ponto em comum com uma cônica e que não contém pontos interiores da mesma são denominadas tangentes à cônica".

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

(Siqueira e Costa, 2012, p. 21). Logo, é necessário e suficiente que todos os pontos da reta, com exceção do ponto *P*, pertençam à região exterior da curva.

A seguir, mostram-se as propriedades das retas tangentes às cônicas considerando seus respectivos focos e diretrizes[8].

Sobre as tangentes à elipse, Sato fornece a seguinte propriedade: "Seja uma elipse *C* de diretriz d e focos F_1 e F_2 e *P* um ponto de *C*. Se a reta *t* é a bissetriz do ângulo determinado pela semirreta $\overrightarrow{PE}$, oposta a semirreta $\overrightarrow{PF_1}$, e pela semirreta $\overrightarrow{PF_2}$, então t é a tangente à elipse no ponto *P"*. (Sato, 2005, pg. 26).

De acordo com a definição do lugar geométrico já apresentada, $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$, em que *2a* é uma constante positiva. Para garantir que *t* é a reta tangente à elipse C, mostra-se que o ponto *P* é a única interseção entre ambas.

Considera-se um ponto *Q* (distinto de *P*) pertencente à *t* e, além disso, faz-se o prolongamento dos segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ de forma que existam as seguintes igualdades: $|\overline{PF_1'}| = |\overline{PF_1}|$ e $|\overline{PE}| = |\overline{PF_2}|$, conforme indicado na figura a seguir:

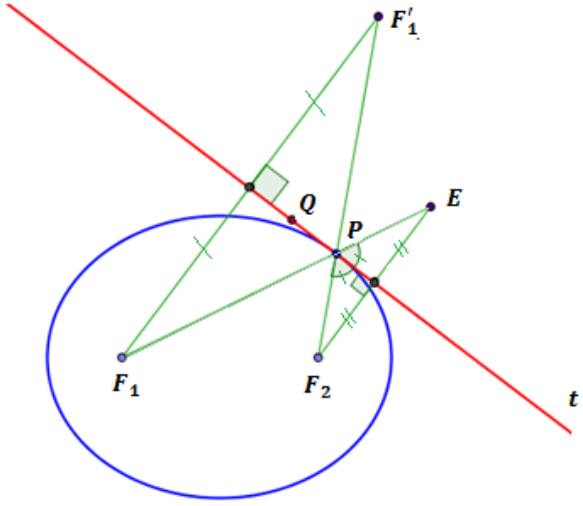

Figura 17 - Tangente à elipse

Portanto, a reta *t* é, além de bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}E$, mediatriz dos segmentos $\overline{F_1F_1'}$ e $\overline{F_2E}$ pois o triângulo PF_2E é isósceles[9], ou seja, as igualdades $|\overline{QF_1'}| = |\overline{QF_1}|$ e $|\overline{QE}| = |\overline{QF_2}|$ também são válidas.

[8] Geralmente, no estudo das cônicas a diretriz é apresentada apenas quando se refere à parábola. No entanto, a diretriz de uma cônica é uma reta fixa onde, juntamente com um ponto fixo não pertencente à curva (que chamamos de foco), define a mesma como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao foco e à diretriz possuem uma razão constante.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

Utilizando a desigualdade triangular relacionada ao triângulo $PF_1{}'F_2$, encontra-se que:

$|\overline{QF_1{}'}| + |\overline{QF_2}| > |\overline{F_2F_1{}'}|$. Ou ainda, $|\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| > |\overline{F_2F_1{}'}|$.

Ora, se $|\overline{PF_1{}'}| = |\overline{PF_1}|$, então $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = |\overline{F_2F_1{}'}| = 2a$. Logo, $|\overline{QF_1{}'}| + |\overline{QF_2}| > 2a$.

Conclui-se, assim, que Q pertence à reta, mas não pertence à curva, pois $|\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| \neq 2a$. Logo, o ponto P é a única interseção entre ambas.

Com relação às tangentes à hipérbole, Sato fornece a propriedade a seguir: "Seja uma hipérbole C de diretriz d e focos F_1 e F_2 e P um ponto de C. Se a reta t é a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$, então t é a tangente à hipérbole no ponto P". (Sato, 2005, pg. 26).

De acordo com a definição do lugar geométrico dos pontos pertencentes à hipérbole, se P é um ponto de C, então $\big||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\big| = 2a$, em que $2a$ é uma constante positiva.

Para garantir que t é a reta tangente à hipérbole C, mostra-se que o ponto P é a única interseção entre ambas. Considera-se um ponto Q (distinto de P) pertencente à t e, além disso, determina-se no segmento $\overline{PF_1}$ um ponto R tal que $|\overline{PR}| = |\overline{PF_2}|$, conforme indicado na figura a seguir:

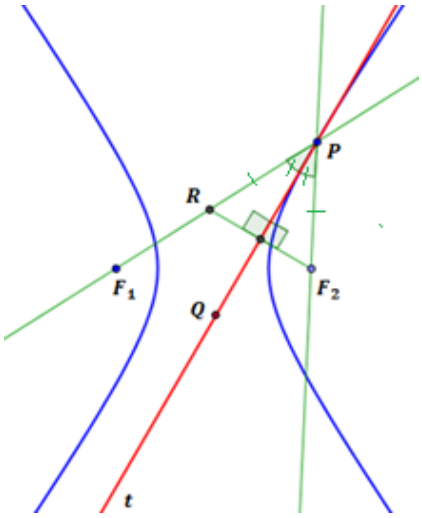

Figura 18 - Tangente à hipérbole

[9] No triângulo isósceles, a mediana, a altura e a bissetriz em relação à base (de medida diferente das demais) são coincidentes. Portanto, este segmento é também mediatriz da mesma.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

Portanto, a reta t é, além de bissetriz do ângulo$F_1\hat{P}F_2$, mediatriz do segmento $\overline{F_2R}$, pois o triângulo PRF_2 é isósceles. Obtém-se também as seguintes igualdades: $|\overline{QR}| = |\overline{QF_2}|$ e $|\overline{RF_1}| = 2a$ (pois $\big||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\big| = 2a$). Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo QF_1R, encontra-se que:

$|\overline{QR}| < |\overline{QF_1}| + |\overline{RF_1}|$. Em que se segue que $|\overline{QF_2}| - 2a < |\overline{QF_1}|$

$|\overline{QF_1}| < |\overline{RF_1}| + |\overline{QR}|$. Ou ainda, $|\overline{QF_1}| < 2a + |\overline{QF_2}|$

$|\overline{QF_2}| - 2a < |\overline{QF_1}| < 2a + |\overline{QF_2}|$

Consequentemente, $\big||\overline{QF_1}| - |\overline{QF_2}|\big| < 2a$.

Conclui-se, assim, que Q pertence à reta, mas não pertence à hipérbole. Logo, o ponto *P* é a única interseção entre ambas.

Por fim, em relação às tangentes à parábola, o mesmo autor ainda concede a seguinte propriedade: "Sejam *P* um ponto da parábola de foco *F* e diretriz *d* e *t* a reta bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, em que *D* é pé da perpendicular à reta d passando por *P*. Temos que *t* é reta tangente à parábola *C* no ponto *P* sendo também a mediatriz do segmento *FD*". (Sato, 2005, pg. 25).

Se P é um ponto da curva, então $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$. Assim, sendo t a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$ em que *FPD* é um triângulo isósceles se tem que *t* é também uma mediatriz do mesmo.

Para mostrar que o ponto *P* é a única interseção entre a reta t e a curva, considera-se um ponto *Q* pertencente à *t*, além do segmento $\overline{QD'}$ perpendicular à diretriz, conforme se pode observar na ilustração a seguir:

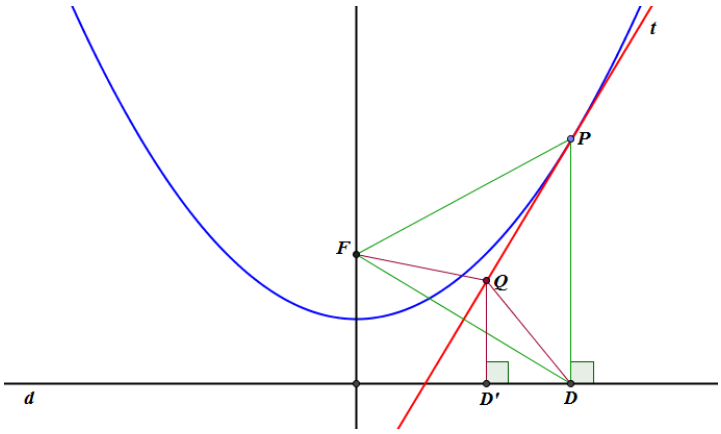

Figura 19 - Tangente à parábola

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA

A reta *t*, além de bissetriz do triângulo *FPD*, é mediatriz do segmento $\overline{FD}$, pois o referido triângulo é isósceles. Portanto, $|\overline{QF}| = |\overline{QD}|$.

Considerando o triângulo retângulo $QD'D$ de hipotenusa $\overline{QD}$, tem-se que $|\overline{QD'}| < |\overline{QD}|$, em que se conclui que $|\overline{QF}| > |\overline{QD'}|$. Desta maneira, *Q* pertence à reta, mas não pertence à parábola. Logo, o ponto *P* é a única interseção entre ambas.

Não é comum ver a apresentação dos estudos sobre translação, rotação e tangentes às curvas no Ensino Médio. Aliás, os conceitos destacados neste capítulo estão cada vez mais extintos nas salas de aula, ora por serem considerados complexos, ora por não serem considerados tão relevantes.

No entanto, o referido tema ocupa um grande e rico capítulo tanto da história da Matemática como de desenvolvimentos teóricos e aplicações práticas importantes. Cabe ao professor estabelecer métodos para que estes conhecimentos sejam apresentados aos discentes, uma vez que o uso de materiais concretos pode fazer toda a diferença no processo de aprendizagem.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1311540/CA