

3

Modelo constitutivo para liquefação de solos

3.1

Aspectos gerais

Durante as últimas décadas, grandes esforços foram dedicados tanto para entender o comportamento de solos sob trajetórias complexas de carregamento, através de ensaios de laboratório; como para formular equações constitutivas capazes de reproduzir a maioria das características observáveis no laboratório e no campo. Com relação a este último aspecto, uma grande variedade de equações constitutivas, chamados também de *modelos constitutivos*, têm sido propostas para representar as características do comportamento tensão-deformação de solos.

Estes modelos apresentam vantagens e limitações, variando de acordo com o tipo de aplicação. Em termos gerais, o modelo constitutivo empregado na análise do comportamento de materiais deve: (1) atender aos conceitos teóricos da mecânica do contínuo; (2) representar tão fielmente quanto possível o comportamento observado em ensaios de laboratório ou campo; (3) requerer parâmetros do material que possam ser estimadas através de ensaios convencionais da mecânica dos solos; (4) serem simples na implementação e eficientes na execução computacional.

Dentre estes modelos, citam-se os modelos clássicos de Mohr-Coulomb, principalmente, e de Drucker e Prager [Drucker, D.; Prager, W., 1952], o primeiro deles frequentemente utilizado em aplicações de geotecnia por fornecer boas estimativas do comportamento tensão-resistência de solos com base em apenas dois parâmetros (coesão, ângulo de resistência ao cisalhamento) facilmente obtidos em laboratório.

Algumas limitações destes modelos (ausência de endurecimento plástico, previsão de deformações apenas elásticas sob estado de tensão hidrostático, dentre outros) foram levantadas por Roscoe e seu grupo de pesquisadores, da universidade de Cambridge, com o desenvolvimento da teoria do estado crítico e formulação do modelo Cam-Clay [Roscoe, K.H., et al., 1958] e Cam-Clay

Modificado [Roscoe, K.H.; Burland, J.B., 1968]. Infelizmente, estes modelos constitutivos não permitem simular os incrementos de poropressão e deformações permanentes geradas por carregamentos cíclicos. Estudos posteriores [Carter, J.P., et al., 1982] recomendaram que a forma mais adequada de representar comportamento dinâmico seria assumir que tanto a forma quanto a posição da superfície de escoamento sejam modificadas constantemente durante a etapa do descarregamento (combinação de endurecimento isotrópico e cinemático), que no modelo Cam-Clay Modificado é assumido ocorrer sob deformações apenas elásticas.

Cabe enfatizar neste ponto que o modelo constitutivo Cam-Clay Modificado marcou o início de uma fase de solução numérica de problemas geotécnicos considerando modelos constitutivos elasto-plásticos, representado pelo trabalho de Zienkiewicz e Naylor [Zienkiewicz, O.C.; Naylor, D.J., 1971], cujos bons resultados incentivou vários outros pesquisadores na utilização da teoria da plasticidade infinitesimal em solos, considerando carregamentos monotônicos ou cíclicos. Até esta data, mais de três décadas após, importantes avanços na modelagem de solos foram obtidos, através de modelos constitutivos cada vez mais abrangentes, capazes de modelar efeitos de carregamento cíclico, alguns mantendo características da teoria da plasticidade clássica e outros desenvolvidos sob o enfoque de teorias multi-mecânicas tais como os baseados na teoria endocrônica.

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação do modelo numérico constitutivo que será empregado para reproduzir o comportamento de solos sob solicitações dinâmicas. Inicia-se com uma descrição da evolução histórica dos modelos constitutivos, seguida da apresentação da teoria da plasticidade generalizada, em cujo ambiente podem-se desenvolver equações constitutivas com capacidade de reproduzir aspectos como: fluxo por liquefação e/ou mobilidade cíclica. Finalmente, descrevem-se as equações do modelo P-Z, baseado na teoria da plasticidade generalizada, e utilizado nesta tese para simular numericamente a liquefação de solos.

3.2

Desenvolvimento histórico dos modelos constitutivos para carregamento cíclico

O desenvolvimento da modelagem constitutiva em problemas da dinâmica dos solos deveu-se à necessidade de: (1) prever respostas de ensaios de laboratório em amostras submetidas a carregamentos cíclicos; (2) desenvolver modelagem numérica adequada para simular efeitos de carregamentos dinâmicos em solos. A primeira devido ao comportamento diferenciado das respostas cíclicas em relação aos ensaios estáticos e a segunda para aplicação de metodologias mais racionais do que as análises pseudo-estáticas simplificadas.

As primeiras tentativas de desenvolver uma análise não-linear no contexto da dinâmica dos solos, usando modelos matemáticos discretos, foram reportadas por Parmelee [Parmelee, R.A., et al., 1964] e Penzien [Penzien, J., et al., 1964] através da aplicação de modelos baseados no sistema massa-mola-amortecedor. Estes investigadores desenvolveram um modelo unidimensional para estudar a resposta de maciços de solo formados por camadas horizontais semi-infinitas com comportamento tensão-deformação bi-linear e amortecimento histerético, Cada camada de solo foi dividida em um número finito de subcamadas, representadas por um sistema massa-mola obedecendo ao modelo reológico de Kelvin, conectados em série com um amortecedor. A técnica numérica via método das diferenças finitas [Newmark, N.M., 1959] foi aplicada na solução numérica das equações de movimento assim estabelecidas.

Provavelmente o fator que acelerou mais significativamente o desenvolvimento da modelagem numérica nesta área foi a aplicação do MEF em análises dinâmicas de barragens de terra, com o trabalho de Clough e Chopra [Clough, R.W.; Chopra, A.K., 1966], considerando um modelo constitutivo elástico-linear, as pesquisas de Chopra [Chopra, A.K., 1967], Dibaj e Penzien [Dibaj, M.; Penzien, J., 1967a], Finn e Khanna [Finn, W.D.; Khanna, J., 1967], Idriss [Idriss, I.M., 1968], considerando um modelo visco-linear, e o trabalho de Dibaj e Penzien [Dibaj, M.; Penzien, J., 1969], com o modelo elasto-plástico de Drucker e Prager, onde pela primeira vez se empregou, no contexto da dinâmica dos solos, um procedimento incremental não-linear, etc.

Pesquisas paralelas à aplicação de modelos baseados na teoria elasto-plástica em problemas dinâmicos foram feitas por Idriss e Seed, H.B. ([Idriss,

I.M.; Seed, H.B., 1967], [Idriss, I.M.; Seed, H.B., 1968]). Estes pesquisadores propuseram também um modelo discreto 1D, constituído por um sistema massa-mola-amortecedor, para determinar a resposta dinâmica de depósitos de solos durante a ocorrência de terremotos, substituindo a curva tensão-deformação linear adotada por Parmelee [Parmelee, R.A., et al., 1964] e Penzien [Penzien, J., et al., 1964] por parâmetros lineares função do estado de deformação. Esta metodologia é hoje conhecida como o método linear-equivalente [Seed, H.B.; Idriss, I.M., 1970].

O método linear-equivalente foi incorporado nos programas SHAKE [Schnabel, P.B., et al., 1972] e SHAKE91 [Idriss, I.M.; Sun, J.I., 1992] para análises 1D da resposta de solos constituídos por camadas horizontais de diferentes materiais, considerando a analogia masa-mola-amortecedor, e estendido para análises bidimensionais e tridimensionais, mediante a utilização do MEF, através dos programas computacionais QUAD4 [Idriss, I.M., et al., 1973] e FLUSH [Lysmer, J., et al., 1975].

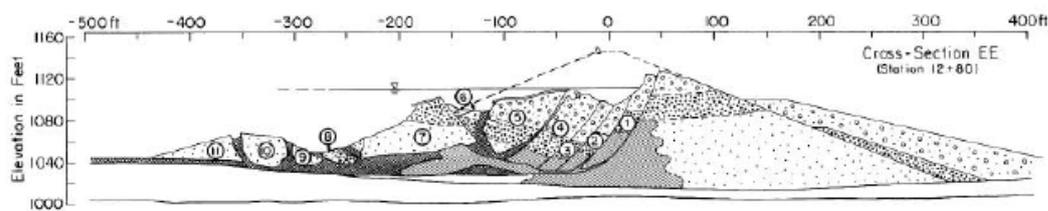
O programa SHAKE foi rapidamente adotado pela comunidade de engenharia para a realização de estudos considerando a resposta sísmica de solos excitados por ondas cisalhantes propagando-se verticalmente, devido à confiabilidade de seus resultados numéricos e praticidade na determinação dos parâmetros de entrada (módulo de cisalhamento, G , e razão de amortecimento, ξ). O valor destes parâmetros depende do nível das deformações ocorridas durante o carregamento sísmico, devendo ser obtidas de curvas tensão-deformação. Os efeitos de não-linearidade, no método linear-equivalente, são introduzidos mediante a variação de G e ξ com as deformações axiais totais, ε_a , através de curvas obtidas experimentalmente e/ou, na ausência ou impossibilidade da execução destes, por meio de correlações propostas na literatura para diversos tipos de solo.

Os limites de validade do método linear-equivalente foram verificados por Seed e colaboradores ([Seed, H.B., et al., 1973], [Seed, H.B., et al., 1975a], [Seed, H.B., et al., 1975b]) através de um extensivo e minucioso estudo da ocorrência de liquefação no corpo da barragem de terra San Fernando, durante o terremoto de San Fernando, na Califórnia, em 1971, conforme figura 3.1. Os resultados numéricos obtidos com o emprego do programa SHAKE indicaram que o corpo

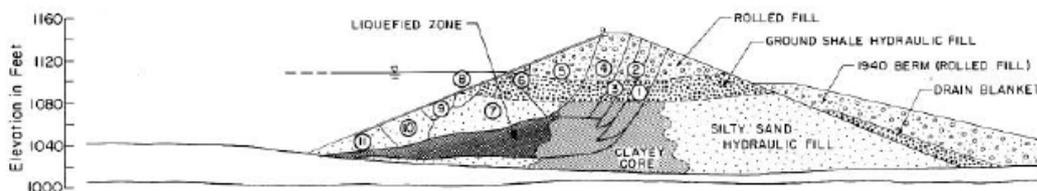
da barragem poderia colapsar durante o terremoto devido à ocorrência de grandes deformações nos taludes, mas observações *in-situ* demonstraram que a barragem não sofreu deformações significativas durante o sismo, ocorrendo o colapso do talude de montante após o término da excitação. Este tipo de ruptura, denominada *pós-sismo* por Seed, H.B. [Seed, H.B., 1979], deveu-se à redistribuição da poropressão no interior da barragem com fluxo por liquefação em algumas regiões, como mostrado na figura 3.2.



Figura 3.1 - Deslizamento ocorrido na barragem de San Fernando, em 1971 (EERC, University of California, Berkeley, USA).



(a) seção transversal da barragem após a ruptura



(b) reconstrução das condições iniciais

Figura 3.2 - Ruptura da barragem San Fernando. (a) Seção transversal da barragem após a ruptura e (b) reconstrução das condições iniciais, [Seed, H.B., 1979].

As diferenças entre os resultados de análises executadas com o modelo linear-equivalente e modelos não-lineares dependem fortemente do grau de não-linearidade da resposta do solo. Para problemas onde o nível de deformações permanece baixo (solos rígidos e/ou movimentos sísmicos de baixa magnitude), os ambos os métodos de análise devem produzir estimativas razoáveis da resposta dinâmica. Para situações onde os valores das tensões cisalhantes induzidas pelo terremoto aproximam-se da resistência ao cisalhamento do solo, as análises não-lineares devem fornecer resultados mais confiáveis que o modelo linear-equivalente, entretanto. De acordo com Bray [Bray, J.D., et al., 1995] o programa SHAKE91, em virtude da incorporação do modelo linear-equivalente, somente deve ser empregado para movimentos com $PHA_{rocha} \leq 0,5\bar{g}$, onde \bar{g} é a aceleração da gravidade e PHA_{rocha} é a aceleração máxima horizontal na rocha. Outros investigadores não recomendam o emprego do modelo linear-equivalente para situações onde $PHA_{solo} > 0,4\bar{g}$ [Ishihara, K., 1985], sendo PHA_{solo} a aceleração máxima horizontal no solo, ou a deformação cisalhante máxima exceder aproximadamente a 2% [Kavazanjian, E., et al., 1997]. Segundo Gazetas [Gazetas, G.; Dakoulas P., 1992] em barragens modernas as análises dinâmicas com o método linear-equivalente devem ser suficientes para movimentos com $PHA_{solo} \leq 0,2\bar{g}$.

O método linear-equivalente também não consegue obter deslocamentos permanentes, já que todas as deformações elásticas tornam-se nulas uma vez cessado o carregamento sísmico. Técnicas alternativas devem ser utilizadas para este fim, como o método proposto por Newmark [Newmark, N.M., 1965], baseado no comportamento de um bloco rígido deslizante, e o método simplificado de Makdisi e Seed [Makdisi, F.I.; Seed, H.B., 1978] para uso prático na avaliação de deslocamentos permanentes em taludes de barragens de terra. Cabe ainda ressaltar que o método linear-equivalente foi formulado em termos de tensões totais e, portanto, não considera ao efeito da poropressão na resistência do solo, o que influencia significativamente a previsão da resposta dinâmica. Sua aplicação em solos saturados tende a fornecer uma previsão conservadora da resposta dos materiais sob carregamento dinâmico.

A ruptura da barragem de San Fernando significou, na época, um verdadeiro estímulo para o desenvolvimento de métodos formulados em termos de tensões efetivas. Martin e colaboradores [Martin, G.R., et al., 1975] propuseram um

modelo empírico, baseado no critério de Masing [Masing, G., 1926], que incorpora uma equação para previsão de incrementos de poropressão gerados durante um movimento sísmico. Neste modelo, a resposta do solo submetido a tensões cisalhantes dinâmicas é modelada através de uma relação empírica não-linear de forma hiperbólica, histerética, dependente da tensão normal efetiva média. O termo empírico é usado para indicar que as formulações numéricas foram estabelecidas tomando como referência a forma da trajetória tensão-deformação observada em ensaios de laboratório sob carregamento monotônico ou dinâmico. O modelo proposto por Martin [Martin, G.R., et al., 1975] foi incorporado no programa computacional para análises 1D DESRA-2 [Lee, M.K.W.; Finn, W.D.L., 1978] e análises 2D nos programas TARA-2 [Siddharthan, R.; Finn, W.D.L. 1982] e TARA-3 [Finn, W.D.L., et al., 1986].

De acordo com Liyanapathirana e Poulos [Liyanapathirana, D.S.; Poulos, H.G., 2002] os modelos baseados em tensões efetivas para simular o fenômeno da liquefação podem ser agrupados em quatro principais categorias: modelos elasto-plásticos ([Prevost, J. H. 1985], [Pastor, M., et al., 1990]; [Wang, Z.L., et al., 1990]; [Ishihara, K., 1993]; [Muraleetharan, K.K., et al., 1994]; [Byrne, P.M., et al., 1995], [Fukutake, K.; Ohtsuki, A., 1995], [Parra-Colmenares, E.J., 1996]); métodos baseados em trajetórias de tensões ([Ishihara, K.; Towhata, I., 1982], [Kiku, H.; Tsujino, S., 1996]); em correlações entre resposta de poropressões e a tendência da variação de volume de solos secos [Finn W.D.L., et al., 1977] e, finalmente, no uso direto da resposta em termos das poropressões determinadas de forma experimental em ensaios de laboratório ([Seed H.B., et al., 1976]; [Sheriff, M.A., et al., 1978]; [Kagawa, T.; Kraft, L.M., 1981]).

Na formulação de modelos constitutivos elasto-plásticos, segundo Pastor [Pastor, M., et al., 2000], duas linhas de investigação foram seguidas com o objetivo de estudar respostas de solos considerando a teoria do estado crítico. A primeira abordagem se concentrou numa extensão da teoria da plasticidade clássica, com ênfase no comportamento de areias considerando endurecimento isotrópico, enquanto que a segunda abordagem procurou reproduzir deformações plásticas considerando endurecimento anisotrópico bem como efeitos de densificação (teoria endocrônica), causados por carregamentos cíclicos.

A primeira abordagem adaptou formulações do modelo Cam-clay Modificado, considerando leis de fluxo não-associadas [Nova, R., 1977], formas

de endurecimento relacionadas com deformações de desvio ([Nova, R.; Wood, D.M., 1979], [Boukpeti, N.; Drescher, A., 2000], [Collins, I.F.; Kelly, P.A., 2002]), conceitos de endurecimento duplo associado com a ocorrência de deformação volumétrica e de desvio [Prevost, J.H.; Hoeg, K., 1975], consideração de dilatação de areias ([Nova, R.; Wood, D.M., 1979], [Nova, R., 1982]), liquefação sob carregamento monotônico (modelo Norsand desenvolvido por Jefferies [Jefferies, M.G., 1993]), etc. Nova e Hueckel [Nova, R.; Hueckel, T., 1981] adicionaram à formulação do modelo Cam-clay Modificado uma lei de fluxo do tipo histerética para simular deslocamentos durante o descarregamento e recarregamento, com parâmetros relacionados à memória do material e comportamento dilatante. Ghaboussi e colaboradores ([Ghaboussi, J.; Momen, H., 1979], [Ghaboussi, J.; Momen, H., 1982]) usaram o conceito de endurecimento duplo para desenvolver um modelo elasto-plástico com endurecimento isotrópico para areias sob carregamento cíclico ou monotônico, seguidos por outros desenvolvimentos nesta mesma linha de pesquisa por Hirai [Hirai, H., 1987], Aubry [Aubry, D., et al., 1982], dentre outros.

Mroz e Zienkiewicz ([Mroz, Z.; Zienkiewicz, O.C., 1981], [Zienkiewicz, O.C.; Mroz, Z., 1984]) introduziram o conceito de plasticidade generalizada, onde a superfície de escoamento e o potencial plástico são definidos pelos vetores unitários das trajetórias de tensão durante o processo de carregamento e descarregamento, com vantagens na implementação computacional, pois não é necessário verificar a condição de consistência, como em aplicações da teoria da plasticidade clássica. O modelo original foi aperfeiçoado com o decorrer dos anos para simulação da resposta de areias sob carregamentos monotônicos ou cíclicos, destacando-se as contribuições de Zienkiewicz e Pastor ([Zienkiewicz, O.C., et al., 1985], [Pastor, M., et al., 1985], [Zienkiewicz, O.C.; Pastor, M. 1986], [Pastor, M., et al., 1986], [Pastor, M., et al., 1987] e [Pastor, M., et al., 1990]), Bahda [Bahda, F., 1997], Ling e Liu [Ling, H.; Liu, H., 2003]. Este modelo constitutivo é conhecido como modelo P-Z.

A segunda abordagem procurou reproduzir a ocorrência de deformações inelásticas e efeitos de densificação causados por carregamentos cíclicos que os modelos constitutivos baseados na teoria da plasticidade plástica (primeira abordagem) não conseguem simular. Um enfoque consistiu em introduzir em modelo baseado na teoria endocrônica o efeito da densificação induzida pelo

cisalhamento cíclico através de uma adequada lei de densificação ([Cuéllar, V., et al., 1977], [Zienkiewicz, O.C., et al., 1982]). A teoria endocrônica é particularmente útil em descrever a variação de volume e a geração de poropressões em areias saturadas devido a movimentos sísmicos. Foi desenvolvida por Valanis [Valanis, K.C., 1971] para descrever a não-linearidade da resposta do material, descrita através de um parâmetro que descreve uma seqüência de eventos, permitindo assim a representação de estados sucessivos do material. Embora estes parâmetros não são variáveis de tempo, mas funcionam como um tipo de parâmetro de tempo intrínseco, o que justifica a denominação endocrônica da teoria. A característica peculiar desta teoria é que não é necessário identificar uma superfície de escoamento, tornando este modelo atraente para modelagens que envolvam deformações plásticas ocorridas num ciclo de carregamento e descarregamento. Por outro lado, em muitos casos existem dificuldades para simular o comportamento dilatante de areias [Blázquez, R., et al., 1980]. Recentemente Blázquez e López-Querol ([Blázquez, R.; López-Querol, S., 2006], [López-Querol, S.; Blázquez, R., 2006]) propuseram uma formulação combinando uma lei de densificação com uma lei de fluxo plástico para tratar este problema.

Outro enfoque distinto consistiu em estender a teoria de plasticidade além dos postulados estabelecidos pela teoria da plasticidade clássica. A primeira extensão foi feita independentemente por Iwan [Iwan, W.D., 1967] e Mroz [Mroz, Z., 1967] através do mecanismo de endurecimento cinemático com superfícies múltiplas, obtendo-se um modelo constitutivo que postula a existência de uma série de superfícies aninhadas de escoamento que se movimentam umas no interior das outras. A partir desta concepção, diversos aperfeiçoamentos e adaptações foram realizados ([Mroz, Z., et al., 1978], [Prévost, J.H., 1977], [di Prisco, C., et al., 1993], dentre outros). Neste tipo de modelo, devido à quantidade de superfícies de escoamento consideradas, é possível descrever condições especiais de carregamento, como níveis de tensão máxima atingidos ou estados de tensão onde as tensões correntes são revertidas. Postula-se ainda que um comportamento elástico prevalece no interior da superfície de escoamento atual. Como as tensões são incrementadas a partir de um estado de tensão inicial, as superfícies de escoamento são deslocadas ao longo da trajetória de tensões até atingirem uma nova superfície. Esta trajetória do movimento da superfície é

definida completamente através da uma lei de escoamento, a mesma que assegura que as superfícies nunca sejam cruzadas. Estes modelos na literatura são conhecidos como modelos de superfície aninhadas.

Dafalias e Popov [Dafalias, Y.F.; Popov, E.P., 1975] introduziram o conceito de superfície limite (*bounding surface*) para descrever o endurecimento não-linear em materiais submetidos a carregamentos complexos. De forma similar, mas em investigação independente, um modelo com duas superfícies de escoamento também foi proposto por Krieg [Krieg, R.D., 1975], definido em termos de uma superfície de escoamento limite utilizada para definição da ruptura e outra, para escoamento inicial. O campo de deformações é calculado pela superfície de escoamento corrente, determinada entre as duas superfícies pré-estabelecidas com base no estado de tensão atual. Em outras palavras, o parâmetro de endurecimento é obtido por interpolação linear, considerando-se seus respectivos valores nas superfícies de escoamento inicial e limite.

Este modelo combina endurecimentos de tipo isotrópico e cinemático, apresentando vantagem em comparação com a formulação do modelo de superfícies aninhadas. Outro modelo de características similares foi proposto por Hashigushi e Ueno [Hashigushi, K.; Ueno, M., 1977], e foi definido como modelo de *superfície de subcarga*. Da mesma forma que o modelo anterior, este emprega duas superfícies similares, i.e. uma superfície interior de subcarga e uma outra superfície de escoamento limite (ruptura). A diferença com o modelo anterior é que o parâmetro de endurecimento é calculado usando uma condição de consistência sobre a superfície de subcarga.

Outro modelo interessante é o modelo de bolha proposto por Al-Tabbaa [Al-Tabbaa, A.; Wood, D.M., 1989], com endurecimento cinemático. Concebido como uma extensão do modelo Cam-Clay mediante a introdução de superfície (bolha) que se movimenta no interior da superfície de contorno limite. A superfície-bolha funciona como uma superfície de escoamento convencional, i.e. deformações são puramente elásticas para todos os estados de tensão situados em seu interior. As deformações tornam-se elasto-plásticas quando o estado de tensão atual encontrar se sobre a superfície-bolha e o acréscimo de tensão provocar o movimento da mesma.

Um enfoque distinto consistiu na aplicação da teoria da hipoplasticidade ([Gudehus, G., 1996], [Herle, I.; Gudehus, G., 1999], [Niemunis, A., 2003]).

Diferentemente dos modelos elasto-plásticos, a relação entre o incremento de tensões efetivas e o incremento de deformações é determinada por uma única equação tensorial, não se calculando separadamente as componentes de deformação elástica e plástica e também não se fazendo uso de superfícies de escoamento e de potencial plástico.

Enquanto esforços em modelos computacionais eram empreendidos, diversos equipamentos de laboratório foram também desenvolvidos, como o ensaio triaxial cíclico [Seed, H.B.; Lee, K.L., 1966] que possibilitou investigações experimentais do potencial de liquefação e das deformações induzidas em solos por carregamentos cíclicos, e o ensaio da coluna ressonante, para a estimativa dos módulos de cisalhamento máximo e dos amortecimentos sob pequenas deformações [Drnevich, V.P., 1967]. O desenvolvimento destes equipamentos contribuiu para o melhor entendimento do fluxo por liquefação [Castro, G., 1969] e da mobilidade cíclica ([Castro, G., 1975], [Ishihara, K., et al., 1975]).

Neste ponto é importante enfatizar a notável contribuição dos trabalhos feitos por Seed, H.B. e colaboradores da Universidade de Califórnia, em Berkeley, nos EUA, com a consolidação da área de pesquisa em dinâmica dos solos, que permitiu conceituar, interpretar e modelar respostas de materiais submetidos a carregamentos dinâmicos, especificamente aqueles relacionados com o fenômeno da liquefação.

3.3 Teoria da plasticidade generalizada

A teoria da plasticidade generalizada, proposta por Mroz e Zienkiewicz [Mroz, Z.; Zienkiewicz, O.C., 1981], representa uma extensão da teoria da plasticidade clássica para possibilitar a determinação de deformações permanentes (plásticas) em um ciclo de carregamento.

No desenvolvimento desta teoria para solos, Pastor e colaboradores ([Pastor, M.; Zienkiewicz, O.C., 1986], [Pastor, M., et al., 1987], [Pastor, M., et al., 1990]) utilizaram o conceito de estado crítico do modelo Cam-Clay Modificado e estabeleceram formulação específica para cálculo do módulo plástico H , assumindo uma lei de fluxo não-associada. Essas características puderam representar, de forma satisfatória, os fenômenos de fluxo por liquefação

e/ou mobilidade cíclica em areias saturadas na condição de carregamento não-drenado. Esta teoria não exige a definição prévia das superfícies de escoamento e de potencial plástico, sendo determinadas totalmente pelos vetores unitários das trajetórias de tensão durante os processos de carregamento, descarregamento e recarregamento.

3.3.1 Principais características da teoria da plasticidade clássica

A teoria da plasticidade clássica infinitesimal proposta por Drucker e Prager [Drucker, D.; Prager, W., 1952] assume que existe uma superfície no espaço de tensões, chamada de superfície de escoamento, f , matematicamente definida por

$$f\langle\sigma_{ij}, \kappa_i\rangle = 0 \quad (\text{Eq. 3.1})$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões totais e κ_i parâmetros de endurecimento do material que determina a forma, tamanho e posição da superfície de escoamento. O símbolo $\langle \rangle$ denota *função de*. Ao considerar as tensões efetivas, como parte desta análise, a função de escoamento toma a seguinte forma [Lewis, R.W.; Schrefler, B.A., 1998]

$$f\langle\sigma'_{ij}, \kappa'_i\rangle = 0 \quad (\text{Eq. 3.2})$$

onde σ'_{ij} é o tensor de tensões efetivas e κ'_i parâmetros de endurecimento do material na condição efetiva.

Não se admitem estados de tensões situados além da superfície de escoamento. Esta deve se expandir ou se movimentar de tal forma que o estado de tensão atual esteja situado sobre a nova posição da superfície de escoamento (condição de consistência).

A teoria da plasticidade clássica também assume uma relação linear entre incrementos de tensão e incrementos de deformação plástica, sendo estes calculados de forma geral pela lei de fluxo generalizada proposta por Drucker [Drucker, D., 1952]. Em termos das tensões efetivas, a lei de fluxo é definida como [Lewis, R.W.; Schrefler, B.A., 1998]

$$\delta \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (\text{Eq. 3.3})$$

ou, na forma vetorial no espaço 3D,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (\text{Eq. 3.4})$$

com

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \left\{ \delta \varepsilon_{xx}^p \quad \delta \varepsilon_{yy}^p \quad \delta \varepsilon_{zz}^p \quad \delta \gamma_{xy}^p \quad \delta \gamma_{yz}^p \quad \delta \gamma_{zx}^p \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.5})$$

$$\delta \boldsymbol{\sigma}' = \left\{ \delta \sigma'_{xx} \quad \delta \sigma'_{yy} \quad \delta \sigma'_{zz} \quad \delta \tau_{xy} \quad \delta \tau_{yz} \quad \delta \tau_{zx} \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.6})$$

onde $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ é o vetor de incremento de deformações plásticas, $\delta \boldsymbol{\sigma}'$ o vetor de incremento de tensões efetivas, λ um escalar positivo e g representa a função da superfície do potencial plástico.

A função da superfície do potencial plástico, g , depende do tensor de tensões atuantes no material e seu gradiente, em qualquer ponto, determina a direção dos acréscimos de deformação plástica. Caso as superfícies de escoamento e do potencial plástico coincidam, a lei de fluxo é dita associada; caso contrário, não-associada.

O escalar positivo, λ , é definido por,

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^T \mathbf{D}^e}{H + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^T \mathbf{D}^e \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{Eq. 3.7})$$

sendo \mathbf{D}^e a matriz constitutiva tensão-deformação elástica e H módulo plástico.

A matriz constitutiva tensão-deformação elástica é definida por

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} K' + \frac{4}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K' + \frac{4}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K' + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2G & 0 & 0 \\ & \text{simétrico} & & & 2G & 0 \\ & & & & & 2G \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.8})$$

onde G indica o módulo de cisalhamento e K' o módulo de deformação volumétrica efetiva.

O módulo plástico é definido por

$$H = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right)^T \frac{\partial \kappa'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{Eq. 3.9})$$

entanto que a função que descreve a lei de endurecimento, a mesma que representa a evolução do tamanho da superfície de escoamento com as deformações plásticas, é expressa como

$$\Psi \langle \kappa_i, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle = \frac{\partial \kappa'}{\kappa'_i} \quad (\text{Eq. 3.10})$$

onde κ' representa um vetor contendo os parâmetros de endurecimento na condição efetiva. Alternativamente, esta função é expressa, em vários modelos constitutivos elasto-plásticos, como dependente do trabalho plástico.

De acordo com a condição de consistência, a matriz constitutiva tensão-deformação elasto-plástica, \mathbf{D}^{ep} , é dada por

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^T \mathbf{D}^e}{H + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^T \mathbf{D}^e \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)} \quad (\text{Eq. 3.11})$$

O módulo plástico incorpora o processo do endurecimento ou amolecimento durante o fluxo plástico. Para $H = 0$ o material se comporta como perfeitamente plástico, para $H > 0$ apresenta endurecimento e para $H < 0$ simular a ocorrência de amolecimento do material.

3.3.2 Características da teoria da plasticidade generalizada

A teoria da plasticidade generalizada consiste em uma extensão da teoria da plasticidade clássica que prescindir de uma superfície de escoamento, da superfície potencial plástico e da lei de endurecimento para calcular as deformações plásticas.

Esta teoria é baseada em uma relação constitutiva que não depende da superfície de escoamento,

$$\delta \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \delta \sigma'_{kl} \quad (\text{Eq. 3.12})$$

onde $\delta \varepsilon_{ij}$ é o tensor de incremento deformações totais, $\delta \sigma'_{kl}$ o tensor de incremento de tensões efetivas e C_{ijkl} o tensor constitutivo deformação-tensão de quarta ordem, dependente do estado de tensões, do parâmetro de estado κ'_i (similar ao parâmetro de endurecimento da teoria da plasticidade clássica) e das componentes do vetor unitário da direção do incremento de tensões, n_i .

$$C_{ijkl} \equiv C_{ijkl} \langle \sigma'_{kl}, \kappa'_i, n_i \rangle \quad (\text{Eq. 3.13})$$

Os parâmetros de estado (condição efetiva) κ'_i levam em conta a influência da história de tensões no comportamento do material, enquanto que a direção do incremento de tensões é definida pelo vetor unitário da direção do incremento de tensões \mathbf{n} ,

$$\mathbf{n} = \frac{\delta \boldsymbol{\sigma}'}{\|\delta \boldsymbol{\sigma}'\|} \quad (\text{Eq. 3.14})$$

onde o símbolo $\|\ \|\$ denota norma do vetor.

O ponto fundamental na aplicação desta teoria a solos é, de acordo com Pastor [Pastor, M., et al., 1999], admitir a hipótese de que a resposta do material é independente da velocidade da variação das tensões atuantes, o que permite expressar se a relação entre incrementos de deformação e incrementos de tensão mediante uma função genérica,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \varphi \langle \delta \boldsymbol{\sigma}' \rangle \quad (\text{Eq. 3.15})$$

onde $\varphi\langle\delta\sigma'\rangle$ é uma função homogênea do primeiro grau em primeiro grau em $\delta\sigma'$ que pode ser escrita da seguinte forma,

$$\varphi\langle\delta\sigma'\rangle = \frac{\partial\varphi\langle\delta\sigma'\rangle}{\partial(\delta\sigma')} \delta\sigma' \quad (\text{Eq. 3.16})$$

Substituindo-se na equação 3.15 resulta,

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varphi\langle\delta\sigma'\rangle}{\partial(\delta\sigma')} \delta\sigma' \quad (\text{Eq. 3.17})$$

ou

$$\delta\varepsilon = \mathbf{C} \delta\sigma' \quad (\text{Eq. 3.18})$$

com

$$\mathbf{C} = \frac{\partial\varphi\langle\delta\sigma'\rangle}{\partial(\delta\sigma')} \quad (\text{Eq. 3.19})$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva deformação-tensão.

De acordo com Pastor [Pastor, M., 1990], a dependência de C_{ijkl} com n_i poderia ser estabelecida como uma função contínua $C_{ijkl} \equiv C_{ijkl}\langle n_i \rangle$, do mesmo tipo utilizada no modelo incremental proposto por Darve [Darve, F.; Dendani, H., 1988]. No entanto, na teoria da plasticidade generalizada utiliza-se uma relação mais simples, do tipo descontínuo, para definição de uma matriz constitutiva em cada situação de carregamento. Divide-se o espaço do incremento de tensões em dois subespaços ou *zonas tensoriais* [Darve, F., et al., 1988]: o primeiro como um subespaço de incrementos de carregamento e o segundo como de incrementos de descarregamento. No primeiro subespaço utiliza-se o tensor constitutivo para incrementos de carregamento, C_{ijkl_L} , e no outro o tensor constitutivo para incrementos de descarregamento, C_{ijkl_U} .

A definição do tensor constitutivo em cada subespaço pode ser mais bem compreendida através da figura 3.3. Considerando o comportamento do material num carregamento cíclico uniaxial, a matriz constitutiva \mathbf{C} se reduz a uma função escalar representada em cada ponto da curva tensão-deformação pela inclinação da tangente à curva. Durante a etapa de carregamento OC observa-se que a inclinação da tangente à curva diminui com o aumento da tensão atuante, mas não

exclusivamente. Comparando-se as deformações nos pontos A_1 , A_2 , e A_3 nota-se que a relação constitutiva também depende de outros fatores como a história de tensões e a microestrutura do solo que é modificada no processo de carregamento e descarregamento. Na mesma figura, a inclinação da tangente à curva nos pontos B_1 e B_2 também indica uma dependência da relação constitutiva em relação à condição de carregamento ou descarregamento ou, em outras palavras, da direção do incremento de tensão.

A relação deformação-tensão para a condição de carregamento pode ser escrita como,

$$\delta \epsilon_L = C_L \delta \sigma' \quad (\text{Eq. 3.20})$$

e para a condição de descarregamento por,

$$\delta \epsilon_U = C_U \delta \sigma' \quad (\text{Eq. 3.21})$$

onde os índices L e U indicam as etapas de carregamento e descarregamento, respectivamente.

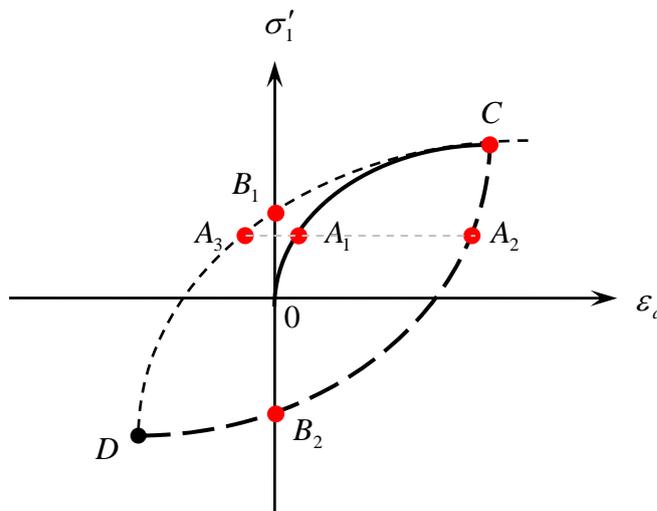


Figura 3.3 - Representação de um ciclo de carregamento num ensaio triaxial cíclico uniaxial.

Na aplicação de um ciclo infinitesimal de carregamento, as equações anteriores são expressas como

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_L &= C_L \delta \sigma' \\ \delta \epsilon_U &= -C_U \delta \sigma' \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.22})$$

No caso de deformações cíclicas irreversíveis

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_U \neq \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 3.23})$$

ou

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_L \delta \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{C}_U \delta \boldsymbol{\sigma}' \neq \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 3.24})$$

Para qualquer incremento de tensão $\delta \boldsymbol{\sigma}'$, sua direção (carregamento ou descarregamento) é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{fL}^T \delta \boldsymbol{\sigma}' > 0 \text{ (carregamento) então } \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L &= \mathbf{C}_L \delta \boldsymbol{\sigma}' \\ \mathbf{n}_{fU}^T \delta \boldsymbol{\sigma}' < 0 \text{ (descarregamento) então } \delta \boldsymbol{\varepsilon}_U &= \mathbf{C}_U \delta \boldsymbol{\sigma}'. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.25})$$

onde \mathbf{n}_{fL} , \mathbf{n}_{fU} são vetores unitários que definem a expansão ou a contração da superfície de escoamento respectivamente.

O carregamento neutro acontece quando

$$\mathbf{n}_{fL/U}^T \delta \boldsymbol{\sigma}' = 0 \quad (\text{Eq. 3.26})$$

onde o índice L/U indica os estados de carregamento ou de descarregamento das tensões atuantes.

Na teoria da plasticidade generalizada, os vetores unitários normais à superfície de escoamento para a etapa de carregamento, \mathbf{n}_{fL} , e para a etapa de descarregamento, \mathbf{n}_{fU} , são definidos por

$$\mathbf{n}_{fL/U} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|} \quad (\text{Eq. 3.27})$$

onde

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\| = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. 3.28})$$

Logo, a introdução do vetor unitário $\mathbf{n}_{fL/U}$, que define os estados de carregamento ou de descarregamento, pode ser empregada para definição da superfície normal a esta direção em cada ponto, como usual na teoria da plasticidade clássica.

De acordo com Pastor [Pastor, M., et al., 1990], utilizando a condição de continuidade entre os estados de carregamento e descarregamento, a matriz constitutiva na condição de carregamento, \mathbf{C}_L , é expressa por

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{C}^e + \frac{1}{H_L} \mathbf{n}_{fL}^T \mathbf{n}_{gL} \quad (\text{Eq. 3.29})$$

e para a condição de descarregamento, \mathbf{C}_U ,

$$\mathbf{C}_U = \mathbf{C}^e + \frac{1}{H_U} \mathbf{n}_{fU}^T \mathbf{n}_{gU} \quad (\text{Eq. 3.30})$$

onde \mathbf{n}_{gL} , \mathbf{n}_{gU} são vetores unitários que definem a expansão e contração da superfície do potencial plástico e H_L , H_U representam os módulos plásticos nas etapas de carregamento e descarregamento respectivamente e \mathbf{C}^e a matriz constitutiva elástica deformação-tensão.

Os vetores unitários para a etapa de carregamento, \mathbf{n}_{gL} , e para a etapa de descarregamento, \mathbf{n}_{gU} , são definidos por

$$\mathbf{n}_{gL/U} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|} \quad (\text{Eq. 3.31})$$

com

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\| = \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}^T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. 3.32})$$

O vetor de incremento de deformação total pode ser definido por duas parcelas aditivas,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^e + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{Eq. 3.33})$$

ou (da equação 3.15 com 3.29 e 3.30),

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^e \delta \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{H_{L/U}} \mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{n}_{gL/U} \delta \boldsymbol{\sigma}' \quad (\text{Eq. 3.34})$$

No caso de carregamento neutro, o comportamento do material é reversível (elástico), i.e.

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{C}_L \delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^e \delta \boldsymbol{\sigma}' \quad (\text{Eq. 3.35})$$

ou

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_U = \mathbf{C}_U \delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^e \delta \boldsymbol{\sigma}' \quad (\text{Eq. 3.36})$$

É importante mencionar neste ponto que a introdução de deformações plásticas nesta teoria foi feita sem a necessidade da definição prévia das superfícies de escoamento e do potencial plástico, sendo necessário o conhecimento dos valores do módulo plástico, $H_{L/U}$, das direções de expansão e contração da superfície de escoamento, $\mathbf{n}_{fL/U}$, das direções de expansão e contração da superfície do potencial plástico, $\mathbf{n}_{gL/U}$, bem como a matriz constitutiva elástica, \mathbf{C}^e .

Finalmente, de acordo com Pastor [Pastor, M., et al., 1990], para levar em consideração as situações de amolecimento do material (módulo plástico H_L com valor negativo), as equações constitutivas são modificadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L &= \mathbf{C}_L \delta \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{para: } \mathbf{n}_{fL}^T \delta \boldsymbol{\sigma}'^e > 0 \quad (\text{carregamento}) \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_U &= \mathbf{C}_U \delta \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{para: } \mathbf{n}_{fU}^T \delta \boldsymbol{\sigma}'^e < 0 \quad (\text{descarregamento}) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.37})$$

onde $\delta \boldsymbol{\sigma}'^e$ representa o incremento de tensões efetivas devido a deformações elásticas,

$$\delta \boldsymbol{\sigma}'^e = \mathbf{C}^{e-1} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 3.38})$$

A vantagem da teoria da plasticidade generalizada é a possibilidade de simulação de comportamentos complexos do material, difíceis de serem reproduzidos utilizando modelos da teoria da plasticidade clássica como, por exemplo, considerando a ocorrência de deformações plásticas na etapa de descarregamento. Outra observação adicional, é que sua implementação em programas computacionais é bem mais simples que nos modelos baseados na teoria da plasticidade clássica porque não necessitam satisfazer explicitamente a condição de consistência, dispensando, portanto, o emprego de algoritmos de retorno para correção do estado de tensão.

3.3.3 Formulação da matriz constitutiva elasto-plástica

O desenvolvimento descrito acima foi feito em termos da matriz constitutiva deformação-tensão \mathbf{C} , sendo necessária a obtenção da relação inversa tensão-deformação ou matriz constitutiva tensão-deformação \mathbf{D} para implementação em programas computacionais baseados no MEF, na formulação em deslocamentos. Esta inversão pode ser realizada unicamente quando o módulo plástico H é diferente de zero, sendo executada de acordo com o procedimento sugerido por Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999].

Ao considerar que

$$\chi = \frac{1}{H_{L/U}} \mathbf{n}_{fL/U}^T \delta \boldsymbol{\sigma}' \quad (\text{Eq. 3.39})$$

onde χ é um escalar positivo.

O vetor de incremento de deformação total (equação 3.34) pode ser escrito como

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^e \delta \boldsymbol{\sigma}' + \chi \mathbf{n}_{gL/U} \quad (\text{Eq. 3.40})$$

Multiplicando a equação 3.40 por $\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e$ resulta,

$$\left(\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \right) \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \right) \mathbf{C}^e \delta \boldsymbol{\sigma}' + \left(\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \right) \chi \mathbf{n}_{gL/U} \quad (\text{Eq. 3.41})$$

ou

$$\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{n}_{fL/U}^T \delta \boldsymbol{\sigma}' + \chi \mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \mathbf{n}_{gL/U} \quad (\text{Eq. 3.42})$$

Considerando

$$\mathbf{n}_{fL/U}^T \delta \boldsymbol{\sigma}' = \chi H_{L/U} \quad (\text{Eq. 3.43})$$

e substituindo na equação 3.42, vem

$$\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left(H_{L/U} + \mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \mathbf{n}_{gL/U} \right) \chi \quad (\text{Eq. 3.44})$$

Colocando χ em evidência,

$$\chi = \frac{\mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon}}{H_{L/U} + \mathbf{n}_{fL/U}^T \mathbf{D}^e \mathbf{n}_{gL/U}} \quad (\text{Eq. 3.45})$$

Multiplicando a equação 3.40 por \mathbf{D}^e ,

$$\mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{D}^e \chi \mathbf{n}_{g L/U} \quad (\text{Eq. 3.46})$$

logo

$$\delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^e \chi \mathbf{n}_{g L/U} \quad (\text{Eq. 3.47})$$

Substituindo o valor de χ (equação 3.45) na equação 3.47, resulta

$$\delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{n}_{g L/U} \mathbf{n}_{f L/U}^T \mathbf{D}^e}{H_{L/U} + \mathbf{n}_{f L/U}^T \mathbf{D}^e \mathbf{n}_{g L/U}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 3.48})$$

que pode ser re-escrita como

$$\delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}^{ep} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 3.49})$$

com

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{n}_{g L/U} \mathbf{n}_{f L/U}^T \mathbf{D}^e}{H_{L/U} + \mathbf{n}_{f L/U}^T \mathbf{D}^e \mathbf{n}_{g L/U}} \quad (\text{Eq. 3.50})$$

3.4 Modelo constitutivo Pastor–Zienkiewicz

3.4.1 Formulação geral do modelo no plano triaxial

Pastor e Zienkiewicz [Pastor, M.; Zienkiewicz, O.C., 1986] propuseram uma formulação (modelo P-Z) no plano triaxial $p':q$ para a simulação da ocorrência de liquefação em areias. Nesta seção adotam-se como positivas as tensões normais de compressão, de acordo com a convenção usual de mecânica dos solos.

Assume-se válido o princípio das tensões efetivas [Terzaghi, K., 1936] para solos saturados no espaço 3D,

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \quad (\text{Eq. 3.51})$$

onde p_w é a poropressão, δ_{ij} o delta de Kronecker, σ'_{ij} o tensor de tensão efetiva e σ_{ij} o tensor de tensão total.

A equação 3.51 pode também ser escrita na forma vetorial,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_w \mathbf{m} \quad (\text{Eq. 3.52})$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma'_{xx} \quad \sigma'_{yy} \quad \sigma'_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (\text{Eq. 3.53})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (\text{Eq. 3.54})$$

$$\mathbf{m} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (\text{Eq. 3.55})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}'$ é o vetor de tensão efetiva, $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor de tensão total e \mathbf{m} a forma vetorial do delta de Kronecker.

O tensor de tensões efetivas atuantes no plano triaxial é representado, na forma vetorial, por,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma'_{xx} \quad \sigma'_{yy} \quad \sigma'_{zz} \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (\text{Eq. 3.56})$$

onde $\sigma'_{xx} = \sigma'_1$, $\sigma'_{yy} = \sigma'_2$, $\sigma'_{zz} = \sigma'_3$ são as tensões principais efetivas. No caso do ensaio de compressão triaxial convencional: $\sigma'_{xx} = \sigma'_a$ (tensão axial efetiva) e $\sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} = \sigma'_r$ (tensão radial efetiva).

O modelo P-Z é desenvolvido em termos das medidas da tensão efetiva média, p' , e da tensão de desvio, q , definidas como

$$p' = J'_1 \quad (\text{Eq. 3.57})$$

$$q = \sqrt{3J'_{2D}} \quad (\text{Eq. 3.58})$$

com

$$J'_1 = \frac{\sigma'_{ii}}{3} \quad (\text{Eq. 3.59})$$

$$J'_{2D} = \frac{S'_{ij}S'_{ji}}{2} \quad (\text{Eq. 3.60})$$

sendo

$$S'_{ij} = \sigma'_{ij} - J'_1 \delta_{ij} \quad (\text{Eq. 3.61})$$

onde J'_1 é o primeiro invariante da tensão efetiva, J'_{2D} o segundo invariante da tensão de desvio efetiva e S'_{ij} o tensor de tensão de desvio efetiva.

A relação dos incrementos de tensão com os incrementos de deformação total, no plano triaxial $p' : q$, é expressa por

$$\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{D}}^{ep} \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{Eq. 3.62})$$

sendo

$$\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \{\delta p' \quad \delta q\}^T \quad (\text{Eq. 3.63})$$

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\delta\hat{\varepsilon}_p \quad \delta\hat{\varepsilon}_q\}^T \quad (\text{Eq. 3.64})$$

$$\hat{\mathbf{D}}^{ep} = \hat{\mathbf{D}}^e - \frac{\hat{\mathbf{D}}^e \hat{\mathbf{n}}_{gLU} \hat{\mathbf{n}}_{fLU}^T \hat{\mathbf{D}}^e}{\hat{H}_{LU} + \hat{\mathbf{n}}_{fLU}^T \hat{\mathbf{D}}^e \hat{\mathbf{n}}_{gLU}} \quad (\text{Eq. 3.65})$$

onde a relação tensão-deformação elástica, $\hat{\mathbf{D}}^e$, é definida por,

$$\hat{\mathbf{D}}^e = \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.66})$$

A relação dos incrementos de tensão com os incrementos de deformação elástica, no plano triaxial $p' : q$, é expressa por

$$\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{D}}^e \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (\text{Eq. 3.67})$$

sendo

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \{\delta\hat{\varepsilon}_p^e \quad \delta\hat{\varepsilon}_q^e\}^T \quad (\text{Eq. 3.68})$$

A relação entre as componentes do vetor incremento de deformação total no plano triaxial $p' : q$ com as componentes do tensor de incremento de deformação total no espaço 3D é apresentada a seguir,

$$\delta\hat{\varepsilon}_p = \delta\varepsilon_{ii} \quad (\text{Eq. 3.69})$$

$$\delta\hat{\varepsilon}_q = \frac{2}{3} \delta\varepsilon'_{ij} \delta\varepsilon'_{ij} \quad (\text{Eq. 3.70})$$

com

$$\delta\varepsilon'_{ij} = \delta\varepsilon_{ij} - \frac{\delta\varepsilon_{ii}}{3} \quad (\text{Eq. 3.71})$$

sendo $\hat{\varepsilon}_p$ a deformação volumétrica total e $\hat{\varepsilon}_q$ representa a deformação de desvio total.

Em termos de tensões efetivas e deformações totais axiais e radiais, as seguintes relações podem ser estabelecidas no plano triaxial $p' : q$,

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_a + 2\sigma'_r) \quad (\text{Eq. 3.72})$$

$$\delta\hat{\varepsilon}_p = \delta\varepsilon_a + 2\delta\varepsilon_r \quad (\text{Eq. 3.73})$$

$$q = \sigma'_a - \sigma'_r \quad (\text{Eq. 3.74})$$

$$\delta\hat{\varepsilon}_q = \frac{2}{3}(\delta\varepsilon_a - \delta\varepsilon_r) \quad (\text{Eq. 3.75})$$

onde ε_a é deformação axial total e ε_r deformação radial total. Nas equações apresentadas nesta seção o sobrescrito $\hat{}$ indica formulação no plano triaxial $p' : q$. O símbolo δ denota incrementos.

A seguir são apresentadas as equações necessárias para definição das variáveis que compõem a matriz constitutiva elasto-plástica do modelo P-Z:

(a) Vetores unitários normais à superfície de escoamento e à superfície do potencial plástico.

Segundo Pastor [Pastor, M., et al., 1990] para estabelecer a direção dos incrementos de deformação plástica no plano triaxial $p' : q$ deve-se partir de medições experimentais da dilatância plástica, d , definida por Wood [Wood, D.M., 1990] como,

$$d = -\frac{\delta\varepsilon_p^p}{\delta\varepsilon_q^p} \quad (\text{Eq. 3.76})$$

onde $\delta\varepsilon_p^p$ é o incremento da deformação volumétrica plástica e $\delta\varepsilon_q^p$ o incremento da deformação de desvio plástica.

Resultados experimentais mostram que a dilatância depende unicamente da razão de tensão, η , mas não do estado de tensão [Wood, D.M., 1990]. Neste modelo, a dilatância, d_g , foi obtida com base nos resultados experimentais de Frossard [Frossard, E., 1983] e aproximada através de uma função linear da razão de tensão [Nova, R.; Wood, D.M., 1979]

$$d_g = (1 + \alpha)(M_g - \eta) \quad (\text{Eq. 3.77})$$

com

$$\eta = \frac{q}{p'} \quad (\text{Eq. 3.78})$$

onde α e M_g são parâmetros do modelo P-Z. O valor de α esta relacionado com a dilatação e M_g esta relacionado com a superfície potencial plástico e representa a tangente do ângulo inclinação da linha de estado crítico no plano $p' : q$.

A equação 3.77 se torna nula quando o estado de tensão atinge a linha coincidente com a projeção da linha de estado crítico no plano $p' : q$. Logo,

$$\eta = M_g \quad (\text{Eq. 3.79})$$

No modelo P-Z duas zonas de análises são consideradas para definir a inclinação da linha de estado crítico: (1) zona de tensão de desvio positivo e (2) zona de tensão de desvio negativo.

A inclinação da linha de estado crítico no plano triaxial $p' : q$ na zona de tensão de desvio positivo é representada da seguinte forma [Zienkiewicz, O.C.; Pande, G.N., 1977]

$$M_g = \frac{6 \sin \phi_{CS}}{3 - \sin \phi_{CS} \sin 3\theta} \quad (\text{Eq. 3.80})$$

com

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{27 J'_{3D}}{2 q^3} \right) \quad (\text{Eq. 3.81})$$

sendo

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (\text{Eq. 3.82})$$

$$J'_{3D} = \det[S'_{ij}] \quad (\text{Eq. 3.83})$$

onde ϕ_{CS} representa o ângulo de atrito na condição de estado crítico, θ o ângulo de Lode e J'_{3D} o terceiro invariante das tensões de desvio efetiva. O símbolo $\det[]$ denota determinante da matriz.

A inclinação da linha de estado crítico no plano triaxial $p':q$ na zona de tensão de desvio negativo é representada como

$$M_g = \frac{6 \sin \phi_{CS}}{3 + \sin \phi_{CS} \sin 3\theta} \quad (\text{Eq. 3.84})$$

A direção, expansão (carregamento) ou contração (descarregamento), da superfície do potencial plástico no plano triaxial $p':q$ é determinada pelo vetor unitário, $\hat{\mathbf{n}}_{gL/U}$,

$$\hat{\mathbf{n}}_{gL/U} = \left\{ \hat{n}_{gL/U}^p \quad \hat{n}_{gL/U}^q \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.85})$$

sendo para o carregamento,

$$\hat{\mathbf{n}}_{gL} = \left\{ \hat{n}_{gL}^p \quad \hat{n}_{gL}^q \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.86})$$

com

$$\hat{n}_{gL}^p = \frac{d_g}{\sqrt{1 + d_g^2}} \quad (\text{Eq. 3.87})$$

$$\hat{n}_{gL}^q = \frac{1}{\sqrt{1 + d_g^2}} \quad (\text{Eq. 3.88})$$

e para o descarregamento,

$$\hat{\mathbf{n}}_{gU} = \left\{ \hat{n}_{gU}^p \quad \hat{n}_{gU}^q \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.89})$$

com

$$\hat{n}_{gU}^p = - \left| \frac{d_g}{\sqrt{1 + d_g^2}} \right| \quad (\text{Eq. 3.90})$$

$$\hat{n}_{gU}^q = \frac{1}{\sqrt{1 + d_g^2}} \quad (\text{Eq. 3.91})$$

onde o símbolo $| \quad |$ denota valor absoluto.

A direção, expansão (carregamento) ou contração (descarregamento), da superfície de escoamento no plano triaxial $p':q$ é determinada pelo vetor unitário, $\hat{\mathbf{n}}_{fL/U}$,

$$\hat{\mathbf{n}}_{fL/U} = \left\{ \hat{n}_{fL/U}^p \quad \hat{n}_{fL/U}^q \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.92})$$

sendo para o carregamento,

$$\hat{\mathbf{n}}_{fL} = \left\{ \hat{n}_{fL}^p \quad \hat{n}_{fL}^q \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.93})$$

com

$$\hat{n}_{fL}^p = \frac{d_f}{\sqrt{1+d_f^2}} \quad (\text{Eq. 3.94})$$

$$\hat{n}_{fL}^q = \frac{1}{\sqrt{1+d_f^2}} \quad (\text{Eq. 3.95})$$

e para o descarregamento,

$$\hat{\mathbf{n}}_{fU} = \left\{ \hat{n}_{fU}^p \quad \hat{n}_{fU}^q \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.96})$$

com

$$\hat{n}_{fU}^p = - \left| \frac{d_f}{\sqrt{1+d_f^2}} \right| \quad (\text{Eq. 3.97})$$

$$\hat{n}_{fU}^q = \frac{1}{\sqrt{1+d_f^2}} \quad (\text{Eq. 3.98})$$

onde

$$d_f = (1+\alpha)(M_f - \eta) \quad (\text{Eq. 3.99})$$

sendo M_f parâmetro do modelo P-Z relacionado com a superfície de escoamento.

Para areias muito densas, Pastor e colaboradores [Pastor, M., et al., 1985] consideraram que a razão M_f/M_g é dependente da densidade relativa da areia, D_r , propondo a seguinte relação:

$$\frac{M_f}{M_g} = D_r \quad (\text{Eq. 3.100})$$

(b) Módulos plásticos

A obtenção do módulo plástico no plano triaxial $p' : q$, \hat{H} , nas condições de carregamento, descarregamento e recarregamento é descrita a seguir:

(b.1) Condição de carregamento

Para a obtenção do módulo plástico na condição de carregamento \hat{H}_L , Pastor e Zienkiewicz [Pastor, M.; Zienkiewicz, O.C., 1986] consideraram as seguintes evidências estabelecidas experimentalmente:

- (i) A condição residual substitui a linha de estado crítico,

$$\left(\frac{q}{p'} \right)_{residual} = M_g \quad (\text{Eq. 3.101})$$

- (ii) A ruptura não necessariamente ocorre quando a linha de estado crítico é atingida.

Propuseram então a seguinte expressão empírica para determinação de \hat{H}_L :

$$\hat{H}_L = H_{Lo} p' H_f (H_v + H_s) \quad (\text{Eq. 3.102})$$

onde H_{Lo} é parâmetro do modelo P-Z e H_f , H_v e H_s coeficientes do módulo plástico, na condição de carregamento.

Os valores de H_f e H_v estão relacionados com a *linha de estado permanente* e a *linha de transformação de fase*, definidas no capítulo 2, por

$$H_f = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_f} \right)^4 \quad (\text{Eq. 3.103})$$

$$H_v = \left(1 - \frac{\eta}{M_g} \right) \quad (\text{Eq. 3.104})$$

com

$$\eta_f = \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) M_f \quad (\text{Eq. 3.105})$$

onde η_f representa a linha da superfície de ruptura.

O coeficiente do módulo plástico H_s é definido por,

$$H_s = \beta_0 \beta_1 e^{-(\beta_0 \xi)} \quad (\text{Eq. 3.106})$$

sendo β_0 , β_1 parâmetros do modelo P-Z e ξ a deformação plástica de desvio acumulada definida como

$$\xi = \int |\delta \varepsilon_q^p| \quad (\text{Eq. 3.107})$$

(b.2) Condição de descarregamento

Os modelos constitutivos baseados na teoria da plasticidade clássica consideram que na etapa de descarregamento o material comporta-se elasticamente. No entanto, resultados observados em ensaios triaxiais não-drenados indicam que nesta etapa também ocorrem deformações plásticas [Ishihara, K.; Okoda, S., 1982].

Pastor e colaboradores [Pastor, M., et al., 1990] propuseram a seguinte expressão para estimativa do módulo plástico na condição de descarregamento \hat{H}_U :

$$\hat{H}_U = H_{U_0} \left(\frac{M_g}{\eta_U} \right)^{\gamma_U} \quad \text{para} \quad \left| \frac{M_g}{\eta_U} \right| > 1 \quad (\text{Eq. 3.108})$$

$$\hat{H}_U = H_{U_0} \quad \text{para} \quad \left| \frac{M_g}{\eta_U} \right| \leq 1 \quad (\text{Eq. 3.109})$$

onde H_{U_0} , γ_U são parâmetros do modelo P-Z e η_U é o valor da razão de tensões onde se inicia o descarregamento.

(b.3) Condição de recarregamento

Esta condição é assumida logo após a ocorrência do primeiro descarregamento durante o ciclo. Para incorporar efeitos da história de tensões, um fator de memória H_{DM} é definido e utilizado para determinação do módulo plástico no recarregamento \hat{H}_L :

$$\hat{H}_L = H_{L_0} p' H_f (H_v + H_s) H_{DM} \quad (\text{Eq. 3.110})$$

onde H_{Lo} é o mesmo parâmetro do modelo constitutivo definido na condição de carregamento e H_f , H_v , H_s são os mesmos coeficientes plásticos definidos na condição de carregamento.

O fator de memória H_{DM} é definido pela equação

$$H_{DM} = \left(\frac{\zeta_{\max}}{\zeta} \right)^\gamma \quad (\text{Eq. 3.111})$$

com

$$\zeta = p' \left(1 - \frac{\eta}{\eta_f} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{Eq. 3.112})$$

onde γ é um parâmetro do modelo P-Z e ζ_{\max} o máximo valor de ζ alcançado durante a história do carregamento do material.

(c) Matriz constitutiva tensão-deformação elástica

A matriz constitutiva elástica $\hat{\mathbf{D}}^e$ é definida como

$$\hat{\mathbf{D}}^e = \begin{bmatrix} \hat{D}_p^e & 0 \\ 0 & \hat{D}_q^e \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.113})$$

onde a relação dos módulos elásticos com os incrementos da tensão e deformação é dada por,

$$\delta \varepsilon_p^e = \frac{1}{\hat{D}_p^e} \delta p' = \frac{1}{K'} \delta p' \quad (\text{Eq. 3.114})$$

$$\delta \varepsilon_q^e = \frac{1}{\hat{D}_q^e} \delta q = \frac{1}{3G} \delta q \quad (\text{Eq. 3.115})$$

Os módulos de deformação volumétrica efetiva, K' , e de cisalhamento, G , são considerados dependentes da tensão efetiva média, p' , da seguinte forma, conforme admitido por Pastor [Pastor, M., et al., 1990],

$$K' = \hat{D}_p^e = K_{epo} \frac{p'}{p_0} \quad (\text{Eq. 3.116})$$

$$3G = \hat{D}_q^e = K_{eqo} \frac{p'}{p_0} \quad (\text{Eq. 3.117})$$

onde K_{epo} e K_{eqo} são parâmetros do modelo P-Z e p'_0 é a tensão efetiva média inicial.

Substituindo-se as equações 3.116 e 3.117 na equação 3.113, as relações tensão-deformação elástica podem ser escritas da seguinte forma,

$$\hat{\mathbf{D}}^e = \begin{bmatrix} K_{epo} & 0 \\ 0 & K_{eqo} \end{bmatrix} \cdot \frac{p'}{p'_0} \quad (\text{Eq. 3.118})$$

(d) Superfície de escoamento e do potencial plástico

Cabe lembrar neste ponto que, as direções do vetor unitário, indicadas nas equações 3.85 e 3.92, foram definidas sem o conhecimento prévio da função que descreve a superfície de escoamento \hat{f} ou o potencial plástico \hat{g} . As equações de cada uma destas superfícies podem ser determinadas através da integração das equações de dilatação plástica associadas a cada superfície.

De acordo com Pastor [Pastor, M., et al., 1985] a função que define a superfície de escoamento, \hat{f} , e a superfície do potencial plástico, \hat{g} , são escritas como

$$\hat{f} = \left(q - M_f \cdot p' \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 - \left(\frac{p'}{\hat{p}'_{f_0}} \right)^\alpha \right) \right) \quad (\text{Eq. 3.119})$$

$$\hat{g} = \left(q - M_g \cdot p' \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 - \left(\frac{p'}{\hat{p}'_{g_0}} \right)^\alpha \right) \right) \quad (\text{Eq. 3.120})$$

onde \hat{p}'_{f_0} e \hat{p}'_{g_0} são coeficientes que definem o tamanho das superfícies de escoamento e do potencial plástico, respectivamente.

Embora a teoria da plasticidade generalizada não necessite explicitamente das equações das superfícies \hat{f} e \hat{g} para implementação do modelo constitutivo, é necessário definir suas direções, indicadas pelos vetores normais unitários $\hat{\mathbf{n}}_{f_{L/U}}$ e $\hat{\mathbf{n}}_{g_{L/U}}$, respectivamente. Por outro lado, ao observar as equações 3.85 e 3.92 nota-se que o cálculo destes vetores diferencia-se apenas pelas constantes M_g e M_f . Para aplicação da hipótese de lei de fluxo associada basta então considerar

$M_g = M_f$. As figuras 3.4 a 3.6 apresentam uma análise da sensibilidade dos parâmetros da função da superfície do potencial plástico.

O modelo descrito até este ponto corresponde ao da formulação original desenvolvida por Pastor [Pastor, M., et al., 1990] e descrita em Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999]. Vários trabalhos têm introduzido modificações, como Pastor [Pastor, M., et al., 1993] considerando efeitos de endurecimento anisotrópico, Sassa [Sassa, S.; Sekiguchi, H., 2001] tratando dos efeitos de rotação dos eixos principais, Ling [Ling, H.; Liu, H., 2003] considerando efeitos da densificação de areias, Bahda [Bahda, F., et al., 1997] através da utilização de leis de endurecimento duplo, Zhang [Zhang, H.W., et al., 2005] implementando um algoritmo de integração implícita para melhorar a eficiência da solução numérica do modelo. No caso de solos cimentados e parcialmente saturados, Yang e colaboradores [Yang, C., et al., 2008] propuseram um modelo constitutivo combinando a teoria da plasticidade generalizada com o *Modelo Básico Barcelona* ou BBM (*Basic Barcelona Model*) proposto por Alonso [Alonso E.E., et al., 1990].

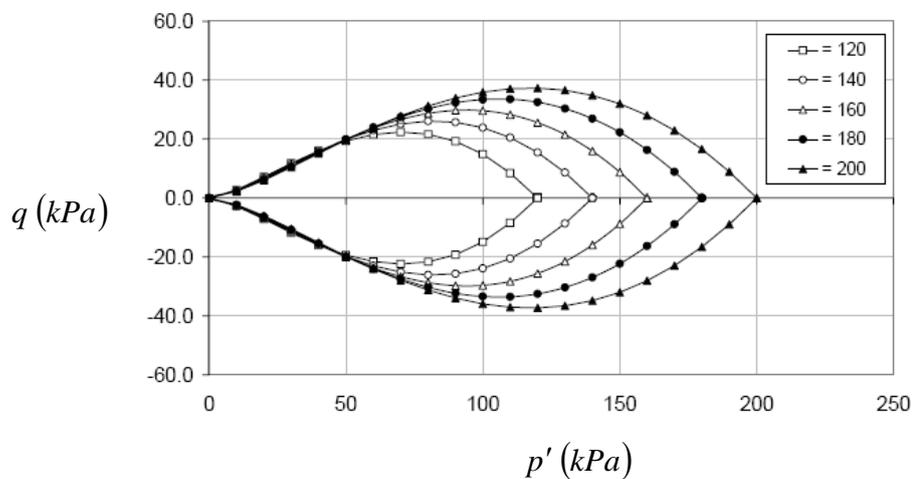


Figura 3.4 - Influência de \hat{p}'_{s0} na forma da superfície do potencial plástico ($\alpha = 0,6, M_g = 1,6$).

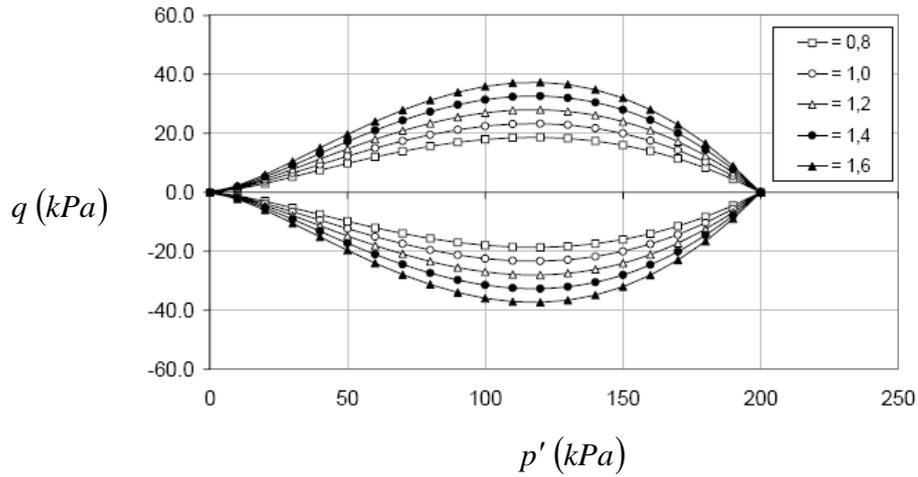


Figura 3.5 - Influência de M_g na forma da superfície do potencial plástico ($\alpha = 0,6$, $\hat{p}'_{g0} = 200 \text{ kPa}$).

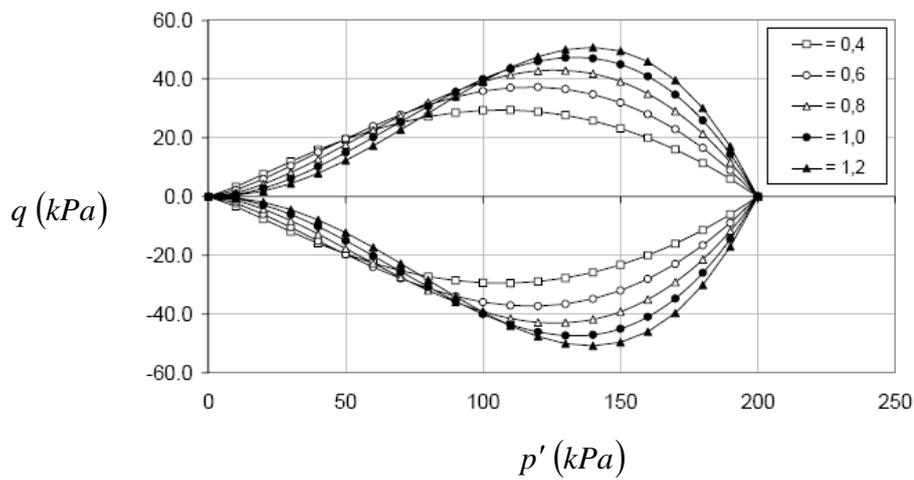


Figura 3.6 - Influência de α na forma da superfície do potencial plástico ($M_g = 1,6$, $\hat{p}'_{g0} = 200 \text{ kPa}$).

3.4.2 Sumário da formulação do modelo no plano triaxial

A relação dos incrementos de tensão com os incrementos de deformação total,

$$\delta \boldsymbol{\sigma}' = \hat{\mathbf{D}}^{ep} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 3.62})$$

O tensor de incremento de tensão,

$$\delta \boldsymbol{\sigma}' = \{\delta p' \quad \delta q\}^T \quad (\text{Eq. 3.63})$$

com,

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_a + 2\sigma'_r) \quad (\text{Eq. 3.72})$$

$$q = \sigma'_a - \sigma'_r \quad (\text{Eq. 3.74})$$

O tensor de incremento de deformação total,

$$\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\delta\hat{\varepsilon}_p \quad \delta\hat{\varepsilon}_q\}^T \quad (\text{Eq. 3.64})$$

com,

$$\delta\hat{\varepsilon}_p = \delta\varepsilon_a + 2\delta\varepsilon_r \quad (\text{Eq. 3.73})$$

$$\delta\hat{\varepsilon}_q = \frac{2}{3}(\delta\varepsilon_a - \delta\varepsilon_r) \quad (\text{Eq. 3.75})$$

A matriz constitutiva tensão-deformação elasto-plástica,

$$\hat{\mathbf{D}}^{ep} = \hat{\mathbf{D}}^e - \frac{\hat{\mathbf{D}}^e \hat{\mathbf{n}}_{gL/U} \hat{\mathbf{n}}_{fL/U}^T \hat{\mathbf{D}}^e}{\hat{H}_{L/U} + \hat{\mathbf{n}}_{fL/U}^T \hat{\mathbf{D}}^e \hat{\mathbf{n}}_{gL/U}} \quad \text{Eq. (3.72)}$$

O vetor unitário normal à superfície do potencial plástico,

$$\hat{\mathbf{n}}_{gL/U} = \{\hat{n}_{gL/U}^p \quad \hat{n}_{gL/U}^q\}^T \quad \text{Eq. (3.85)}$$

O vetor unitário normal à superfície de escoamento

$$\hat{\mathbf{n}}_{fL/U} = \{\hat{n}_{fL/U}^p \quad \hat{n}_{fL/U}^q\}^T \quad \text{Eq. (3.92)}$$

A matriz constitutiva tensão-deformação elástica,

$$\hat{\mathbf{D}}^e = \begin{bmatrix} \hat{D}_p^e & 0 \\ 0 & \hat{D}_q^e \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (3.113)}$$

A matriz constitutiva tensão-deformação elasto-plástica, considerando o modelo P-Z, é obtida pela substituição das equações 3.85, 3.92 e 3.113 na equação 3.72,

$$\hat{\mathbf{D}}^{ep} = \frac{\begin{bmatrix} \hat{D}_p^e & 0 \\ 0 & \hat{D}_q^e \end{bmatrix}}{\hat{H}_{L/U} + \hat{D}_p^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p + \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q} \cdot \begin{bmatrix} (\hat{D}_p^e)^2 \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p & \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \\ \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p & (\hat{D}_q^e)^2 \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.121})$$

ou

$$\hat{\mathbf{D}}^{ep} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} \hat{D}_{11}^{ep} & \hat{D}_{12}^{ep} \\ \hat{D}_{21}^{ep} & \hat{D}_{22}^{ep} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.122})$$

com

$$A = \hat{H}_{L/U} + \hat{D}_p^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p + \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q \quad (\text{Eq. 3.123})$$

$$\hat{D}_{11}^{ep} = \hat{D}_p^e \hat{H}_{L/U} + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q \quad (\text{Eq. 3.124})$$

$$\hat{D}_{12}^{ep} = -\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \quad (\text{Eq. 3.125})$$

$$\hat{D}_{21}^{ep} = -\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p \quad (\text{Eq. 3.126})$$

$$\hat{D}_{22}^{ep} = \hat{D}_q^e \hat{H}_{L/U} + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p \quad (\text{Eq. 3.127})$$

(a) Situação de carregamento não-drenado - incremento de deformação controlada

Para este caso $\delta\varepsilon_p = 0$ e $\delta\varepsilon_q = \delta\varepsilon_a$. Da equação 3.121 obtém-se:

(a.1) Incremento da tensão efetiva média,

$$\delta p' = -\frac{1}{A} \left(\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \right) \delta\varepsilon_a \quad (\text{Eq. 3.128})$$

(a.2) Incremento da tensão de desvio,

$$\delta q = \frac{1}{A} \left(\hat{D}_q^e \hat{H}_{L/U} + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p \right) \delta\varepsilon_a \quad (\text{Eq. 3.129})$$

(b) Situação de carregamento drenado - incremento de deformação controlada

Para este caso $\delta p' = \delta q/3$. Da equação 3.121 obtém-se:

(b.1) Incremento da tensão efetiva média,

$$\begin{aligned} \delta p' = & \frac{1}{B_1} \left(\hat{H}_{L/U} \hat{D}_p^e + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q \right) \delta \varepsilon_p \\ & - \frac{1}{B_2} \left(\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \right) \delta \varepsilon_q \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.130})$$

(b.2) Incremento da tensão de desvio,

$$\begin{aligned} \delta q = & -\frac{1}{B_1} \left(\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p \right) \delta \varepsilon_p \\ & + \frac{1}{B_2} \left(\hat{H}_{L/U} \hat{D}_q^e + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p \right) \delta \varepsilon_q \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.131})$$

com

$$\begin{aligned} B_1 = & 2\hat{H}_{L/U} \hat{D}_q^e + 2\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p \\ & + 6\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q - 9\hat{H}_{L/U} \hat{D}_p^e \\ & - 9\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q - 3\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.132})$$

$$\begin{aligned} B_2 = & 18\hat{H}_{L/U} \hat{D}_p^e + 18\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q \\ & + 6\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p + 2\hat{H}_{L/U} \hat{D}_q^e \\ & + 2\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p + 6\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.133})$$

A relação entre os incrementos de deformação de desvio com a deformação axial esta dado por,

$$\delta \varepsilon_q = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \delta \varepsilon_a \quad (\text{Eq. 3.134})$$

com

$$\begin{aligned} X_1 = & 9\hat{H}_{L/U} \hat{D}_p^e + 9\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q \\ & + 3\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.135})$$

$$\begin{aligned} X_2 = & \hat{H}_{L/U} \hat{D}_q^e + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p \\ & + 3\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.136})$$

e a relação entre os incrementos de deformação volumétrica com a deformação axial por,

$$\delta\varepsilon_p = \frac{3\Delta_1}{\Delta_1 + 3\Delta_2} \delta\varepsilon_a \quad (\text{Eq. 3.137})$$

com

$$\Delta_1 = \hat{H}_{L/U} \hat{D}_q^e + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^p + 3\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^p \hat{n}_{fL/U}^q \quad (\text{Eq. 3.138})$$

$$\Delta_2 = 3\hat{H}_{L/U} \hat{D}_p^e + 3\hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^q + \hat{D}_p^e \hat{D}_q^e \hat{n}_{gL/U}^q \hat{n}_{fL/U}^p \quad (\text{Eq. 3.139})$$

3.4.3 Formulação do modelo no espaço das tensões principais

Nesta seção, bem como na formulação adotada nos capítulos 4 e 5, considera-se de sinal negativo a tensão normal de compressão. O tensor das tensões atuantes no plano triaxial $p' : q$, como já vimos, é definido por

$$\hat{\sigma}' = \{p' \quad q\}^T \quad (\text{Eq. 3.140})$$

com

$$p' = -\frac{1}{3}(\sigma'_a + 2\sigma'_r) \quad (\text{Eq. 3.141})$$

$$q = -(\sigma'_a - \sigma'_r) \quad (\text{Eq. 3.142})$$

Entanto, para propósitos de implementação da formulação em um programa computacional baseado no MEF, é conveniente reformular as equações anteriormente apresentadas em função do tensor de tensões definido no espaço 3D:

A invariância do produto escalar $\delta\sigma'^T \mathbf{n}_{fL/U}$ requer que se cumpra a seguinte relação [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999]:

$$\delta\sigma'^T \mathbf{n}_{fL/U} = \delta\hat{\sigma}'^T \hat{\mathbf{n}}_{fL/U} \quad (\text{Eq. 3.143})$$

onde $\mathbf{n}_{fL/U}$ e $\hat{\mathbf{n}}_{fL/U}$ são vetores unitários associados à superfície de escoamento, definidos no espaço 3D e no plano triaxial $p' : q$, respectivamente.

$$\delta\hat{\sigma}' = \frac{\partial\hat{\sigma}'}{\partial\sigma'} \delta\sigma' \quad (\text{Eq. 3.144})$$

Substituindo-se a equação 3.143 na equação 3.144 resulta,

$$\mathbf{n}_{fL/U} = \frac{\partial\hat{\sigma}'}{\partial\sigma'} \hat{\mathbf{n}}_{fL/U} \quad (\text{Eq. 3.145})$$

Da forma similar, obtém-se,

$$\mathbf{n}_{gL/U} = \frac{\partial\hat{\sigma}'}{\partial\sigma'} \hat{\mathbf{n}}_{gL/U} \quad (\text{Eq. 3.146})$$

onde $\mathbf{n}_{gL/U}$ e $\hat{\mathbf{n}}_{gL/U}$ são os vetores unitários associados à superfície do potencial plástico, definidos no espaço 3D e no plano triaxial $p' : q$, respectivamente.

O termo $(\partial\hat{\sigma}'/\partial\sigma')$, dos vetores unitários $\mathbf{n}_{fL/U}$ e $\mathbf{n}_{gL/U}$ corresponde às derivadas de invariantes, explicitadas em Zienkiewicz [Zienkiewicz, O.C., et al., 1999] e Lewis [Lewis, R.W.; Schrefler, B.A., 1998],

$$\frac{\partial\hat{\sigma}'}{\partial\sigma'} = \frac{\partial\hat{\sigma}'}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial\sigma'} + \frac{\partial\hat{\sigma}'}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial\sigma'} \quad (\text{Eq. 3.147})$$

onde

$$p' = -\frac{1}{3}(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) \quad (\text{Eq. 3.148})$$

$$q = -\sqrt{3J'_{2D}} \quad (\text{Eq. 3.149})$$

com

$$J'_{2D} = \frac{1}{6} \left((\sigma'_{xx} - p')^2 + (\sigma'_{yy} - p')^2 + (\sigma'_{zz} - p')^2 \right) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (\text{Eq. 3.150})$$

resultando em

$$\frac{\partial p'}{\partial\sigma'} = -\left\{ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.151})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{1}{2q} \begin{Bmatrix} 2\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} - \sigma'_{zz} \\ 2\sigma'_{yy} - \sigma'_{xx} - \sigma'_{zz} \\ 2\sigma'_{zz} - \sigma'_{yy} - \sigma'_{xx} \\ 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{zx} \\ 6\tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.152})$$

Para o caso bidimensional de tensões, as equações 3.151 e 3.152 são escritas como,

$$\frac{\partial p'}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = - \left\{ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right\}^T \quad (\text{Eq. 3.153})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{1}{2q} \begin{Bmatrix} 2\sigma'_{xx} - 2\sigma'_{yy} \\ \sigma'_{yy} - \sigma'_{xx} \\ 6\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.154})$$

com

$$q^2 = 3J'_{2D} = \frac{1}{2} \left((\sigma'_{xx} - p')^2 + 2 \cdot (\sigma'_{yy} - p')^2 \right) + 3\tau_{xy}^2 \quad (\text{Eq. 3.155})$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}'}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{q}(\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}) \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2q}(\sigma'_{yy} - \sigma'_{xx}) \\ 0 & \frac{3}{q}\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.156})$$

O vetor unitário associado à função de escoamento no triaxial $p':q$, em termos das tensões no espaço 2D,

$$\mathbf{n}_{fL/U} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \frac{d_f}{\sqrt{1+d_f^2}} + \frac{1}{q}(\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+d_f^2}} \\ -\frac{1}{3} \frac{d_f^2}{\sqrt{1+d_f^2}} + \frac{1}{2q}(\sigma'_{yy} - \sigma'_{xx}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+d_f^2}} \\ \frac{3}{q}\tau_{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+d_f^2}} \end{array} \right\} \quad (\text{Eq. 3.157})$$

O vetor unitário associado à função potencial plástico no triaxial $p' : q$, em termos das tensões no espaço 2D,

$$\mathbf{n}_{gL/U} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \frac{d_g}{\sqrt{1+d_g^2}} + \frac{1}{q} (\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+d_g^2}} \\ -\frac{1}{3} \frac{d_g}{\sqrt{1+d_g^2}} + \frac{1}{2q} (\sigma'_{yy} - \sigma'_{xx}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+d_g^2}} \\ \frac{3}{q} \tau_{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+d_g^2}} \end{array} \right\} \quad (\text{Eq. 3.158})$$