

5

Discretização das equações governantes na forma u-p

5.1

Discretização espacial

Sistemas de equações diferenciais governantes geralmente não têm solução analítica exata, necessitando do emprego de um método numérico, como o MEF, para obtenção de uma solução aproximada ([Cook, R., et al., 1989], [Bathe, K.J., 1996], [Zienkiewicz, O.C., et al., 2006], [Hughes, T.J.R., 1987]). No MEF as equações diferenciais são satisfeitas, no sentido integral, no domínio do elemento (formulação fraca), enquanto que na solução analítica estas equações são satisfeitas em cada ponto do problema (formulação forte).

No MEF os valores de deslocamento do sólido e da poropressão do fluido, são aproximados nos pontos nodais a nível local (*elemento acoplado*) por funções de interpolação contínuas, geralmente polinomiais, cujo grau depende do número de nós do elemento finito utilizado.

Para o campo dos deslocamentos da *matriz sólida* (ou *sólido*),

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}^u \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{Eq. 5.1})$$

ou,

$$u_i \cong N_K^u \bar{u}_{Ki} \quad (\text{Eq. 5.2})$$

e para o campo das poropressões do fluido (*água*)

$$\mathbf{p}_w \cong \mathbf{N}^w \bar{\mathbf{p}}_w \quad (\text{Eq. 5.3})$$

ou,

$$p_{wi} \cong N_L^w \bar{p}_{wLi} \quad (\text{Eq. 5.4})$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamento do sólido, $\bar{\mathbf{u}}$ o vetor de deslocamento do sólido nodal a nível local, \mathbf{N}^u a matriz das funções de interpolação para o campo dos deslocamentos do sólido, \mathbf{p}_w o vetor da poropressão do fluido, $\bar{\mathbf{p}}_w$ o vetor da

poropressão do fluido nodal a nível local e \mathbf{N}^w a matriz das funções de interpolação para o campo das poropressões.

As equações 5.1 e 5.3 podem ser escritas da forma combinada para um *elemento acoplado* (sistema sólido-fluido a nível local) como,

$$\mathbf{\Phi} \cong \hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{\Phi}} \quad (\text{Eq. 5.5})$$

sendo $\mathbf{\Phi} = \{\mathbf{u} \quad \mathbf{p}_w\}^T$ o vetor da variável generalizada, $\bar{\mathbf{\Phi}} = \{\bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{p}}_w\}^T$ o vetor da variável generalizada nodal a nível local e \mathbf{N} a matriz das funções de interpolação da variável generalizada definida por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^u & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^w \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.6})$$

No caso de uma análise dinâmica, a discretização deve-se estender às derivadas do vetor da variável generalizada nodal a nível local, obtendo-se

$$\dot{\bar{\mathbf{\Phi}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{\Phi}}}{\partial t} \quad (\text{Eq. 5.7})$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{\Phi}}} = \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{\Phi}}}}{\partial t} \quad (\text{Eq. 5.8})$$

onde $\dot{\bar{\mathbf{\Phi}}}$ representa o vetor da velocidade da variável generalizada nodal a nível local e $\ddot{\bar{\mathbf{\Phi}}}$ o vetor da aceleração da variável generalizada nodal a nível local.

Na literatura, as equações discretizadas do MEF são obtidas através de duas abordagens gerais: (a) formulação variacional; (b) formulação baseada no método dos resíduos ponderados.

Na formulação variacional as equações de equilíbrio e as condições de contorno naturais são obtidas pela minimização de um funcional conhecido, como o que expressa, por exemplo, a energia potencial de um sistema mecânico conservativo, frequentemente empregado em problemas da mecânica do contínuo. Hardy [Hardy, S., 2003] estabelece a equação discretizada a nível local para o sólido através do princípio da energia potencial estacionária, estendida para o contexto dinâmico pela aplicação do princípio de d'Alembert¹, enquanto que o

¹ Princípio de d'Alembert: "As ações e reações internas de um sistema de corpos em movimento estão em equilíbrio".

acoplamento sólido-fluido foi obtido mediante o princípio das tensões efetivas [Terzaghi, K., 1936] para solos saturados.

$$[M]\{\Delta\ddot{u}\} + [C]\{\Delta\dot{u}\} + [K]\{\Delta u\} + [L]\{\Delta p_f\} = \{\Delta R\} \quad (\text{Eq. 5.9})$$

onde $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$ e $\{\ddot{u}\}$ são os vetores de deslocamento, da velocidade e da aceleração do sólido, respectivamente, $\{p_f\}$ o vetor da poropressão do fluido, $[M]$ a matriz de massa do sólido, $[C]$ a matriz de amortecimento viscoso, $[K]$ a matriz de rigidez do sólido, $[L]$ a matriz de acoplamento sólido-fluido e $\{R\}$ vetor de força do sólido.

Para desenvolver a equação discretizada a nível local para o fluido, Hardy [Hardy, S., 2003], considerando a lei de Darcy, as equações de movimento e da continuidade do fluido, obteve pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais,

$$[L]^T \{\Delta u\} + [G]\{\Delta\ddot{u}\} - [\phi]\{p_f\}\Delta t - [S]\{\Delta p_f\} = (\{n\} + \{Q\})\Delta t \quad (\text{Eq. 5.10})$$

onde $[G]$ representa a matriz de inércia do fluido, $[\phi]$ a matriz de fluxo do fluido, $[S]$ a matriz da compressibilidade do fluido, $\{n\}$ o vetor de fluxo do fluido, $\{Q\}$ vetor da vazão do fluido e t o tempo. O símbolo Δ significa variação.

Ghaboussi e Wilson [Ghaboussi, J.; Wilson, E.L., 1972] apresentam uma formulação do MEF desenvolvida com base em um funcional de energia para problemas acoplados em meios porosos saturados proposto por Sandhu e Pister [Sandhu, R.S.; Pister, K.S., 1970], que resulta no seguinte sistema de equações algébricas, discretizada a nível local,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s \\ \ddot{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_s \\ \dot{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c^T & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_f \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.11})$$

onde \mathbf{u}_s , $\dot{\mathbf{u}}_s$, e $\ddot{\mathbf{u}}_s$ são vetores de deslocamento, da velocidade e da aceleração do sólido, respectivamente; \mathbf{u}_f , $\dot{\mathbf{u}}_f$, e $\ddot{\mathbf{u}}_f$ os vetores de deslocamento, da velocidade e da aceleração do fluido, respectivamente, \mathbf{K}_s e \mathbf{K}_f as matrizes de rigidez do sólido e do fluido, respectivamente, \mathbf{M}_s e \mathbf{M}_f as matrizes de massa do sólido e do fluido, respectivamente, \mathbf{D}_s e \mathbf{D}_f as matrizes de amortecimento viscoso do

sólido e do fluido, respectivamente, \mathbf{F}_s e \mathbf{F}_f os vetores de força do sólido e do fluido, respectivamente, \mathbf{C}_c e \mathbf{M}_c matrizes de acoplamento sólido-fluido em termos da massa e da rigidez, respectivamente.

Cabe ressaltar que a matriz de amortecimento \mathbf{D}_s foi introduzida nesta equação para representar a energia dissipada pelo sólido, podendo ser determinada pela combinação linear da matriz de massa e da matriz de rigidez do sólido (amortecimento de Rayleigh), ou seja

$$\mathbf{D}_s = a_1(\mathbf{M}_s - n^2\mathbf{M}_f) + a_2(\mathbf{K}_s - \tilde{\alpha}^2\mathbf{K}_f) \quad (\text{Eq. 5.12})$$

onde a_1 e a_2 são constantes de amortecimento, n a porosidade e $\tilde{\alpha}$ a constante de Biot.

De acordo com Ghaboussi e Wilson [Ghaboussi, J.; Wilson, E.L, 1972] o sistema de equações 5.11 poderiam também ser obtidas através de uma extensão do princípio de Hamilton², assumindo a existência de uma função de dissipação de energia para levar em conta os efeitos de amortecimento.

Há várias formulações disponíveis na abordagem pelo método dos resíduos ponderados para obtenção das equações do MEF, dependendo da escolha do tipo de função de ponderação, \mathbf{N}_p , para minimização dos resíduos. A mais popular, parece ser a do método de Galerkin, utilizada no presente estudo, onde as funções de ponderação são as próprias funções de interpolação empregadas no MEF.

As equações diferenciais governantes a resolver em casos de problemas dinâmicos são da forma geral (equação contínua),

$$\mathbf{A}_1\ddot{\Phi} + \mathbf{A}_2\dot{\Phi} + \mathbf{A}_3\langle\Phi\rangle = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.13})$$

onde \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 representam quantidades matriciais.

² Princípio de Hamilton: “De todos os caminhos possíveis ao longo dos quais um sistema dinâmico pode se mover em um intervalo de tempo específico, o caminho percorrido é aquele que minimiza na integral do tempo a diferença entre as energias potencial e cinética”.

Considerando que

$$\Phi \cong \mathbf{N}_p \bar{\Phi} \quad (\text{Eq. 5.14})$$

com

$$\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_p^u & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_p^w \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.15})$$

a aplicação do método de Galerkin produz então

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T (\mathbf{A}_1 \ddot{\Phi} + \mathbf{A}_2 \dot{\Phi} + \mathbf{A}_3 \langle \Phi \rangle) d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.16})$$

que, após a integração, será reduzida à seguinte forma (equação discretizada),

$$\mathbf{B}_1 \ddot{\Phi} + \mathbf{B}_2 \dot{\Phi} + \mathbf{B}_3 \langle \Phi \rangle = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.17})$$

onde \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_3 são quantidades matriciais.

(a) Discretização das equações simplificadas de movimento do sólido

$$\delta\sigma_{ij,j} - \rho\delta\ddot{u}_i + \rho\delta b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.38})$$

Seguindo-se o procedimento do método de Galerkin, onde as funções de interpolação para o campo de deslocamentos N_K^u são utilizadas como funções de ponderação N_p^u (i.e. $N_p^u = N_K^u$) para minimização dos resíduos no domínio do elemento. Multiplicando-se a equação 4.35 pela transposta da matriz das funções de interpolação N_K^u e integrando-se no domínio do elemento Ω ,

$$\int_{\Omega} N_K^u{}^T (\delta\sigma_{ij,j} - \rho\delta\ddot{u}_i + \rho\delta b_i) d\Omega = 0 \quad (\text{Eq. 5.18})$$

Do princípio das tensões efetivas para solos saturados,

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p_w \quad (\text{Eq. 4.19})$$

resulta na equação 5.18 em

$$\int_{\Omega} N_K^u{}^T (\delta\sigma'_{ij,j} - \delta_{ij} \delta p_{w,j} - \rho\delta\ddot{u}_i + \rho\delta b_i) d\Omega = 0 \quad (\text{Eq. 5.19})$$

ou

$$\int_{\Omega} N_K^{u^T} \delta\sigma'_{ij,j} d\Omega - \int_{\Omega} N_K^{u^T} \delta_{ij} \delta p_{w,j} d\Omega - \int_{\Omega} N_K^{u^T} \rho \delta \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} N_K^{u^T} \rho \delta b_i d\Omega = 0 \quad (\text{Eq. 5.20})$$

Integrando por partes os dois primeiros termos da equação 5.20,

$$\int_{\Omega} N_K^{u^T} \delta\sigma'_{ij,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(N_K^{u^T} \delta\sigma'_{ij} \right)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} N_{K,j}^{u^T} \delta\sigma'_{ij} d\Omega \quad (\text{Eq. 5.21})$$

$$\int_{\Omega} N_K^{u^T} \delta_{ij} \delta p_{w,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(N_K^{u^T} \delta_{ij} \delta p_w \right)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} N_{K,j}^{u^T} \delta_{ij} \delta p_w d\Omega \quad (\text{Eq. 5.22})$$

Aplicando-se o teorema de Green nos termos sublinhados das equações 5.21 e 5.22, vem,

$$\int_{\Omega} \left(N_K^{u^T} \delta\sigma'_{ij} \right)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} N_K^{u^T} n_j \delta\sigma'_{ij} d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.23})$$

$$\int_{\Omega} \left(N_K^{u^T} \delta_{ij} \delta p_w \right)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} N_K^{u^T} n_j \delta_{ij} \delta p_w d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.24})$$

Substituindo-se as relações anteriores na equação 5.20,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_K^{u^T} n_j \delta\sigma'_{ij} d\Gamma - \int_{\Omega} N_{K,j}^{u^T} \delta\sigma'_{ij} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} N_K^{u^T} n_j \delta_{ij} \delta p_w d\Gamma + \int_{\Omega} N_{K,j}^{u^T} \delta_{ij} \delta p_w d\Omega \\ & - \int_{\Omega} N_K^{u^T} \rho \delta \ddot{u}_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_K^{u^T} \rho \delta b_i d\Omega \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.25})$$

e reorganizando-se os termos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho N_K^{u^T} \delta \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} N_{K,j}^{u^T} \delta\sigma'_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} N_{K,j}^{u^T} \delta_{ij} \delta p_w d\Omega \\ & = \int_{\Omega} N_K^{u^T} \rho \delta b_i d\Omega + \int_{\Gamma} N_K^{u^T} \left(\delta\sigma'_{ij} - \delta_{ij} \delta p_w \right) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.26})$$

Considerando os valores nodais da variável deslocamento, \bar{u}_{Ki} , e poropressão, \bar{p}_{wLi} , de acordo com as equações 5.2 e 5.4,

$$u_i \cong N_K^u \bar{u}_{Ki} \quad (\text{Eq. 5.2})$$

$$p_{wi} \cong N_L^w \bar{p}_{wLi} \quad (\text{Eq. 5.4})$$

então a equação 5.26 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \rho N_K^u{}^T N_K^u d\Omega \right) \delta \ddot{u}_{Ki} + \int_{\Omega} N_{K,j}^u{}^T \delta \sigma'_{ij} d\Omega \\ & - \left(\int_{\Omega} N_{K,j}^u{}^T \delta_{ij} N_L^w d\Omega \right) \delta \bar{p}_{wLi} \\ & = \int_{\Omega} N_K^u{}^T \rho \delta b_i d\Omega + \int_{\Gamma} N_K^u{}^T (\delta \sigma'_{ij} - \delta_{ij} \delta \bar{p}_w) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.27})$$

As equações anteriores podem também ser expressas na forma vetorial (equação discretizada a nível local),

$$\mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \langle \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle - \mathbf{Q} \delta \bar{\mathbf{p}}_w - \delta \bar{\mathbf{f}}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.28})$$

onde

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho N_K^u{}^T N_K^u d\Omega \quad (\text{Eq. 5.29})$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} N_{K,j}^u{}^T \delta_{ij} N_L^w d\Omega \quad (\text{Eq. 5.30})$$

$$\mathbf{P} \langle \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\Omega} N_{K,j}^u{}^T \delta \sigma'_{ij} d\Omega \quad (\text{Eq. 5.31})$$

$$\delta \bar{\mathbf{f}}^{(s)} = \int_{\Omega} N_K^u{}^T \rho \delta b_i d\Omega + \int_{\Gamma} N_K^u{}^T (\delta \sigma'_{ij} - \delta_{ij} \delta \bar{p}_w) n_j d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.32})$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa do sólido, \mathbf{Q} matriz de acoplamento sólido-fluido, $\mathbf{P} \langle \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle$ matriz de força interna do sólido que dará origem à matriz de rigidez do sólido; $\delta \bar{\mathbf{f}}^{(s)}$ vetor de incremento de força do sólido, $\delta \bar{\mathbf{u}}$ vetor de incremento de deslocamento do sólido e $\delta \bar{\mathbf{p}}_w$ vetor de incremento da poropressão do fluido.

A matriz de massa do sólido pode ser definida por duas formulações: (1) matriz consistente; (2) matriz de massas concentradas. A matriz de massa consistente representa a discretização de uma distribuição contínua de massa no elemento (equação 5.29) enquanto que a matriz de massas concentradas, visando a um menor tempo de execução computacional, é obtida da matriz de massa por meio de um processo de diagonalização (*lumping*), como a técnica HRZ [Hinton, E., Rock, T.; Zienkiewicz, O.C., 1976].

A matriz de acoplamento sólido-fluido (equação 5.30) pode ser escrita na forma vetorial,

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{u^T} \mathbf{m} \mathbf{N}^w d\Omega \quad (\text{Eq. 5.33})$$

onde \mathbf{N}^w é a matriz das funções de interpolação que descrevem o campo das poropressões e \mathbf{m} é a forma vetorial do delta de Kronecker dado por,

$$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (\text{Eq. 5.34})$$

A matriz de força interna do sólido (equação 5.31) pode ser escrita na forma vetorial,

$$\mathbf{P} \langle \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{u^T} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega \quad (\text{Eq. 5.35})$$

considerando-se

$$\mathbf{B}^u = \bar{\mathbf{S}} \mathbf{N}^u \quad (\text{Eq. 5.36})$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.37})$$

onde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ é o vetor de tensão, \mathbf{B}^u a matriz das derivadas das funções de interpolação \mathbf{N}^u que descrevem o campo dos deslocamentos do sólido e $\bar{\mathbf{S}}$ matriz de operador de derivadas.

Considerando a relação tensão-deformação para o sólido, dada pela equação 4.27,

$$\delta \sigma'_{ij} = D_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} \quad (\text{Eq. 4.27})$$

o tensor das deformações,

$$\delta \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\delta u_{k,l} + \delta u_{l,k}) \quad (\text{Eq. 5.38})$$

e o campo de deslocamentos nodais descrito pela equação 5.2

$$u_i \cong N_K^u \bar{u}_{Ki} \quad (\text{Eq. 5.2})$$

então a matriz $\mathbf{P}\langle\delta\bar{\mathbf{u}}\rangle$ pode ser expressa como,

$$\mathbf{P}\langle\delta\bar{\mathbf{u}}\rangle = \int_{\Omega} \mathbf{N}_{K,j}^u{}^T \mathbf{D}_{ijkl} \left(\frac{1}{2} (N_{K,l}^u \delta\bar{u}_{kk,l} + N_{K,k}^u \delta\bar{u}_{kl,k}) \right) d\Omega \quad (\text{Eq. 5.39})$$

ou, na forma vetorial,

$$\mathbf{P}\langle\delta\bar{\mathbf{u}}\rangle = \mathbf{K} \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (\text{Eq. 5.40})$$

onde

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^u{}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^u d\Omega \quad (\text{Eq. 5.41})$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez do sólido e \mathbf{D} a matriz constitutiva tensão-deformação, i.e. em termos das tensões efetivas.

Da teoria da plasticidade generalizada (equação 3.65), i.e. modelo Pastor–Zienkiewicz, tem-se

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{ep} \quad (\text{Eq. 3.50})$$

O vetor de incremento de força do sólido (equação 5.32) pode ser escrito na forma vetorial,

$$\delta\bar{\mathbf{f}}^{(s)} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^u{}^T \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^u{}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.42})$$

com \mathbf{b} representando o vetor de força de corpo por unidade de massa e \mathbf{t} o vetor de força externa (força cisalhante e normal) atuante no sólido.

(b) Discretização das equações simplificadas de movimento-continuidade do fluido

$$\left(k_{ij} (-\delta p_{w,j} - \rho_w \delta \ddot{u}_j + \rho_w \delta b_j) \right)_{,j} + \delta \ddot{u}_{i,i} + \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} = 0 \quad (\text{Eq. 4.46})$$

Seguindo-se o procedimento do método de Galerkin, onde as funções de interpolação para o campo de poropressão N_L^w são utilizadas como funções de ponderação N_p^w (i.e. $N_p^w = N_L^w$) para minimização dos resíduos no domínio do elemento. Multiplicando-se a equação 4.43 pela transposta da matriz das funções de interpolação N_L^w e integrando-se no domínio do elemento Ω ,

$$\int_{\Omega} N_L^{wT} \left((k_{ij}(-\delta p_{w,j} - \rho_w \delta \ddot{u}_j + \rho_w \delta b_j))_{,j} + \delta \dot{u}_{i,i} + \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} \right) d\Omega = 0 \quad (\text{Eq. 5.43})$$

ou

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} N_L^{wT} (k_{ij} \delta p_{w,j})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} N_L^{wT} (k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j)_{,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_L^{wT} (k_{ij} \rho_w \delta b_j)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} N_L^{wT} \delta \dot{u}_{i,i} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_L^{wT} \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.44})$$

Integrando por partes os quatro primeiros termos da equação 5.44,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_L^{wT} (k_{ij} \delta p_{w,j})_{,j} d\Omega = \\ & \underline{\int_{\Omega} (N_L^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j})_{,j} d\Omega} - \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} p_{w,j} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.45})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_L^{wT} (k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j)_{,j} d\Omega = \\ & \underline{\int_{\Omega} (N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j)_{,j} d\Omega} - \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j d\Omega \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.46})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_L^{wT} (k_{ij} \rho_w \delta b_j)_{,j} d\Omega = \\ & \underline{\int_{\Omega} (N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j)_{,j} d\Omega} - \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j d\Omega \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.47})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_L^{wT} \delta \dot{u}_{i,i} d\Omega = \\ & \underline{\int_{\Omega} (N_L^{wT} \delta \dot{u}_i)_{,i} d\Omega} - \int_{\Omega} N_{L,i}^{wT} \delta \dot{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.48})$$

Aplicado-se o teorema de Green nos termos sublinhados das equações 5.45 a 5.48,

$$\int_{\Omega} (N_L^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j})_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j} n_j d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.49})$$

$$\int_{\Omega} (N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j n_j d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.50})$$

$$\int_{\Omega} (N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j n_j d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.51})$$

$$\int_{\Omega} \left(N_L^{wT} \delta \dot{u}_i \right)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} N_L^{wT} \delta \dot{u}_i n_i d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.52})$$

Substituindo-se as equações 5.49 a 5.52 na equação 5.44, resulta

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j} d\Gamma + \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j} n_j d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j n_j d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j d\Gamma - \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j n_j d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} N_L^{wT} \delta \dot{u}_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega} N_{L,i}^{wT} \delta \dot{u}_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_L^{wT} \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} d\Omega \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.53})$$

Reorganizando-se os termos,

$$\begin{aligned} & + \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j d\Omega \\ & - \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j d\Omega \\ & - \int_{\Omega} N_{L,i}^{wT} \delta \dot{u}_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_L^{wT} \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j n_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} N_L^{wT} \delta \dot{u}_i n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.54})$$

Considerando os valores nodais da variável deslocamento, \bar{u}_{Ki} , e poropressão, \bar{p}_{wLi} , de acordo com as equações 5.2 e 5.4,

$$u_i \cong N_K^u \bar{u}_{Ki} \quad (\text{Eq. 5.2})$$

$$p_{wi} \cong N_L^w \bar{p}_{wLi} \quad (\text{Eq. 5.4})$$

então a equação 5.54 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\Omega} N_{L,i}^{wT} N_K^u d\Omega \right) \delta \dot{u}_{Ki} + \left(\int_{\Omega} \frac{N_L^{wT} N_L^w}{\tilde{Q}} d\Omega \right) \delta \dot{p}_{wi} \\
& + \left(\int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} N_{L,j}^w d\Omega \right) \delta \bar{p}_{wi} \\
& + \left(\int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w N_K^u d\Omega \right) \delta \ddot{u}_{Ki} \quad (\text{Eq. 5.55}) \\
& = \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j d\Omega + \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \delta p_{w,j} n_j d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j n_j d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} N_L^{wT} \delta \dot{u}_i n_i d\Gamma
\end{aligned}$$

a qual pode ser expressa na forma vetorial (equação discretizada a nível local) por,

$$\mathbf{R} \delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S} \delta \dot{\mathbf{p}}_w + \mathbf{H} \delta \bar{\mathbf{p}}_w + \mathbf{G} \delta \ddot{\mathbf{u}} = \delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)} \quad (\text{Eq. 5.56})$$

onde

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} N_{L,i}^{wT} N_K^u d\Omega \quad (\text{Eq. 5.57})$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \frac{N_L^{wT} N_L^w}{\tilde{Q}} d\Omega \quad (\text{Eq. 5.58})$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} N_{L,j}^w d\Omega \quad (\text{Eq. 5.59})$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w N_K^u d\Omega \quad (\text{Eq. 5.60})$$

$$\begin{aligned}
\delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)} & = \int_{\Omega} N_{L,j}^{wT} k_{ij} \rho_w b_j d\Omega + \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} p_{w,j} n_j d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta \ddot{u}_j n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} N_L^{wT} k_{ij} \rho_w \delta b_j n_j d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} N_L^{wT} \delta \dot{u}_i n_i d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.61})
\end{aligned}$$

onde \mathbf{R} é a matriz de acoplamento sólido-fluido, \mathbf{S} a matriz de compressibilidade sólido-fluido, \mathbf{H} a matriz de fluxo do fluido, \mathbf{G} a matriz de fluxo dinâmico do fluido e $\delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)}$ o vetor de incremento de força do fluido.

A matriz de acoplamento sólido-fluido (equação 5.57) pode ser escrita na forma vetorial,

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{wT} \mathbf{N}^u d\Omega \quad (\text{Eq. 5.62})$$

com

$$\mathbf{B}^w = \bar{\mathbf{S}} \mathbf{N}^w \quad (\text{Eq. 5.63})$$

onde \mathbf{B}^w é a matriz das derivadas das funções de interpolação \mathbf{N}^w que descrevem o campo das poropressões.

De acordo com Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999] pode-se admitir (caso particular) que a matriz de acoplamento sólido-fluido \mathbf{R} (equação 5.62) é similar à transposta da matriz de acoplamento sólido-fluido \mathbf{Q} (equação 5.33), ou seja,

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \quad (\text{Eq. 5.64})$$

A matriz de compressibilidade sólido-fluido (equação 5.58) pode ser escrita na forma vetorial,

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{wT} \frac{1}{\tilde{Q}} \mathbf{N}^w d\Omega \quad (\text{Eq. 5.65})$$

onde

$$\frac{1}{\tilde{Q}} \equiv \frac{n}{K_w} + \frac{\tilde{\alpha} - n}{K_s} \quad (\text{Eq. 4.24})$$

A matriz de fluxo do fluido (equação 5.59) pode ser escrita na forma vetorial,

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{wT} \mathbf{k} \nabla \mathbf{N}^w d\Omega \quad (\text{Eq. 5.66})$$

com

$$\nabla \mathbf{N}^{wT} = \left[\frac{\partial N^w}{\partial x} \quad \frac{\partial N^w}{\partial y} \right] \quad (\text{Eq. 5.67})$$

onde \mathbf{k} é a matriz de permeabilidade absoluta. No caso de considerar a permeabilidade absoluta principal, a matriz de permeabilidade é dada por

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.68})$$

sendo k_x , k_y valores da permeabilidade absoluta na direção x e y , respectivamente. No caso de isotropia: $k = k_x = k_y$.

A matriz de fluxo dinâmico do fluido (equação 5.60) pode ser escrita na forma vetorial,

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{wT} \mathbf{k} \rho_w \mathbf{N}^u d\Omega \quad (\text{Eq. 5.69})$$

O vetor de incremento de força do fluido (equação 5.61) pode ser escrito na forma vetorial,

$$\delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}^{wT} \nabla^T (\mathbf{k} \rho_w \bar{\mathbf{b}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{wT} \mathbf{q} d\Gamma \quad (\text{Eq. 5.70})$$

onde

$$\nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.71})$$

sendo $\bar{\mathbf{b}}$ o vetor unitário de força de corpo e \mathbf{q} o vetor de influxo através do contorno do elemento.

De acordo com Chan [Chan, A.H.C., 1988] a matriz de fluxo dinâmico (equação 5.71) e os termos sublinhados do vetor dos fluxos nodais (equação 5.57) influem marginalmente nos resultados numéricos podendo ser desconsiderados da formulação. Logo,

$$\mathbf{Q}^T \delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H} \delta \bar{\mathbf{p}}_w + \mathbf{S} \delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_w - \delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.72})$$

As equações 5.28 e 5.72, aqui desenvolvidas em detalhe, são aquelas apresentadas diretamente por Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999].

(c) Acoplamento das equações simplificadas discretas

Combinando as equações 5.28 e 5.72 para descrever, a nível local (elemento acoplado), o comportamento dinâmico acoplado sólido-fluido, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \delta \ddot{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \dot{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}} \\ \delta \bar{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \delta \bar{\mathbf{f}}^{(s)} \\ \delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.73})$$

Neste ponto, um comentário sobre o amortecimento em solos deve ser feito. Quando geo-estruturas sob carregamento dinâmico são estudadas, para simular os efeitos de comportamento plástico de solos através de uma análise simplificada puramente elástica, adiciona-se nas equações de equilíbrio da fase sólida (equação 5.24) uma matriz de amortecimento viscoso, \mathbf{C} ,

$$\mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \delta \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{Q} \delta \bar{\mathbf{p}}_w = \delta \bar{\mathbf{f}}^{(s)} \quad (\text{Eq. 5.74})$$

Esta matriz de amortecimento tem significado físico, porém devido à falta de informação sobre a natureza do amortecimento, é usual assumir, a nível do elemento, que a mesma possa ser determinada como uma combinação linear da matriz de massa do sólido, \mathbf{M} , e da matriz de rigidez do sólido, \mathbf{K} . Dita matriz é conhecida também como matriz de amortecimento de Rayleigh, \mathbf{C}_R ,

$$\mathbf{C}_R = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K} \quad (\text{Eq. 5.75})$$

onde α_R e β_R são parâmetros que podem ser estimados como:

$$\alpha_R = \xi \omega_o \quad (\text{Eq. 5.76})$$

$$\beta_R = \frac{\xi}{\omega_o} \quad (\text{Eq. 5.77})$$

sendo ξ uma razão de amortecimento típica para o solo investigado (geralmente de 3% a 7%) e ω_o a frequência fundamental do sistema não-amortecido.

Tomando em conta a matriz de amortecimento de Rayleigh (equação 5.75), a equação que descreve o comportamento dinâmico do *elemento acoplado* (equação 5.73) pode então ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \delta \ddot{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \dot{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}} \\ \delta \bar{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \delta \bar{\mathbf{f}}^{(s)} \\ \delta \bar{\mathbf{f}}^{(w)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.78})$$

ou, na forma vetorial,

$$\bar{\mathbf{M}}_e \delta\ddot{\Phi} + \bar{\mathbf{C}}_e \delta\dot{\Phi} + \bar{\mathbf{K}}_e \delta\Phi - \delta\bar{\mathbf{f}}_e = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.79})$$

sendo $\bar{\mathbf{M}}_e$ a matriz de massa do elemento acoplado; $\bar{\mathbf{C}}_e$ a matriz de amortecimento do elemento acoplado; $\bar{\mathbf{K}}_e$ a matriz de rigidez do elemento acoplado; $\delta\bar{\mathbf{f}}_e$ o vetor de incremento de força do elemento acoplado; $\delta\bar{\Phi}$, $\delta\dot{\bar{\Phi}}$, $\delta\ddot{\bar{\Phi}}$ representam os vetores de incremento da variável generalizada a nível local e suas velocidades e acelerações, respectivamente; $\delta\bar{\mathbf{f}}^{(s)}$, $\delta\bar{\mathbf{f}}^{(w)}$ representam os vetores de incremento de força a nível local do sólido e do fluido, respectivamente; $\delta\bar{\mathbf{u}}$, $\delta\dot{\bar{\mathbf{u}}}$, $\delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$ representam os vetores de incremento do deslocamento do sólido a nível local e suas velocidades e acelerações, respectivamente e $\delta\bar{\mathbf{p}}_w$, $\delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_w$, $\delta\ddot{\bar{\mathbf{p}}}_w$ representam os vetores de incremento da poropressão do fluido a nível local e suas velocidades e acelerações, respectivamente.

Após o procedimento de montagem dos elementos finitos, a equação discreta que descreve o comportamento dinâmico acoplado sólido-fluido a nível global (sistema), tem a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \delta\ddot{\bar{\mathbf{p}}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^T & \tilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\bar{\mathbf{u}} \\ \delta\bar{\mathbf{p}}_w \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \delta\tilde{\mathbf{f}}^{(s)} \\ \delta\tilde{\mathbf{f}}^{(w)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.80})$$

ou, na forma vetorial,

$$\tilde{\mathbf{M}}_s \delta\ddot{\Phi} + \tilde{\mathbf{C}}_s \delta\dot{\Phi} + \tilde{\mathbf{K}}_s \delta\Phi - \delta\tilde{\mathbf{f}}_s = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.81})$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}_s$ representa a matriz de massa do sistema; $\tilde{\mathbf{C}}_s$ a matriz de amortecimento do sistema; $\tilde{\mathbf{K}}_s$ a matriz de rigidez do sistema; $\delta\tilde{\mathbf{f}}_s$ o vetor de incremento de força do sistema; $\delta\tilde{\Phi}$, $\delta\dot{\tilde{\Phi}}$, $\delta\ddot{\tilde{\Phi}}$ representam os vetores de incremento da variável generalizada a nível global e suas velocidades e acelerações, respectivamente; $\delta\tilde{\mathbf{f}}^{(s)}$, $\delta\tilde{\mathbf{f}}^{(w)}$ representam os vetores de incremento de força a nível global do sólido e do fluido, respectivamente; $\delta\tilde{\mathbf{u}}$, $\delta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}$, $\delta\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}$ representam os vetores de incremento do deslocamento do sólido a nível global e

suas velocidades e acelerações, respectivamente e $\delta\tilde{\mathbf{p}}_w$, $\delta\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_w$, $\delta\ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_w$ representam os vetores de incremento da poropressão do fluido a nível global e suas velocidades e acelerações, respectivamente.

5.2 Discretização temporal

Após a discretização espacial das equações governantes a nível local (elemento acoplado) e a obtenção da equação discreta a nível global (sistema), através do procedimento de montagens dos elementos finitos, é necessário executar-se a discretização temporal (integração temporal) da equação 5.81 para completar a solução numérica do problema dinâmico. Nesta tese utiliza-se o esquema de integração temporal proposto por Newmark ou *método de Newmark* [Newmark, N.M., 1959]. O método de Newmark, baseado na técnica das diferenças finitas, é descrito a seguir.

No tempo $t + \Delta t$, a equação que descreve o comportamento dinâmico acoplado sólido-fluido a nível global (equação 5.74), chamada também *equação de equilíbrio dinâmico do sistema*, pode ser escrita como,

$$\tilde{\mathbf{M}}_S \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t} + \tilde{\mathbf{C}}_S \delta\dot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t} + \tilde{\mathbf{K}}_S \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{f}}_{S,t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.82})$$

onde $\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}$, $\delta\dot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t}$ e $\delta\ddot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t}$ são vetores do incremento da variável generalizada a nível global e suas velocidades e acelerações, respectivamente, no tempo $t + \Delta t$.

Pelo método de Newmark, a relação entre valores temporais sucessivos (Δt) da variável generalizada a nível global, suas velocidades e acelerações podem ser determinados por

$$\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} = \delta\tilde{\Phi}_t + \delta\dot{\tilde{\Phi}}_t \Delta t + \frac{1}{2} \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \Delta t^2 + \beta \left(\delta\ddot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t} - \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \right) \Delta t^2 \quad (\text{Eq. 5.83})$$

$$\delta\dot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t} = \delta\dot{\tilde{\Phi}}_t + \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \Delta t + \alpha \left(\delta\ddot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t} - \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \right) \Delta t \quad (\text{Eq. 5.84})$$

$$\delta\ddot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left(\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} - \delta\tilde{\Phi}_t \right) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \delta\dot{\tilde{\Phi}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \quad (\text{Eq. 5.85})$$

onde α , β são constantes do método de Newmark e $\delta\tilde{\Phi}_t$, $\delta\dot{\tilde{\Phi}}_t$ e $\delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t$ são vetores do incremento da variável generalizada a nível global e suas velocidades e acelerações, respectivamente, no tempo t .

Considerando as equações 5.83 a 5.85, a *equação de equilíbrio dinâmico do sistema* (equação 5.82), pode ser escrita de forma equivalente ao *equilíbrio estático*,

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_S \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} = \overline{\overline{\delta\mathbf{f}}}_{S_{t+\Delta t}} \quad (\text{Eq. 5.86})$$

com

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_S = \left(\left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}}_S + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{C}}_S + \tilde{\mathbf{K}}_S \right) \quad (\text{Eq. 5.87})$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\delta\mathbf{f}}}_{S_{t+\Delta t}} = & -\delta\tilde{\mathbf{f}}_{S_{t+\Delta t}} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{S_t} \\ & + \left(\left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{\Delta t} \delta\dot{\tilde{\Phi}}_t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \right) \tilde{\mathbf{M}}_S \\ & + \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \delta\dot{\tilde{\Phi}}_t + \left(\frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \Delta t \delta\ddot{\tilde{\Phi}}_t \right) \tilde{\mathbf{C}}_S \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.88})$$

onde $\overline{\overline{\mathbf{K}}}_S$ é a matriz de rigidez equivalente do sistema; $\overline{\overline{\delta\mathbf{f}}}_{S_{t+\Delta t}}$ o vetor de incremento de força equivalente do sistema no tempo $t + \Delta t$ e $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{S_{t+\Delta t}}$, $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{S_t}$ representam os vetores de incremento de força do sistema no tempo $t + \Delta t$ e t , respectivamente.

O vetor da variável generalizada a nível global no tempo $t + \Delta t$, $\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}$, pode ser obtido por

$$\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} = \delta\tilde{\Phi}_0 + \sum \delta\tilde{\Phi}_t + \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} \quad (\text{Eq. 5.89})$$

sendo $\delta\tilde{\Phi}_0$ o vetor de incremento da variável generalizada a nível global na condição inicial ($t = 0$), obtido previamente da análise estática, $\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}$ o vetor de incremento da variável generalizada a nível global no tempo $t + \Delta t$, obtido da solução da equação 5.86, e $\sum \delta\tilde{\Phi}_t$ a soma dos vetores de incremento da variável generalizada a nível global previamente calculados até o tempo t .

Em seguida, o vetor de incremento da aceleração da variável generalizada a nível global, $\delta\ddot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t}$, é calculado pela equação 5.85 e o vetor de incremento da velocidade da variável generalizada a nível global, $\delta\dot{\tilde{\Phi}}_{t+\Delta t}$, pelas equações 5.84.

Cabe mencionar que a equação 5.86 representa um sistema de equações cujas incógnitas são os incrementos de deslocamento do sólido e as poropressões do fluido a nível global, devendo ser utilizados diferentes valores das constantes α e β nas equações correspondentes ao sólido e à fase fluida.

Substituindo-se nas equações 5.87 e 5.88 os escalares α e β pelos vetores

$$\mathbf{a}_1 = \left\{ \frac{1}{\alpha_s} \quad \frac{1}{\alpha_w} \right\}^T \quad (\text{Eq. 5.90})$$

$$\mathbf{a}_2 = \left\{ \frac{\beta_s}{\alpha_s} \quad \frac{\beta_w}{\alpha_w} \right\}^T \quad (\text{Eq. 5.91})$$

obté-m-se,

$$\bar{\mathbf{K}}_S = \left(\mathbf{a}_1 \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}}_S + \mathbf{a}_2 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{C}}_S + \tilde{\mathbf{K}}_S \right) \quad (\text{Eq. 5.92})$$

e

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{f}}_{S_{t+\Delta t}} = & -\delta \tilde{\mathbf{f}}_{S_{t+\Delta t}} + \delta \tilde{\mathbf{f}}_{S_t} \\ & + \left(\mathbf{a}_1 \frac{1}{\Delta t} \delta \dot{\tilde{\Phi}}_t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_1 \delta \ddot{\tilde{\Phi}}_t \right) \tilde{\mathbf{M}}_S \\ & + \left(\mathbf{a}_2 \delta \dot{\tilde{\Phi}}_t + \mathbf{a}_3 \Delta t \delta \ddot{\tilde{\Phi}}_t \right) \tilde{\mathbf{C}}_S \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.93})$$

com

$$\mathbf{a}_3 = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\beta_s}{\alpha_s} - 1 \quad \frac{1}{2} \frac{\beta_w}{\alpha_w} - 1 \right\}^T \quad (\text{Eq. 5.94})$$

considerando α_s e β_s as constantes do método de Newmark para o deslocamento do sólido e α_w e β_w para a poropressão do fluido.

Explicitamente, a matriz de rigidez equivalente do sistema (equação 5.87) é reescrita como

$$\bar{\mathbf{K}}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_s \Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\beta_s}{\alpha_s \Delta t} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{Q}} \\ \frac{\beta_w}{\alpha_w \Delta t} \tilde{\mathbf{Q}}^T & \frac{\beta_w}{\alpha_w \Delta t} \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.95})$$

e o vetor de incremento de força equivalente do sistema (equação 5.88) por

$$\delta \mathbf{f}_{S_{t+\Delta t}} = \left\{ \begin{array}{cc} \delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(s)} & \delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(w)} \end{array} \right\}^T \quad (\text{Eq.5.96})$$

com

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(s)} &= -\delta \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}^{(s)} + \delta \tilde{\mathbf{f}}_t^{(s)} \\ &+ \left(\frac{1}{\alpha_s \Delta t} \delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t + \frac{1}{2\alpha_s} \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \right) \tilde{\mathbf{M}} \\ &+ \left(\frac{\beta_s}{\alpha_s} \delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t + \Delta t \left(\frac{\beta_s}{2\alpha_s} - 1 \right) \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \right) \tilde{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{Eq.5.97})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(w)} &= -\delta \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}^{(w)} + \delta \tilde{\mathbf{f}}_t^{(w)} \\ &+ \left(\frac{\beta_s}{\alpha_s} \delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t + \Delta t \left(\frac{\beta_s}{2\alpha_s} - 1 \right) \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \right) \tilde{\mathbf{Q}}^T \\ &+ \left(\frac{\beta_w}{\alpha_w} \delta \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{w_t} \right) \tilde{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (\text{Eq.5.98})$$

Diversos pesquisadores ([Lewis, R.W.; Schrefler, B.A., 1998], [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999], [Pastor, M., et al., 1999], [Schrefler, B.A., 2004]) recomendam a utilização do método de Newmark Generalizado para integração no tempo da equação 5.82. Este método foi denominado inicialmente método beta-m por Katona [Katona, M.G., 1985] e renomeado método de Newmark Generalizado (*GN_{pj}*) por Katona e Zienkiewicz [Katona, M.G.; Zienkiewicz, O.C., 1985], onde *p* é a ordem do esquema de integração numérica e *j* a ordem da equação diferencial no tempo, sendo que $p \geq j$.

Para análises dinâmicas, Katona e Zienkiewicz [Katona, M.G.; Zienkiewicz, O.C., 1985] recomendam *GN22* na integração dos deslocamentos e *GN11* para as poropressões, resultando nas equações seguintes:

$$\delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{t+\Delta t} = \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t + \delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \Delta t + \frac{1}{2} \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \Delta t^2 + \frac{1}{2} \beta_2 (\delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{t+\Delta t} - \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t) \Delta t^2 \quad (\text{Eq. 5.99})$$

$$\delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{t+\Delta t} = \delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t + \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \Delta t + \beta_1 (\delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{t+\Delta t} - \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t) \Delta t \quad (\text{Eq. 5.100})$$

$$\delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_1 \Delta t^2} (\delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} - \delta \tilde{\mathbf{u}}_t) - \frac{1}{\beta_1 \Delta t} \delta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t - \left(\frac{1}{2\beta_1} - 1 \right) \delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_t \quad (\text{Eq. 5.101})$$

onde β_1 e β_2 são constantes do método de Newmark Generalizado *GN22* (para o deslocamento do sólido).

$$\delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_{t+\Delta t}} = \delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_t} + \delta \ddot{\mathbf{p}}_{w_t} \Delta t + \bar{\beta}_1 (\delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_{t+\Delta t}} - \delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_t}) \quad (\text{Eq. 5.102})$$

$$\delta \ddot{\mathbf{p}}_{w_{t+\Delta t}} = \delta \ddot{\mathbf{p}}_{w_t} + \frac{\delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_{t+\Delta t}} - \delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_t}}{\Delta t} \quad (\text{Eq. 5.103})$$

onde $\bar{\beta}_1$ é a constante do método de Newmark Generalizado *GN11* (para a poropressão do fluido).

Observe que considerando-se $\beta = \beta_s = 1/2 \beta_2$ e $\alpha = \alpha_s = \beta_1$ nas equações 5.83 a 5.85 obtêm-se expressões similares às do método *GN22* (equações 5.99 a 5.101). Da mesma forma, tomando-se $\beta = \beta_w = \bar{\beta}_1$, $\alpha = \alpha_w = 1$ e admitindo-se $\delta \ddot{\mathbf{p}}_{w_{t+\Delta t}} = \mathbf{0}$ resulta nas equações 5.83 e 5.84 expressões semelhantes às do método *GN11* (equações 5.102 e 5.103).

Logo, basta fazer a equivalência entre estes valores para transformar a equação 5.95 em

$$\bar{\mathbf{K}}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{Q}} \\ \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{Q}}^T & \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.5.104})$$

e as equações 5.97 e 5.98 em

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}^{(s)} &= -\delta \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}^{(s)} + \delta \tilde{\mathbf{f}}_t^{(s)} \\ &+ \left(\frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t} \delta \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{2\beta_1} \delta \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \tilde{\mathbf{M}} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta \ddot{\mathbf{u}}_t + \Delta t \left(\frac{1}{4} \frac{\beta_2}{\beta_1} - 1 \right) \delta \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \tilde{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.105})$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}^{(w)} &= -\delta \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}^{(w)} + \delta \tilde{\mathbf{f}}_t^{(w)} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta \ddot{\mathbf{u}}_t + \Delta t \left(\frac{1}{4} \frac{\beta_2}{\beta_1} - 1 \right) \delta \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \tilde{\mathbf{Q}}^T \\ &+ (\bar{\beta}_1 \delta \tilde{\mathbf{p}}_{w_t}) \tilde{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.106})$$

O método de Newmark Generalizado é condicionalmente estável, devendo satisfazer as seguintes condições para assegurar a convergência da solução numérica:

$$\beta_2 \geq \beta_1 \geq \frac{1}{2} \quad (\text{Eq. 5.107})$$

$$\bar{\beta}_1 \geq \frac{1}{2} \quad (\text{Eq. 5.108})$$

O emprego da equação 5.86, considerando as equações 5.104 e 5.96 com 5.105 e 5.106, permitem o cálculo direto das incógnitas $\delta\tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ e $\delta\tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t}$. Este procedimento, utilizado nesta tese, se diferencia daquele sugerido por Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999], baseado primeiramente no cálculo das incógnitas $\delta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ e $\delta\ddot{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t}$ e, em seguida, das quantidades incrementais $\delta\tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ e $\delta\tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t}$ através de integração temporal. A alternativa adotada neste trabalho é mais eficiente em termos de execução computacional.

5.3

Linearização das equações discretas do sistema sólido-fluido

Na solução de sistema de equações não-lineares, a equação 5.86 geralmente não é satisfeita, existindo uma força desequilibrada do sistema $\Psi_S \langle \mathbf{x} \rangle$ que deve ser reduzida, dentro de certos limites de tolerância do erro relativo, através de técnicas iterativas.

$$\Psi_S \langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\bar{\mathbf{K}}}_S \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} - \delta\bar{\bar{\mathbf{f}}}_{St+\Delta t} \quad (\text{Eq. 5.109})$$

com

$$\mathbf{x} = \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \delta\tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \delta\tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.110})$$

$$\Psi_S \langle \mathbf{x} \rangle = \begin{Bmatrix} \Psi^{(s)} \\ \Psi^{(w)} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.111})$$

Dentre estas, o método de Newton-Raphson baseado na expansão da equação 5.109 por série de Taylor

$$\begin{aligned} \Psi_s \langle \mathbf{x} |^{i+1} \rangle &= \\ &\Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle + \\ &\frac{\partial \Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} |^i + \frac{\partial^2 \Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle}{\partial \mathbf{x}^2} (d\mathbf{x} |^i)^2 + \dots \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.112})$$

Considerando que na iteração $i + 1$ a solução exata é obtida,

$$\Psi_s \langle \mathbf{x} |^{i+1} \rangle = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.113})$$

e truncando-se a série de Taylor de modo a ignorar os termos de segunda ou maior ordem (sublinhados na equação 5.112), resulta

$$\Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle + \frac{\partial \Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} |^i = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 5.114})$$

ou

$$\mathbf{J} d\mathbf{x} |^i = -\Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle \quad (\text{Eq. 5.115})$$

sendo \mathbf{J} a matriz jacobiana definida por

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{Eq. 5.116})$$

ou, no caso do problema acoplado, no passo de tempo $t + \Delta t$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi^{(s)} |^i}{\partial \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \Psi^{(s)} |^i}{\partial \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wT+\Delta t}} \\ \frac{\partial \Psi^{(w)} |^i}{\partial \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \Psi^{(w)} |^i}{\partial \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wT+\Delta t}} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 5.117})$$

A matriz jacobiana pode ser calculada pelas equações 5.117 e 5.109 como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}|^i &= \frac{\partial}{\partial \delta \tilde{\Phi}_{t+\Delta t}} \left(\Psi_s |^i \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \delta \tilde{\Phi}_{t+\Delta t}} \left(\bar{\mathbf{K}}_s |^i \delta \tilde{\Phi}_{t+\Delta t} |^i - \delta \bar{\mathbf{f}}_{s,t+\Delta t} |^i \right) \\
 &= \bar{\mathbf{K}}_s |^i
 \end{aligned} \tag{Eq. 5.118}$$

sendo

$$\Psi_s |^i = \Psi_s \langle \mathbf{x} |^i \rangle \tag{Eq. 5.119}$$

ou (da equação 5.104)

$$\mathbf{J}|^i = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{Q}} \\ \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{Q}}^T & \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{H}} \end{array} \right]^i \tag{Eq. 5.120}$$

O sistema de equações fica finalmente expresso da seguinte forma,

$$\mathbf{J}|^i \left\{ \begin{array}{l} d(\delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}) \\ d(\delta \tilde{\mathbf{p}}_{w,t+\Delta t}) \end{array} \right\}^{i+1} = - \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(s)} \\ \Psi^{(w)} \end{array} \right\} |^i \tag{Eq. 5.121}$$

ou

$$\mathbf{J}|^i d(\delta \tilde{\Phi}_{t+\Delta t})^{i+1} = - \Psi_s |^i \tag{Eq. 5.122}$$

onde $d(\delta \tilde{\Phi}_{t+\Delta t})^{i+1}$ é a solução da equação 5.122.

Observe-se que a matriz jacobiana \mathbf{J} não é simétrica, devendo sua segunda coluna ser multiplicada por $-\bar{\beta}_1/\Delta t$ para obter-se

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}} & \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{Q}} \\ \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{Q}}^T & -\bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{H}} \right) \end{array} \right]^i \left\{ \begin{array}{l} d(\delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}) \\ d(\delta \tilde{\mathbf{p}}_{w,t+\Delta t}) \end{array} \right\}^{i+1} \\
 &= - \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(s)} \\ -\bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \Psi^{(w)} \end{array} \right\} |^i
 \end{aligned} \tag{Eq. 5.123}$$

O vetor $\Psi_s \Big| ^i$ é calculado da equação 5.109 por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(s)} \\ \Psi^{(w)} \end{array} \right\} \Big| ^i = \overline{\mathbf{K}}_s \Big| ^i \left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \end{array} \right\} \Big| ^i - \left\{ \begin{array}{l} \delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(s)} \\ \delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(w)} \end{array} \right\} \Big| ^i \quad (\text{Eq. 5.124})$$

onde

$$\Psi^{(s)} \Big| ^i = -\delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(s)} + \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{M}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{C}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \tilde{\mathbf{P}} \langle \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \rangle - \tilde{\mathbf{Q}} \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \quad (\text{Eq. 5.125})$$

$$\Psi^{(w)} \Big| ^i = -\delta \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{(w)} + \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{Q}}^T \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \bar{\beta}_1 \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{S}} \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} + \tilde{\mathbf{H}} \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \quad (\text{Eq. 5.126})$$

e

$$\tilde{\mathbf{P}} \langle \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \rangle = \sum \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^{uT} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t d\Omega \right] + \tilde{\mathbf{P}} \langle \delta \tilde{\mathbf{u}}_t \rangle \quad (\text{Eq. 5.127})$$

com

$$\delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{B}^u \delta \tilde{\mathbf{u}}_t \quad (\text{Eq. 5.128})$$

onde o símbolo $\sum []$ representa o procedimento de montagem dos elementos finitos.

Em cada iteração o vetor de incremento da variável generalizada a nível global é acumulada,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \end{array} \right\} \Big|^{i+1} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \end{array} \right\} \Big| ^i + \left\{ \begin{array}{l} d(\delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}) \\ d(\delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t}) \end{array} \right\} \Big|^{i+1} \quad (\text{Eq. 5.129})$$

ou,

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{t+\Delta t} \Big|^{i+1} = \delta \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{t+\Delta t} \Big| ^i + d(\delta \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{t+\Delta t}) \Big|^{i+1} \quad (\text{Eq. 5.130})$$

Finalmente, a solução na iteração $n+1$ é obtida como

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \end{array} \right\} \Big|^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t} \end{array} \right\} \Big| ^0 + \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} d(\delta \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}) \\ d(\delta \tilde{\mathbf{p}}_{wt+\Delta t}) \end{array} \right\} \Big| ^j \quad (\text{Eq. 5.131})$$

ou

$$\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} \Big|^{n+1} = \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} \Big|^{0} + \sum_{j=1}^n d(\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t})^j \quad (\text{Eq. 5.132})$$

admitindo-se o seguinte critério de convergência para a variável generalizada a nível global $\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}$,

$$\frac{\left\| d(\delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t})^i \right\|}{\left\| \delta\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} \Big|^{i+1} \right\|} \leq \text{tolerância} \quad (\text{Eq. 5.133})$$

Observe-se que o termo sublinhado da equação 5.132 representa a solução da equação 5.86.

Na solução numérica do sistema de equações não-lineares pelo método de Newton-Raphson (equação 5.122) naturalmente devem ser impostas as condições iniciais ($t = 0$) e as condições de contorno do problema específico.