



**Bruna Mayara Batista Rodrigues**

## **O estudo das Cônicas através do Origami**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro  
Fevereiro 2015



**Bruna Mayara Batista Rodrigues**

## **O estudo das Cônicas através do Origami**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Profa. Christine Sertã Costa**

Orientadora

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Marcos Craizer**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Sinésio Pesco**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Gabriela dos Santos Barbosa**

Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

**Prof. José Eugênio Leal**

Coodenador Setorial do Centro Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de fevereiro de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Bruna Mayara Batista Rodrigues**

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela FEUC (Fundação Educacional Unificada Campograndense) em 2009. Especializou-se em Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio pelo programa de Pós-graduação do CEPOPE/FEUC em 2010. Atua como professora de Ensino Fundamental na Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro e no curso de graduação em Matemática na FEUC.

#### Ficha Catalográfica

Rodrigues, Bruna Mayara Batista

O estudo das Cônicas através do Origami / Bruna Mayara Batista Rodrigues ; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2015.

132 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Origami. 3. Cônicas. 4. Geometria Axiomática. 5. Ensino. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Às pessoas mais importantes da minha vida: meus familiares.

## Agradecimentos

A Deus, por me proporcionar força e fé em todos os momentos.

Aos meus pais, avó e irmãos que são verdadeiros presentes de Deus em minha vida.

À minha orientadora Professora Christine Sertã Costa pela dedicação e carinho. Sua conduta me motiva a ser uma professora melhor.

Aos colegas e professores do curso que tornaram nossos encontros mais prazerosos e produtivos. Em especial, agradeço ao Igor Alex, à Érica Barboza e à Thais Sales que hoje são amigos que pretendo levar por toda a minha vida.

Aos meus colegas de trabalho por todo o apoio que me ofertaram nesta trajetória.

Aos meus amigos Rafael Lázaro, Karine Melquíades, Josiane Branco, Regina Tieppo, Nelson Coutinho, Rafael Cunha, Thiago Cunha e Rayane Queiroz pelo companheirismo, preocupação e mão estendida.

Aos responsáveis pela minha decisão de ser professora, meus queridos e inspiradores mestres: Gabriela dos Santos Barbosa, Alzir Fourny, Cleber Amaral e Lúcio Coelho.

## Resumo

Rodrigues, Bruna Mayara Batista; Costa, Christine Sertã (Orientadora). **O estudo das Cônicas através do Origami**. 132 p. Rio de Janeiro, 2015. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O estudo das Curvas Cônicas tem sido cada vez menos abordado no Ensino Médio e, nos poucos casos em que tal abordagem é apresentada, verifica-se uma prioridade indevida à memorização de equações. Por outro lado, embora a eficiência do Origami não seja divulgada com frequência no ensino de assuntos matemáticos de maior complexidade, existe uma geometria axiomática consistente por trás desta arte de dobrar papéis que a torna um instrumento de ensino capaz de explorar, com clareza, propriedades e definições de assuntos matemáticos. O presente trabalho pretende unir esses dois elementos, curvas cônicas e origami, com o intuito de desenvolver conceitos do primeiro a partir de construções do segundo.

Desta forma, faz-se um relato histórico e conceitual sobre as Curvas Cônicas; descreve-se a importância do Origami e seu uso no ensino da Matemática; apresenta-se o estudo das sete possibilidades para uma única dobragem no Origami conhecidas como os axiomas de Huzita-Hatori com o objetivo de sugerir o uso das dobraduras no estudo da elipse, da parábola e da hipérbole no Ensino Médio das escolas do país.

A fim de divulgar o Origami como um recurso eficiente e interessante no ensino das Cônicas e validar a pesquisa apresentada, uma oficina foi desenvolvida, aplicada, avaliada e aprimorada num pequeno grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática e seus resultados estão aqui expostos.

## Palavras-chave

Origami; Cônicas; Geometria Axiomática; Ensino.

## Abstract

Rodrigues, Bruna Mayara Batista; Costa, Christine Sertã (Advisor). **The study of Conic Curves by Origami**. Rio de Janeiro, 2015.132 p. MSc. Dissertation - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The study of Conic Curves has been each time less approached at High School and, in those few cases it is presented, it's possible to verify an improperly prioritized of equation memorizations. On the other hand, although the efficiency of the Origami is not often divulged at teaching mathematical subjects of greater complexity, there is a consistent axiomatic geometry behind this art of folding papers that makes it an a teaching tool able to explore, clearly, the properties and definitions of mathematical subjects. This study aims to join these two elements, conic curves and origami, in order to develop concepts from the first to building the second one.

This way, it can make a historical and conceptual essay about the Conic Curves; describing the importance of the Origami and its use in Mathematics teaching; presenting the study of the seven possibilities for a single folding in Origami known as Huzita-Hatori's axioms in order to suggest the use of the folding in the study of ellipse, parable and hyperbole at High Schools all over the country.

Divulging the Origami as an efficient and interesting resource in the teaching of the Conics and validate this research, a workshop was developed, applied, evaluated and improved in a small group of students of Degree in Mathematics and its results are exposed here.

## Key words

Origami; Conics; Axiomatic Geometry; Teaching.

# Sumário

1 . Introdução	14
2 . As cônicas	16
2.1. Elipse	18
2.1.1. Definição	18
2.1.2. Notações usuais	19
2.1.3. Forma canônica da Elipse centrada na origem	20
2.2. Hipérbole	22
2.2.1. Definição	22
2.2.2. Notações usuais	22
2.2.3. Forma canônica da hipérbole centrada na origem	23
2.3. Parábola	26
2.3.1. Definição	26
2.3.2. Notações usuais	26
2.3.3. Forma canônica da parábola centrada na origem	27
2.4. Transformações de coordenadas	29
2.4.1. Translações de eixos coordenados	30
2.4.2. Rotações de eixos coordenados	31
2.5. Tangentes a uma cônica	32
3 . O Origami	37
3.1. Contexto histórico do Origami	37
3.2. A Matemática e o Origami	42
3.3. Tipos e símbolos do Origami	45
4 . Descrição axiomática do Origami	50
4.1. Os axiomas de Huzita-Hatori	51



4.2. A reta e o ponto	54
4.2.1. A reta	55
4.2.2. O ponto	56
4.2.3. Explicação analítica dos axiomas	56
5 . A construção das curvas cônicas através do Origami	69
5.1. A elipse	69
5.1.1. Construção da curva através das dobraduras	70
5.1.2. A matemática do método utilizado	72
5.1.3. Identificação dos elementos através das dobraduras	73
5.2. A hipérbole	76
5.2.1. Construção da curva através das dobraduras	76
5.2.2. A matemática do método utilizado	78
5.2.3. Identificação dos elementos através da dobradura	79
5.3. A parábola	83
5.3.1. Construção da curva através das dobraduras	84
5.3.2. A matemática do método utilizado	85
5.3.3. Identificação dos elementos através das dobraduras	86
6 . Descrição da oficina: Construindo as cônicas através do Origami	89
7 . Conclusão	97
8 . Referências Bibliográficas	98
Apêndice I	100
Anexo I	102
Anexo II	103
Anexo III	104

## Lista de figuras

Figura 1: Seções Cônicas	17
Figura 2: A elipse	18
Figura 3: Elementos da elipse	19
Figura 4: Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX	20
Figura 5: Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY	21
Figura 6: A hipérbole	22
Figura 7: Elementos da hipérbole	23
Figura 8: Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX	24
Figura 9: Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY	25
Figura 10: A parábola	26
Figura 11: Parábola de foco à direita da diretriz	27
Figura 12: Parábola de foco à esquerda da diretriz	28
Figura 13: Parábola de foco acima da diretriz	28
Figura 14: Parábola de foco abaixo da diretriz	29
Figura 15: Translação de eixos	30
Figura 16: Rotação de eixos	31
Figura 17: Tangente à elipse	33
Figura 18: Tangente à hipérbole	34
Figura 19: Tangente à parábola	35
Figura 20: Retrato de Friedrich Froebel	38
Figura 21: Foto de Sadako Sasaki	39
Figura 22: “Monumento das Crianças à Paz” em Hiroshima	40
Figura 23: Registro de uma aula ministrada pela professora Koda	41
Figura 24: Painel solar construído por pesquisadores da NASA	42
Figura 25: Imagens do livro Wakoku Chiyekurabe	43
Figura 26: Gravura retirada do livro de T. Sundara	44

Figura 27: Barquinho de Origami Simples	46
Figura 28: Buquê de Origami Composto	46
Figura 29: Personagens construídos com Origami Modular	47
Figura 30: Exemplo de Kirigami	47
Figura 31: Retrato de Humiaki Huzita	50
Figura 32: Axioma de Huzita	51
Figura 33: Axioma de Huzita	52
Figura 34: Axioma de Huzita	52
Figura 35: Axioma de Huzita	53
Figura 36: Axioma de Huzita	53
Figura 37: Axioma de Huzita	54
Figura 38: Axioma de Hatori	54
Figura 39: Distância entre dois pontos	56
Figura 40: Reta definida por dois pontos	57
Figura 41: Mediatriz	58
Figura 42: Reta de dobragem	59
Figura 43: Reta de dobragem	60
Figura 44: Reta dada pela bissetriz	61
Figura 45: Reta $r$	62
Figura 46: Nenhum ponto de interseção	63
Figura 47: Um ponto de interseção	63
Figura 48: Dois pontos de interseção	64
Figura 49: Aplicação do axioma 5	64
Figura 50: Formação de uma parábola	65
Figura 51: Tangente comum a duas parábolas	66
Figura 52: Construção do sétimo axioma	67
Figura 53: O centro $F_1$ do círculo	70
Figura 54: Escolha do ponto $F_2$	70
Figura 55: Construção da curva	71

Figura 56: A curva através das dobraduras	71
Figura 57: Construção da reta $t$	72
Figura 58: Unicidade do ponto $G$	73
Figura 59: Aplicação dos axiomas	74
Figura 60: Os elementos da elipse	74
Figura 61: Excentricidade da elipse	75
Figura 62: Construção de uma circunferência	75
Figura 63: Translação e rotação de elipses	76
Figura 64: O centro $F_1$ do círculo	76
Figura 65: Escolha do ponto $F_2$	77
Figura 66: Construção da curva	77
Figura 67: A curva através das dobraduras	78
Figura 68: Formação da reta tangente à hipérbole	78
Figura 69: Aplicação dos axiomas	79
Figura 70: Aplicação dos axiomas	80
Figura 71: Os elementos da hipérbole	80
Figura 72: Aplicação do axioma 4	81
Figura 73: Retângulo da base	81
Figura 74: Aplicação do axioma 1	82
Figura 75: As assíntotas da hipérbole	82
Figura 76: Excentricidade da hipérbole	83
Figura 77: Translação e rotação da hipérbole	83
Figura 78: O ponto $F$	84
Figura 79: Aplicação do axioma	84
Figura 80: A parábola através do Origami	85
Figura 81: Segmento $PF'$	85
Figura 82: O ponto pertencente à parábola	86
Figura 83: Aplicação do axioma 4	86
Figura 84: Os elementos da parábola	87

Figura 85: Parábolas semelhantes	87
Figura 86: Translação e rotação da parábola	88
Figura 87: Gráfico mostrando os períodos dos alunos	89
Figura 88: Respostas dos alunos ao questionário diagnóstico	90
Figura 89: Respostas dos alunos ao questionário diagnóstico	91
Figura 90: Folhas para a construção da elipse, hipérbole e parábola	92
Figura 91: Aluno realizando as dobraduras referentes à elipse	93
Figura 92: Aluno realizando as dobraduras referentes à hipérbole	93
Figura 93: A parábola através do Origami	94
Figura 94: Gráfico mostrando a opinião dos alunos	95
Figura 95: Gráfico mostrando a opinião dos alunos	95
Figura 96: Gráfico mostrando a opinião dos alunos	95

## **Lista de tabela**

Tabela 1: Modelos de símbolos universais utilizados no Origami	48
--	----