

## 4

# Equações governantes da interação dinâmica sólido-fluido

### 4.1

#### Introdução

Uma abordagem macroscópica é utilizada nesta tese para o estudo dos fenômenos que ocorrem em solos (*meio poroso* ou *sistema sólido-fluido*). As leis físicas, baseadas no *princípio da conservação*, usadas para a formulação das equações diferenciais que modelam o movimento do sistema sólido-fluido são aplicadas supondo o meio como *contínuo*. Estas equações, chamadas *equações fundamentais*, são as equações da continuidade, de movimento e de energia. Por outro lado, os fenômenos dinâmicos que ocorrem devido à interação sólido-fluido devem ser modelados através de *equações de acoplamento*, envolvendo a aplicação da lei de Darcy [Darcy, H., 1856] e o *princípio das tensões efetivas* para solos saturados [Terzaghi, K., 1936]. As incógnitas do problema estão relacionadas com os deslocamentos no sólido e as poropressões.

Em termos gerais, o procedimento para a formulação das *equações governantes* consiste numa combinação das equações fundamentais, das equações de acoplamento entre as fases e da equação constitutiva do meio poroso, originando um sistema de equações diferenciais sujeitas a condições iniciais e de contorno específicas para o problema estudado.

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes de um solo totalmente saturado por água ou *sistema sólido-água*, inicialmente propostas por Biot [Biot, M.A., 1956a] e depois reformuladas para aplicações no MEF por Zienkiewicz e Shiomi [Zienkiewicz, O.C.; Shiomi, T., 1984].

### 4.2

#### Aspectos gerais

Pode-se definir um meio poroso como um sistema composto por uma parte sólida persistente, chamada matriz sólida (sólido), e espaços vazios (espaço poroso) que podem estar preenchidos por um ou mais fluidos (água, óleo ou gás),

ver figura 4.1. Exemplos típicos no âmbito da mecânica dos solos são sedimentos arenosos, rejeitos de mineração, rochas porosas, reservatórios de petróleo, etc.

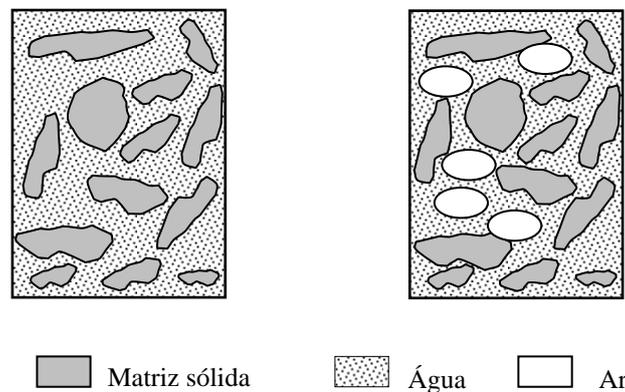


Figura 4.1 - Representação esquemática de um meio poroso preenchido com um ou dois fluidos, [Bastian, P., 1999].

Os espaços vazios nos meios porosos podem estar interconectados ou estanques, condicionando, portanto, a passagem do fluido através do solo ou, em outras palavras, definindo a sua *permeabilidade* (figura 4.2). Um parâmetro relacionado com a capacidade de armazenamento do meio poroso é a *porosidade*,  $n$ , definida como a razão entre o volume ocupado pelos vazios,  $V_v$ , e o volume total do sistema sólido-fluido,  $V$ .

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (\text{Eq. 4.1})$$

Embora a porosidade possa variar espacialmente e com a pressão interna nos vazios, na abordagem macroscópica da mecânica dos solos é usual assumir um valor médio de porosidade.

De acordo com Bear e Bachmat [Bear, J.; Bachmat, Y., 1991], uma fase é definida como uma região quimicamente homogênea de um sistema e delimitada por um contorno físico definido. Se os espaços vazios do meio poroso contêm fluidos com mais de duas fases *inmiscíveis* (água, óleo e gás) o meio é caracterizada como um *sistema multifásico*. No caso de um *sistema monofásico*, os espaços vazios são preenchidos por único fluido ou por vários fluidos *miscíveis*. Um parâmetro que indica o volume relativo ocupado por cada fase do fluido presente no meio poroso é o grau de saturação,  $S_r$ . Por exemplo, num

sistema *bifásico* formado com água e óleo, a saturação da água,  $S_{r_w}$ , é definida por,

$$S_{r_w} = \frac{V_w}{V_v} \cdot 100 \quad (\text{Eq. 4.2})$$

onde  $V_w$  é volume ocupado pela água presente no volume ocupados pelos vazios,  $V_v$ .

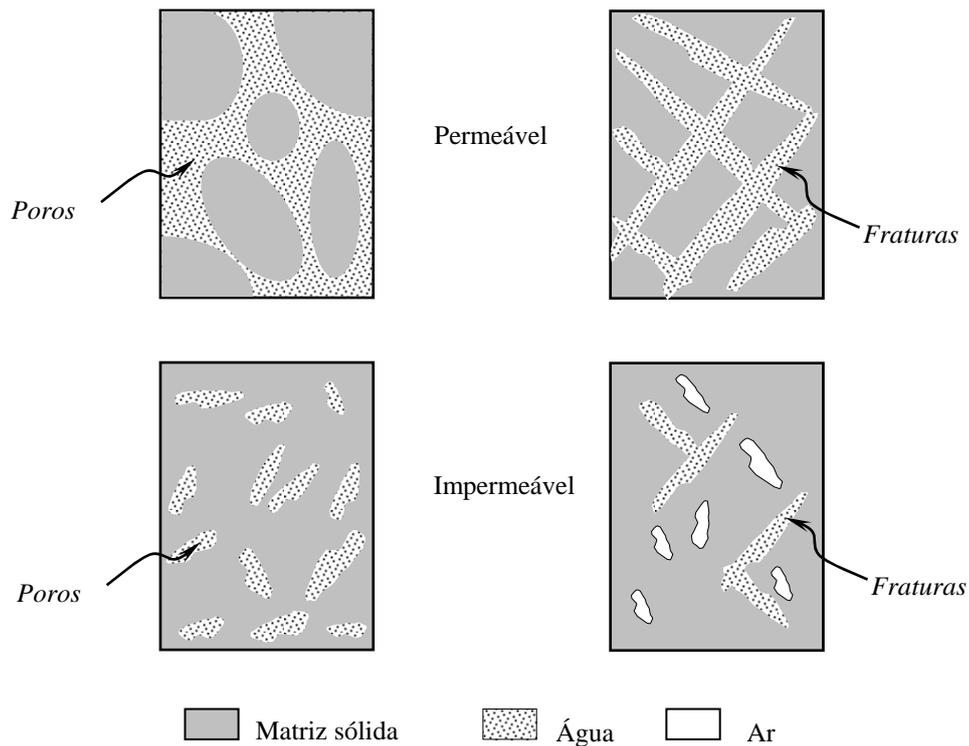


Figura 4.2 - Representação esquemática de um meio poroso permeável e impermeável.

Em Mecânica dos Solos, um elemento típico de solo (figura 4.3) é estudado como um meio contínuo com uma matriz sólida (partículas minerais) com seus poros (vazios) preenchidos por um fluido com duas fases: a líquida (normalmente água) e a gasosa (normalmente ar).

Considerando um solo totalmente saturado por água, as massas específicas deste sistema monofásico podem ser escritas como:

Massa específica do solo,  $\rho$ ,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_s + M_w}{V} \quad (\text{Eq. 4.3})$$

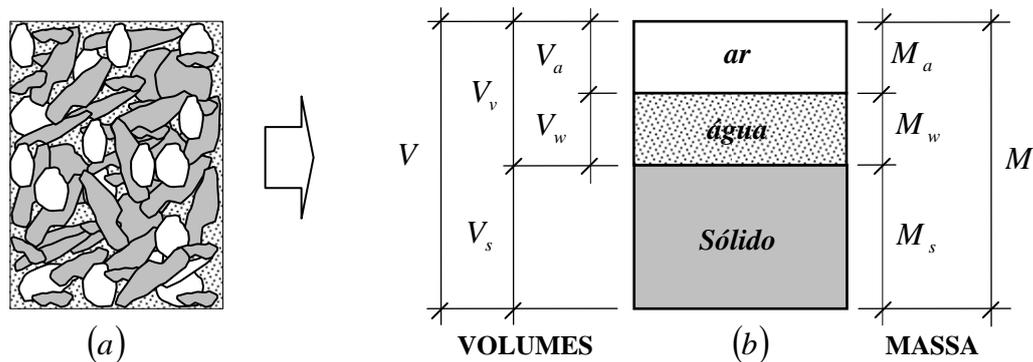


Figura 4.3 - Fases do solo; (a) estado natural, (b) representação esquemática em termos de volumes e massas.

Massa específica do sólido,  $\rho_s$ ,

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \quad (\text{Eq. 4.4})$$

Massa específica do fluido (água),  $\rho_w$ ,

$$\rho_w = \frac{M_w}{V_w} \quad (\text{Eq. 4.5})$$

Das equações anteriores obtém-se facilmente que

$$\rho = (1 - n)\rho_s + n\rho_w \quad (\text{Eq. 4.6})$$

Sob o ponto de vista macroscópico, um fluido é definido como um material que se deforma continuamente quando submetido a uma tensão de cisalhamento, não importando quão pequena esta possa ser [Streeter, V.L., 1974]. Dependendo da taxa de deformação e da tensão de cisalhamento, os fluidos podem ser classificados como *newtonianos* ou *não-newtonianos*. No primeiro caso, existe uma relação linear entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, sendo a constante de proporcionalidade denominada viscosidade absoluta ou dinâmica. Para fluidos não-newtonianos, esta relação é do tipo não-linear.

Outra classificação pode ser também feita em termos da variação volumétrica. Um fluido que apresenta resistência à redução de seu volume próprio é denominado *incompressível*, enquanto que aquele que responde com uma redução de volume sob ação de pressões é dito *compressível*. Um índice

quantitativo desta classificação é o número de Mach, definido pela razão entre a velocidade de escoamento e a velocidade de propagação do som no fluido. Quando o número de Mach for inferior a 0,3 o fluido é na prática caracterizado como incompressível [Fox, R.W.; McDonald, A.T., 2001].

Os escoamentos onde se desprezam os efeitos da viscosidade são denominados *não-viscosos*; caso contrário, *viscosos*, que podem acontecer sob regimes de fluxo *laminar* ou *turbulento*. Em regime laminar, o escoamento é caracterizado pelo movimento suave de camadas de fluido, que acontece abaixo de uma velocidade crítica de absorção das *turbulências* pela viscosidade do fluido, função do número de Reynolds.

#### 4.2.1 Lei de Darcy

Uma lei que descreve o comportamento dos fluidos em meios porosos sob regime laminar foi obtida experimentalmente por Darcy [Darcy, H., 1856]. Trabalhando com areias homogêneas não-consolidadas, Darcy concluiu que para um fluxo unidimensional de um fluido incompressível (água), a vazão do fluido (água),  $Q$ , através de uma amostra saturada por água, de comprimento  $L$  e seção transversal de área  $A$ , pode ser satisfatoriamente estimada por (lei de Darcy)

$$Q = -k'A \frac{\Delta h_w}{L} \quad (\text{Eq. 4.7})$$

onde  $\Delta h_w$  é a variação da carga hidráulica e  $k'$  é a permeabilidade relativa do meio poroso (empregada habitualmente na mecânica dos solos). O sinal negativo desta expressão indica que a carga hidráulica diminui no sentido do fluxo.

Admitindo-se fluxo apenas na direção horizontal, com remoção de efeitos gravitacionais, a equação acima pode ser escrita em termos da variação da poropressão,  $\Delta p_w$ , da massa específica da água,  $\rho_w$ , e da aceleração da gravidade,  $\vec{g}$ , como

$$Q = -\frac{k'}{\rho_w \cdot \vec{g}} \cdot A \cdot \frac{\Delta p_w}{L} \quad (\text{Eq. 4.8})$$

ou, na forma diferencial

$$\dot{w} = \frac{Q}{A} = -k \frac{\partial p_w}{\partial L} \quad (\text{Eq. 4.9})$$

com

$$k = \frac{k'}{\rho_w \cdot \bar{g}} \quad (\text{Eq. 4.10})$$

definida como permeabilidade absoluta.

A equação 4.9 pode ser generalizada para sistemas tridimensionais, aplicando-a em cada uma das direções. Na notação indicial

$$\dot{w}_i = -k_{ij} p_{w,i} \quad (\text{Eq. 4.11})$$

onde  $k_{ij}$  é a componente da matriz de permeabilidade absoluta e  $\dot{w}_i$  a componente do vetor de velocidade do fluido relativo ao sólido,

$$\dot{w}_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad (\text{Eq. 4.12})$$

com  $w_i$  a componente do vetor de deslocamento do fluido relativo ao sólido, definido por

$$w_i = n(U_i - u_i) \quad (\text{Eq. 4.13})$$

onde  $n$  é a porosidade,  $U_i$  a componente do vetor de deslocamento da fase fluida e  $u_i$  a componente do vetor do deslocamento do sólido.

Se os efeitos gravitacionais forem levados em conta no modelo matemático, admitindo-se que a direção do eixo  $y$  é vertical, orientado positivamente para cima, então

$$\dot{w}_y = -k_y \cdot \left( \frac{\partial p_w}{\partial y} + \rho_w \bar{g} \right) \quad (\text{Eq. 4.14})$$

#### 4.2.2 Princípio das tensões efetivas de Terzaghi

O princípio das tensões efetivas, postulado por [Terzaghi, K., 1936] para solos saturados, diz que “*todos os efeitos verificados por uma variação de tensão, tais como compressão, distorção e variação da resistência ao cisalhamento são devidos exclusivamente à variação do estado de tensões efetivas*”.

A tensão normal total,  $\sigma$ , atuante em um plano qualquer, deve ser considerada como a soma de duas parcelas: (1) a tensão transmitida pelos contatos entre partículas, designada *tensão efetiva*,  $\sigma'$ ; (2) a poropressão na água,  $p_w$ . Assim,

$$\sigma' = \sigma - p_w \quad (\text{Eq. 4.15})$$

assumindo-se implicitamente que as partículas sólidas e a água são incompressíveis.

A equação acima pode ser generalizada como

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \tilde{\alpha} \delta_{ij} p_w \quad (\text{Eq. 4.16})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\tilde{\alpha}$  a constante de Biot, que incorpora os efeitos de compressibilidade das partículas sólidas,

$$\tilde{\alpha} = 1 - \frac{K_T}{K_s} \quad (\text{Eq. 4.17})$$

onde  $K_T$  é módulo de deformação volumétrica do sistema sólido-água e  $K_s$  o módulo de deformação volumétrica das partículas sólidas.

Para materiais elásticos isotrópicos,

$$K_T = \frac{9\lambda + 6\mu}{9} \quad (\text{Eq. 4.18})$$

com  $\lambda$ ,  $\mu$  as constantes de Lamé.

A diferença de sinal entre as equações 4.15 e 4.16 se justifica, porque na segunda a convenção de sinais adotada é que as componentes normais de tensão são positivas no caso de tração (consideradas negativas na convenção clássica de mecânica de solos, implícita na equação 4.15).

Para a grande maioria dos problemas da mecânica dos solos, o módulo de deformação volumétrica das partículas sólidas é muito maior que o módulo de deformação volumétrica do sistema sólido-água, i.e.  $K_T/K_s \approx 0$  e  $\tilde{\alpha} \approx 1$ . Nesta condição, a equação 4.16 pode ser reescrita como,

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p_w \quad (\text{Eq. 4.19})$$

### 4.3 Equações governantes

O modelo matemático do fenômeno da liquefação deve proporcionar uma adequada descrição do comportamento acoplado sólido-fluido sob ação de forças externas transientes. Um conjunto de equações diferenciais foi proposto inicialmente por [Biot, M.A., 1956a] e depois adequadas para aplicações numéricas por diversos pesquisadores ([Ghaboussi, J.; Wilson, E., 1972], [Zienkiewicz, O.C.; Shiomi, T., 1984], [Prevost, J.H., 1985], [Zienkiewicz, O.C., et al., 1980], [Schrefler, B.A.; Zhan, X., 1993]), exceto em casos de cravação de estacas ou em explosões, onde a aplicação do carregamento é muito rápida. Formulações relacionadas com estas condições podem ser encontradas em Biot [Biot, M.A., 1956b].

De acordo com Zienkiewicz e Shiomi [Zienkiewicz, O.C.; Shiomi, T., 1984], as equações que governam o comportamento de um meio poroso saturado (sistema sólido-água) sob carregamento dinâmico compreendem: (a) as equações de movimento do sistema sólido-fluido; (b) as equações de continuidade do fluido; (c) as equações de movimento do fluido; (d) o princípio das tensões efetivas; (e) as equações constitutivas do esqueleto sólido. Este conjunto de equações diferenciais é conhecido como equações de *Biot-Zienkiewicz*.

#### (a) Equações de movimento do sistema sólido-fluido

A equação de movimento do sistema sólido-água é dada por

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i - \rho_w (\dot{w}_i + \dot{w}_j \dot{w}_{i,j}) + \rho b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.20})$$

onde  $b_i$  é a força de corpo por unidade de massa,  $\rho$  a massa específica do sistema sólido-água conforme equação 4.6

$$\rho = (1 - n)\rho_s + n\rho_w \quad (\text{Eq. 4.6})$$

e  $\dot{w}_i$  e  $\ddot{w}_i$  representam a velocidade e a aceleração do fluido (água) relativo ao sólido,

$$\dot{w}_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad (\text{Eq. 4.21})$$

$$\ddot{w}_i = \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial t} \quad (\text{Eq. 4.22})$$

### (b) Equações de continuidade do fluido

Considerando um volume de controle, a variação da velocidade do fluido (água),  $(-\dot{w}_{i,i})$ , entre as faces deste volume é devida à superposição da variação no tempo dos seguintes 4 fatores [Xie, Y.M., 1990]: (1) deformação volumétrica do volume de controle,  $(\dot{\varepsilon}_{ii})$ ; (2) deformação das partículas sólidas devido a poropressões,  $\left(\frac{(1-n)\dot{p}_w}{K_s}\right)$ ; (3) deformação das partículas sólidas devido a tensões efetivas,  $\left(-\frac{K_T}{K_s}\left(\dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{K_s}\right)\right)$ ; (4) compressibilidade da água,  $\left(\frac{n\dot{p}_w}{K_w}\right)$ . Adicionando ainda as contribuições devido a variações no tempo da massa específica da água,  $\left(n\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w}\right)$ , e os efeitos de segunda ordem,  $\dot{s}_0$ , resulta então

$$\dot{w}_{i,i} + \dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{n\dot{p}_w}{K_w} + \frac{(1-n)\dot{p}_w}{K_s} - \frac{K_T}{K_s}\left(\dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{K_s}\right) + n\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + \dot{s}_0 = 0 \quad (\text{Eq. 4.23})$$

onde  $K_w$  representa o módulo de deformação volumétrica da água.

Considerando

$$\frac{1}{\tilde{Q}} \equiv \frac{n}{K_w} + \frac{\tilde{\alpha} - n}{K_s} = \tilde{C} \quad (\text{Eq. 4.24})$$

onde  $\tilde{Q}$  representa o módulo de deformação volumétrica equivalente do sistema sólido-água,  $\tilde{C}$  a compressibilidade equivalente do sistema sólido-água e  $\tilde{\alpha}$  definido na equação 4.17.

Assim, a equação 4.23 pode ser expressa por,

$$\dot{w}_{i,i} + \tilde{\alpha}\dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{\tilde{Q}} + n\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + \dot{s}_0 = 0 \quad (\text{Eq. 4.25})$$

### (c) Equações de movimento do fluido

A equação de movimento do fluido é dada por

$$-p_{w,i} - R_i^w - \rho_w \ddot{u}_i - \frac{\rho_w}{n} (\ddot{w}_i + \dot{w}_j \dot{w}_{i,j}) + \rho_w b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.26})$$

onde  $R_i^w$  representa a componente do vetor de forças de arraste viscoso.

Da mesma forma que na equação 4.20, os termos acima sublinhados representam a aceleração da água relativa ao sólido e os termos convectivos desta aceleração.

### (d) Princípio das tensões efetivas

Dada por

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p_w \quad (\text{Eq. 4.19})$$

### (e) Equações constitutivas tensão-deformação do sistema sólido-fluido

As equações constitutivas para solos, definidas pela relação funcional entre o tensor de tensões efetivas e o tensor de deformações, é de caráter não-linear, razão pela qual devem ser expressas na forma incremental,

$$\delta \sigma'_{ij} = D_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} \quad (\text{Eq. 4.27})$$

onde  $D_{ijkl}$  representa o tensor constitutivo tensão-deformação do solo.

## 4.3.1 Forma incremental das equações completas de Biot-Zienkiewicz

### (a) Equações de movimento do sistema sólido-fluido

$$\delta \sigma_{ij,j} - \rho \delta \ddot{u}_i - \rho_w \delta \ddot{w}_i + \rho \delta b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.28})$$

### (b) Equações de continuidade do fluido

$$\delta \dot{w}_{i,i} + \alpha \delta \dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} + n \frac{\delta \dot{\rho}_w}{\rho_w} + \delta \dot{s}_0 = 0 \quad (\text{Eq. 4.29})$$

**(c) Equações de movimento do fluido**

$$-\delta p_{w,i} - \delta R_i^w - \rho_w \delta \ddot{u}_i - \frac{\rho_f}{n} (\delta \ddot{w}_i + \delta (\dot{w}_j \dot{w}_{i,j})) + \rho_w \delta b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.30})$$

**(d) Princípio das tensões efetivas**

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p_w \quad (\text{Eq. 4.19})$$

**(e) Equações constitutivas tensão-deformação do sistema sólido-fluido**

$$\delta \sigma'_{ij} = D_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} \quad (\text{Eq. 4.27})$$

As variáveis incógnitas do sistema de equações são: (1) a pressão do fluido (água),  $p_w$ ; (2) a velocidade do fluido relativo ao sólido,  $\dot{w}_i$ ; (3) o deslocamento do sólido,  $u_i$ .

As condições de contorno impostas sobre as equações completas de Biot-Zienkiewicz (forma **u-p-w**),  $\Gamma$ , compreendem da união da condição de contorno para o sólido,  $\Gamma^s$ , e para o fluido,  $\Gamma^w$ ,

$$\Gamma = \Gamma^s \cup \Gamma^w \quad (\text{Eq. 4.31})$$

**(1) Para o sólido.**

As condições de contorno do sólido,  $\Gamma^s$ , são compreendidas como a união de dois tipos de contornos: (1) condição de contorno do sólido em termos das forças,  $\Gamma_t^s$ , e (2) condição de contorno do sólido em termos do deslocamento,  $\Gamma_u^s$ ,

$$\Gamma^s = \Gamma_t^s + \Gamma_u^s \quad (\text{Eq. 4.32})$$

Sobre o contorno  $\Gamma_t^s$  especificam-se valores de forças externas atuantes  $t_i^*$  e sobre o contorno  $\Gamma_u^s$  valores de deslocamento prescrito,  $u_i^*$ ,

$$t_i^* \text{ em } \Gamma_t^s = \Gamma_t^s \quad (\text{Eq. 4.33})$$

$$u_i^* \text{ em } \Gamma_u^s = \Gamma_u^s \quad (\text{Eq. 4.34})$$

## (2) Para o fluido.

As condições de contorno do fluido (água),  $\Gamma^w$ , decorrem da união de dois diferentes tipos de contorno: (1) condição de contorno do fluido em termos da poropressão,  $\Gamma_p^w$ , e (2) condição de contorno do fluido em termos da velocidade do fluido relativo ao sólido,  $\Gamma_{\dot{w}}^w$ ,

$$\Gamma^w = \Gamma_p^w + \Gamma_{\dot{w}}^w \quad (\text{Eq. 4.35})$$

Sobre o contorno  $\Gamma_p^w$  especificam-se valores da poropressão atuante  $p_{wi}^*$  e sobre o contorno  $\Gamma_{\dot{w}}^w$  velocidades do fluido relativo ao sólido atuante,  $\dot{w}_i^*$ ,

$$p_{wi}^* \text{ em } \Gamma^w = \Gamma_p^w \quad (\text{Eq. 4.36})$$

$$\dot{w}_i^* \text{ em } \Gamma^w = \Gamma_{\dot{w}}^w \quad (\text{Eq. 4.37})$$

### 4.3.2 Forma incremental das equações simplificadas de Biot-Zienkiewicz

Vários pesquisadores ([Ghaboussi, J.; Wilson, E., 1972], [Chan, A.H.C., et al., 1991]) mostraram que o sistema completo das equações (forma **u-p-w**) é adequado para uma resolução numérica através do *método explícito*. Entretanto, no caso da utilização de *métodos implícitos*, onde o sistema de equações deve ser resolvida a cada passo de iteração no tempo, é conveniente, para fins de eficiência computacional, reduzir o número de variáveis através da adoção da formulação simplificada na forma **u-p**.

De acordo com Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1980], no caso de fluxo laminar é possível assumirem-se as seguintes hipóteses simplificadoras: (a) variação da aceleração do fluido (água) em relação ao fluido pode ser desconsiderada,  $\delta\ddot{w}_i = 0$ ; (b) variação nula do termo convectivo da equação 4.30,  $\delta(\dot{w}_j \dot{w}_{i,j}) = 0$ ; (c) fluido incompressível com variação da massa específica nula,  $\delta\dot{\rho}_f = 0$ ; (d) desconsideração da variação temporal dos efeitos de segunda ordem,  $\delta\ddot{s}_0 = 0$ .

Se essas simplificações forem introduzidas nas equações completas de *Biot-Zienkiewicz*, é possível então eliminarem-se da formulação os graus de liberdade correspondentes à variável  $\dot{w}_i$ , obtendo-se um sistema de equações simplificadas conhecido na literatura como de forma **u-p**.

**(a) Equações simplificadas de movimento do sólido**

Introduzindo a condição  $\delta w_i = 0$  nas equações 4.28 resulta,

$$\delta\sigma_{ij,j} - \rho\delta\ddot{u}_i + \rho\delta b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.38})$$

**(b) Equações simplificadas de movimento-continuidade do fluido**

Considerando  $\delta(\dot{w}_j \dot{w}_{i,j}) = 0$  e  $\delta\ddot{w}_i = 0$  as equações 4.30 se transformam em,

$$-\delta p_{w,i} - \delta R_i^w - \rho_w \delta\ddot{u}_i + \rho_w \delta b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.39})$$

A força de arrasto viscosa  $R_i^w$ , definida com auxílio da lei de Darcy, pode ser escrita como

$$\dot{w}_i = k_{ij} R_j^w \quad (\text{Eq. 4.40})$$

possibilitando evidenciar  $R_i^w$

$$R_i^w = k_{ij}^{-1} \dot{w}_j \quad (\text{Eq. 4.41})$$

ou na forma incremental,

$$\delta R_i^w = k_{ij}^{-1} \delta \dot{w}_j \quad (\text{Eq. 4.42})$$

Introduzindo a equação 4.42 na equação 4.39, obtém-se as seguintes equações simplificadas de movimento do fluido

$$-\delta p_{w,i} - k_{ij}^{-1} \delta \dot{w}_j - \rho_w \delta\ddot{u}_i + \rho_w \delta b_i = 0 \quad (\text{Eq. 4.43})$$

Substituindo-se

$$\delta \dot{w}_j = k_{ij} \left( -\delta p_{w,i} - \rho_w \delta\ddot{u}_i + \rho_w \delta b_i \right) \quad (\text{Eq. 4.44})$$

e

$$\delta \varepsilon_{ii} = \delta u_{i,i} \quad (\text{Eq. 4.45})$$

nas equações de continuidade do fluido (equação 4.29), tem-se as equações simplificadas de movimento-continuidade do fluido:

$$\left(k_{ij}(-\delta p_{w,j} - \rho_w \delta \ddot{u}_j + \rho_w \delta b_j)\right)_{,j} + \delta \dot{u}_{i,i} + \frac{\delta \dot{p}_w}{\tilde{Q}} = 0 \quad (\text{Eq. 4.46})$$

O sistema de equações formadas pelas equações 4.19, 4.27, 4.38, 4.46, e as condições de contorno (equações 4.32, 4.34 e 4.36) pode ser diretamente aplicado na simulação do comportamento acoplado de sistemas sólido-fluido [Zienkiewicz, O.C.; Shiomi, T., 1984]. A validade das hipóteses simplificadoras da formulação **u-p** para análise de problemas com carregamentos sísmicos é considerada adequada por Leung [Leung, K.H., 1984].