5
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO COM ATRITO

5.1
Formulação Continua do Problema de Contato

5.1.1
Notação

Neste trabalho será utilizadas a formulação e notação para o problema de contato desenvolvido por Laursen[48,50] & Simo e Laursen[49]. Considerando dois corpos deformáveis definidos por $\mathbf{B}^{\mathrm{i}}$, $i = 1{,}2$ e suas configurações iniciais por Ω^1, $\Omega^2 \subset \Re^3$. Estabelece-se que os corpos não estão em contato no tempo $\mathrm{t} = 0$ (configuração de referência), ou se estão em contato nenhuma força de contato é produzida. Configurações subsequentes são dadas por $\varphi^{(1)} : \Omega^{(1)} \times [0, T]$ no $\Re^3$ para Ω^1 e $\varphi^{(2)} : \Omega^{(2)} \times [0, T]$ para Ω^2. Devido ao contato físico dos dois corpos surgem forças de interação durante o intervalo de tempo $t := [0, T]$. Define-se qualquer uma dessas configurações no tempo t como φ_t^i, $i = 1{,}2$. A extensão para problemas que envolvem mais corpos é feita levando em conta cada pares de corpos em contato. Formulações de autocontato (o corpo em contato com ele mesmo) são feitas similarmente.

As superfícies dos contornos dos corpos $\partial\Omega^1$ e $\partial\Omega^2$ são representadas por $\Gamma^{(1)}$ e $\Gamma^{(2)}$ respectivamente, de tal forma que os pontos onde o contato pode ocorrer são incluídos (ver Fig. 5-1). As posições correntes das superfícies são dadas por $\gamma^{(i)} = \varphi_t^{(i)}\left(\Gamma^{(i)}\right)$, $i = 1{,}2$.

Na configuração inicial, os pontos de $\Gamma^{(1)}$ são representados por $\mathbf{X}$ e os pontos de $\Gamma^{(2)}$ por $\mathbf{Y}$ e na configuração corrente por $\mathbf{x} = \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{y} = \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y})$, respectivamente.

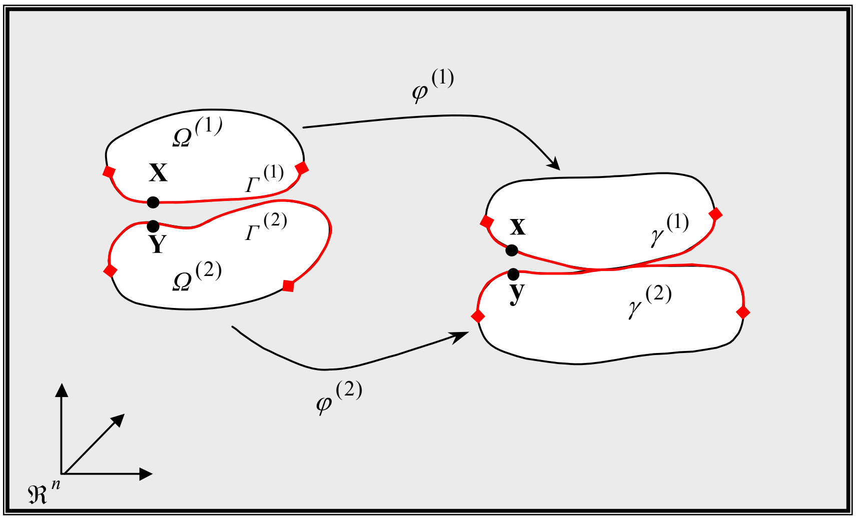


Figura 5.1 – Notação das deformações finitas do Problema de Contato com atrito

5.1.2
Restrições de contato normal

A superfície de contorno $\Gamma^{(1)}$ é designada como superfície escrava ("slave") e $\Gamma^{(2)}$ como superfície mestre ("master"). Para uma dada configuração, $\gamma^{(2)} = \varphi_t^{(2)}\left(\Gamma^{(2)}\right)$ define-se uma superfície na qual nenhum dos pontos do material $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ pode penetrar. Da mesma maneira, pode ser feita a restrição nos pontos $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ com relação a $\Gamma^{(1)}$.

5.1.2.1
Restrições de contato normal (impenetrabilidade)

A restrição de impenetrabilidade é formulada através da função de folga ("gap"), definida por um par de movimentos $\varphi^{(1)}(\cdot,t))$, $\varphi^{(2)}(\cdot,t))$ e para todos os pontos $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$, como a seguir:

$$g(\mathbf{X},t) = sign(g(\mathbf{X},t))|g(\mathbf{X},t)|$$

$$|g(\mathbf{X},t)| = \min_{Y \in \Gamma^{(2)}} \left\|\varphi^{(1)}(\mathbf{X},t) - \varphi^{(2)}(\mathbf{Y},t)\right\|$$

onde: $sign(g(\mathbf{X},t)) = -1$ se $\varphi^{(1)}(\mathbf{X},t)$ é admissível

$sign(g(\mathbf{X},t)) = +1$, caso contrário (5.1)

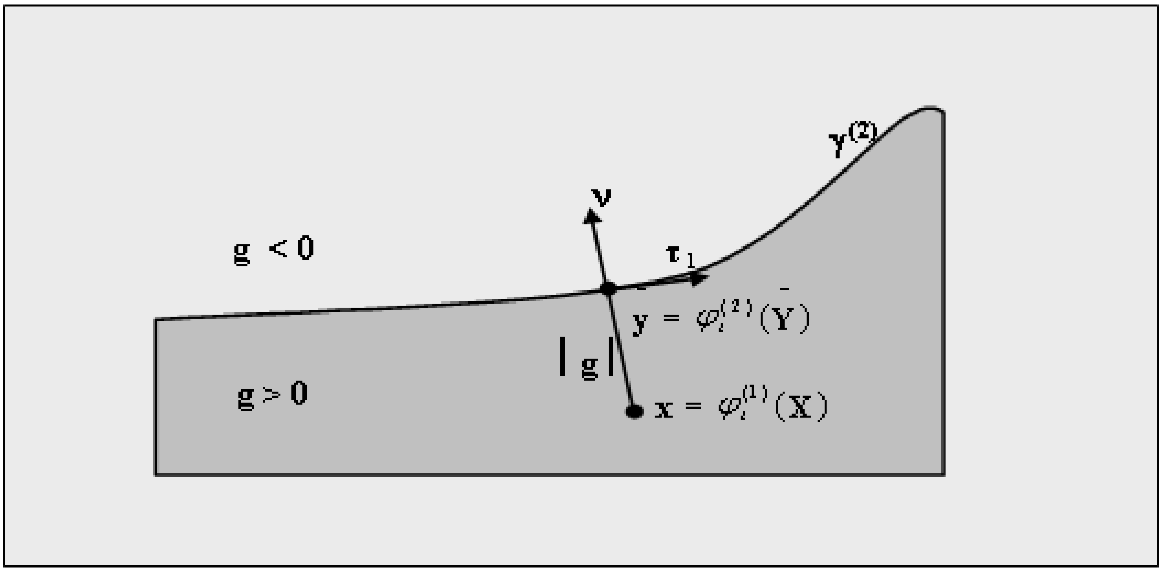


Figura 5.2 – Definição da função de folga (“gap”)

A definição de $g(\mathbf{X},t)$ é dada em termos da projeção do ponto de $\mathbf{x}=\varphi_t^1(\mathbf{X})$ em $\gamma^{(2)}$ (ver Fig. 5-2). A restrição de impenetrabilidade é formulada matematicamente como $g(\mathbf{X},t)\leq 0$. As condições de complementaridade estão associadas à força superficial de contato $\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X},t)=\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X},t).\mathbf{n}_o^{(1)}(\mathbf{X})$, onde $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X},t)$ é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff em $\mathbf{X}$ e $\mathbf{n}_0^{(1)}(\mathbf{X})$ é a normal a $\mathbf{X}$ na configuração de referência. Esta força superficial é dada por:

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X},t)=t_N(\mathbf{X},t)\mathbf{v}+P_\nu\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X},t) \tag{5.2}$$

onde $\mathbf{v}$ (negativa) é a normal externa a $\gamma^{(1)}$ em $\mathbf{x}=\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X})$ e $P_\nu\mathbf{t}^{(1)}$ é a projeção de $\mathbf{t}^{(1)}$ no plano tangente associado. A parcela $t_N(\mathbf{X},t)$, representa a pressão de contato em $\mathbf{X}$. As restrições para contato normal são especificadas como:

$$g(\mathbf{X},t)\leq 0 \tag{5.3a}$$

$$t_N(\mathbf{X},t)\geq 0 \tag{5.3b}$$

$$t_N(\mathbf{X},t)g(\mathbf{X},t)=0 \tag{5.3c}$$

$$t_N(\mathbf{X},t)\dot{g}(\mathbf{X},t)=0 \tag{5.3d}$$

As expressões acima (5.3) representam a restrição de impenetrabilidade, a restrição da força de contato em $\mathbf{X}$ ser sempre não negativa (pressão); a condição de complementaridade que admite que a pressão de contato $t_N(\mathbf{X},t)$ seja diferente de zero somente se a folga (“gap”) for igual a zero ($g = 0$) e a condição de persistência que é usada quando considerado o atrito cinemático.

5.1.3
Contato com atrito

5.1.3.1
Conversão de base

A restrição de impenetrabilidade introduz a idéia da geometria da estrutura influenciar na definição da restrição g. Este fato é utilizado para a definição de uma base tangente associada, conveniente para definir as restrições de atrito

Parametrizações para $\Gamma^{(i)}$ e $\gamma^{(i)}$, $i = 1{,}2$ são adotadas, para o corpo (2) como mostrado na Fig. 5-3. Define-se $A \in \Re^{n-1}$ e uma serie de mapeamentos $\mathbf{\Psi}_t^{(i)}$, indexados pelo tempo t, assim $\Psi_t^{(i)} : A^{(i)} \rightarrow \Re^{n-1}$, $i = 1{,}2$. Em particular, tem-se: $\Gamma^{(i)} = \mathbf{\Psi}_0^{(i)}\left(A^{(i)}\right)$, $\gamma^{(i)} = \mathbf{\Psi}_t^{(i)}\left(A^{(i)}\right)$ e $\mathbf{\Psi}_t^{(i)} = \varphi_t^{(i)} \circ \mathbf{\Psi}_0^{(i)}$. Assume-se que estas parametrizações são suficientemente suaves assim todas as derivadas necessárias podem ser obtidas[48,49,50].

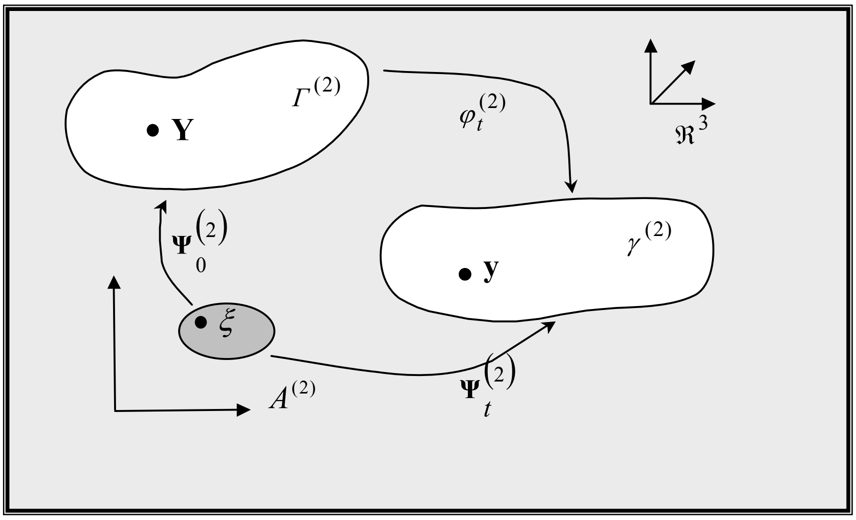


Figura 5.3 – Parametrizações das superfícies de contato $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$

No caso tridimensional, um ponto $\xi \in A^{(2)}$ é dado por $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^1, \xi^2\right)$. Bases para $\boldsymbol{\Gamma}^{(2)}$ e $\gamma^{(2)}$ são convenientemente definidas pelas derivadas parciais em relação a estas variáveis:

$$\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}^{(2)}_{0,\alpha}(\xi) \tag{5.4}$$

$$\mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}^{(2)}_{t,\alpha}(\xi) = \mathbf{F}^{(2)}_t\left(\boldsymbol{\Psi}^{(2)}_0(\boldsymbol{\xi})\right)\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \quad \alpha = 1,2 \tag{5.5}$$

onde $\mathbf{F}^{(2)}_t$ é o gradiente de deformação correspondente a $\varphi^{(2)}$. As expressões da forma $(\cdot)_{,\alpha}$ representam derivadas em relação a ξ^α.

Para qualquer ponto $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ é designado um ponto $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$ que com a minimização obtém-se $\bar{\mathbf{Y}}$. Pontos correspondentes nos domínios espacial (na configuração corrente) e paramétrico são dados por $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ e obtém-se as relações a seguir:

$$\bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Psi}^{(2)}_0\left(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)\right) \tag{5.6}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Psi}^{(2)}_t\left(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)\right) \tag{5.7}$$

A identificação de $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ para um ponto $\mathbf{X}$ depende do movimento de ambos os corpos. Portanto, o objetivo é parametrizar as restrições pelos pontos $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$; a projeção envolvida nesta caracterização é considerada implícita.

5.1.3.2
Particularização das bases

A particularização das bases para o ponto $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ é dada por:

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{E}_\alpha\left(\bar{\boldsymbol{\xi}}\right) \tag{5.8}$$

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha\left(\bar{\boldsymbol{\xi}}\right), \quad \alpha = 1,2 \tag{5.9}$$

Nas equações acima as dependências de $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{t}_\alpha$ em relação a $\mathbf{X}$ e t são omitidas, embora exista a identificação de $\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)$. Os vetores tangentes $\mathbf{T}_\alpha$ e

$\mathbf{t}_\alpha$ de fato descrevem uma base que mostra como o ponto $\mathbf{X}$ se move em relação a $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$. O vetor normal no âmbito espacial é dado por:

$$\mathbf{v} := \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{\left\| \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 \right\|} \tag{5.10}$$

A orientação da superfície $\gamma^{(2)}$ é importante, uma vez que adota-se que as parametrizações ($\mathbf{\Psi}_0^{(2)}$ e $\mathbf{\Psi}_t^{(2)}$) são tais que a expressão da normal é a da normal externa ao corpo (2), como mostrado na Fig. 5-2.

5.1.3.3
Cinemática do atrito

A condição de persistência na resposta de contato, requer que a derivada da folga em relação ao tempo seja igual a zero ($\dot{g} = 0$) quando a força de contato é diferente de zero. Esta condição tem importantes implicações para a cinemática do atrito. Se $\dot{g}(\mathbf{X},t) = 0$, então teremos que a taxa de variação, no tempo, do vetor de posição relativa entre $\mathbf{x} = \varphi^{(1)}(\mathbf{X}, t)$ e $\mathbf{y} = \varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X},t), t\right)$ tem que ser igual a zero; isto é:

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi^{(1)}(\mathbf{X},t) - \varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X},t), t\right)\right] = 0 \tag{5.11}$$

Resolvendo esta derivada no tempo, aplicando a regra da cadeia, obtém-se uma importante expressão da velocidade relativa do material em $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{X},t) - \mathbf{V}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X},t), t\right) = \mathbf{F}_t^{(2)}\left(\mathbf{\Psi}_0^{(2)}\left(\bar{\boldsymbol{\xi}}\right)\right)\frac{d}{dt}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X},t)\right] \tag{5.12}$$

Na expressão acima, o lado esquerdo da equação representa a diferença entre as velocidades do material nos pontos $\mathbf{X}$ e $\bar{\mathbf{Y}}$, e fisicamente representa a razão de deslizamento de $\mathbf{X}$ em relação à superfície adjacente $\gamma^{(2)} = \varphi_t^{(2)}\left(\mathbf{\Gamma}^{(2)}\right)$. O lado direito da equação define a geometria que é muito usada quando definida a evolução das leis de atrito:

$$V_T(\mathbf{X},t) := \frac{d}{dt}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X},t)\right] = \dot{\bar{\boldsymbol{\xi}}}^{\alpha}(\mathbf{X},t)\mathbf{T}_\alpha \tag{5.13}$$

Matematicamente, $V_T(\mathbf{X},t)$ representa a velocidade tangencial relativa. A velocidade tangente relativa não tem componente normal, considerando que foi adotado, como ponto de partida, que a derivada da folga em relação ao tempo é igual a zero ($\dot{g} = 0$).

$$\mathbf{T}^{\beta} \cdot \mathbf{T}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta} \tag{5.14}$$

onde $\mathbf{T}_{\alpha}$ é a base co-variante ou tangente e $\mathbf{T}^{\beta}$ é a base contra-variante. Esta relação é igualmente definida na configuração corrente como: $\mathbf{t}^{\beta}\mathbf{t}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta}$

A métrica também pode ser expressa como:

$$M_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_{\alpha} \cdot \mathbf{T}_{\beta} \tag{5.15}$$

A métrica na configuração corrente é similarmente construída: $m_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_{\alpha} \cdot \mathbf{t}_{\beta}$. A inversa das métricas $M^{\alpha\beta}$ e $m^{\alpha\beta}$ são definidas de maneira similar.

Considerando que a velocidade relativa $\mathbf{V}_T$ pode ser expressa na base dual, na configuração corrente, $\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X},t)$ obtém-se:

$$\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X},t) = M_{\alpha\beta}\, \dot{\bar{\xi}}^{\beta}(\mathbf{X},t)\mathbf{t}^{\alpha} \tag{5.16}$$

A força superficial de atrito também pode ser expressa na base dual:

$$\mathbf{t}_T^b(\mathbf{X},t) := -P_v\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X},t) := t_{T\alpha}(\mathbf{X},t)\mathbf{t}^{\alpha} \tag{5.17}$$

Usando-se estas definições na velocidade de deslizamento e na força superficial, tem-se a formulação de atrito de Coulomb como a seguir:

$$\mathbf{\Phi} := \left\|\mathbf{t}_T^b\right\| - \mu t_N \leq 0 \tag{5.18a}$$

$$\mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\left\|\mathbf{t}_T^b\right\|} = 0 \tag{5.18b}$$

$$\zeta \geq 0 \tag{5.18c}$$

$$\mathbf{\Phi}\zeta = 0 \tag{5.18d}$$

Na formulação de atrito acima, nenhuma distinção é feita entre os coeficientes de atrito estático e cinemático, e não é considerada a evolução do coeficiente de atrito μ, isto é, não são considerados os efeitos de endurecimento (“hardening”) e/ou amolecimento (“softening”).

5.1.4 Método da Penalidade

5.1.4.1 Restrições de regularização

A solução de problemas de contorno sujeitos a restrições tais como as condições de Kuhn-Tucker para o contato normal e as leis de atrito de Coulomb, consiste em encontrar uma solução dentro de um espaço restrito. O uso da formulação fraca destes problemas induz limitações nas variações admissíveis impostas pelas restrições físicas. É possível superar estas limitações através do uso dos Multiplicadores de Lagrange, mas resulta em um aumento das equações e variáveis do problema. O método da Penalidade remove este aumento de graus de liberdade do problema e faz cumprir as restrições de contato de forma aproximada através do emprego do parâmetro da penalidade. A vantagem deste método está na sua simplicidade e fácil implementação em elementos finitos. Além disso, se o parâmetro de penalidade é escolhido adequadamente, resultados bastante satisfatórios são obtidos. A introdução destas técnicas faz com que os algoritmos empregados para a solução de problemas com atrito sejam análogos aos algoritmos para resolver problemas elasto-plásticos.

A penalização das condições de Kuhn-Tucker para contato normal é efetuada através da introdução da *penalidade normal* ε_N através de:

$$t_N = \varepsilon_N \langle g \rangle \tag{5.19}$$

onde $\langle \cdot \rangle$ representa a parte positiva do operando (colchete de Macauley). A penalização torna-se exata quando $\varepsilon_N \to \infty$.

Definindo a *penalidade tangencial* ε_T, a regularização para a resposta do atrito pode ser expressa como a seguir:

$$\mathbf{\Phi} := \left\| \mathbf{t}_T^b \right\| - \mu t_N \leq 0 \tag{5.20a}$$

$$\mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\left\| \mathbf{t}_T^b \right\|} = \frac{1}{\varepsilon_T} L_v \mathbf{t}_T^b \tag{5.20b}$$

$$\zeta \geq 0 \tag{5.20c}$$

$$\mathbf{\Phi} \zeta = 0 \tag{5.20d}$$

onde:

$$L_v \mathbf{t}_T^b := \dot{t}_{T_\alpha}\, \mathbf{t}^\alpha \tag{5.21}$$

A única diferença devida a penalização está na segunda equação, onde no lado direito, o zero foi substituído pela penalização da derivada no tempo (derivada de Lie) $L_v \mathbf{t}_T^b$. A regularização somente torna-se exata quando $\varepsilon_T \to \infty$, no caso que a taxa de deslizamento $\zeta \dfrac{\mathbf{t}_T^b}{\left\|\mathbf{t}_T^b\right\|}$ é forçada a ser igual que à velocidade relativa $\mathbf{v}_T^b$. Estas equações são adequadas para a incorporação no Princípio dos Trabalhos Virtuais e para a posterior implementação no Método dos Elementos Finitos.

5.1.5 Algoritmos para mapeamento de retorno do atrito

Considerando um conjunto de sub-intervalos $U_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$, para resolver um problema de valor de contorno de forma incremental, inicia-se cada passo com um estado t_n conhecido, que integra-se no tempo para se obter o estado t_{n+1}. Existe uma série de algoritmos para resolver estes problemas, sendo que a maioria deles avalia o trabalho virtual interno e de contato em diferentes instantes $t_{n+\alpha}$, onde $\alpha \in [0,1]$. Neste trabalho utiliza-se o algoritmo explícito de Euler, ou seja adota-se $\alpha = 1$. Nesse algoritmo o trabalho virtual de contato e a sua linearização são calculados no instante n+1, sendo que todos os dados em n são conhecidos. Aplicando o algoritmo de Euler diretamente às equações (5.20), e utilizando as expressões (5.16), (5.17) e substituindo nelas os termos: $\dot{\bar{\xi}} = \bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta$ e $\dot{t}_{T_n} = t_{T_{n+1}} - t_{T_n}$, obtém-se:

$$\mathbf{\Phi}_{n+1} := \left\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\right\| - \mu t_{N_{n+1}} \leq 0 \tag{5.22a}$$

$$t_{T_{n+1_\alpha}} = t_{T_{n\alpha}} + \varepsilon_T \left\{ M_{\alpha\beta}\left[\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta\right] - \zeta \frac{t_{T_{n+1_\alpha}}}{\left\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\right\|} \right\} \tag{5.22b}$$

$$\zeta \geq 0 \tag{5.22c}$$

$$\mathbf{\Phi}_{n+1}\zeta = 0 \tag{5.22d}$$

A atualização das tensões (incluindo o atrito) é obtida considerando o gap normal g_{n+1} (necessário para obter $t_{N_{n+1}}$) e o gap tangencial $\bar{\xi}^{\beta}_{n+1} - \bar{\xi}^{\beta}_{n}$. O problema é resolvido pela introdução de um estado preditor e de um mapeamento de retorno, como utilizado em certos algoritmos na integração das equações elasto-plásticas. Inicialmente considera-se um estado preditor:

$$t_{N_{n+1}} = \varepsilon_N \left\langle g_{n+1} \right\rangle \tag{5.23a}$$

$$t^{trial}_{T_{n\alpha}} = t_{T_{n\alpha}} + \varepsilon_N M_{\alpha\beta}\left[\bar{\xi}^{\beta}_{n+1} - \bar{\xi}^{\beta}_{n}\right] \tag{5.23b}$$

$$\mathbf{\Phi}^{trial}_{n+1} := \left\| \mathbf{t}^{b^{trial}}_{T_{n+1}} \right\| - \mu t_{N_{n+1}} \le 0 \tag{5.23c}$$

seguido de uma verificação da condição de deslizamento:

$$t_{T\,n+1_\alpha} = t^{trial}_{T_{n+1_\alpha}} \text{ se } \mathbf{\Phi}^{trial}_{n+1} \le 0 \text{ (aderência)} \tag{5.24a}$$

$$t_{T\,n+1_\alpha} = \mu t_{N_{n+1}} \frac{t^{trial}_{T_{n+1_\alpha}}}{\left\| \mathbf{t}^{b^{trial}}_{T_{n+1}} \right\|}\text{, caso contrário (deslizamento)} \tag{5.24b}$$

As derivadas $\Delta t_{T_{n+1_\alpha}}$ podem ser obtidas das equações (5.23) e (5.24). Para a situação de aderência:

$$\Delta t_{T_{n+1_\alpha}} = \Delta t^{trial}_{T_{n+1_\alpha}} := \varepsilon_T \left[M_{\alpha\beta}\Delta\bar{\xi}^{\beta} + M_{\alpha\beta,\gamma}\Delta\bar{\xi}^{\gamma}\left(\bar{\xi}^{\beta}_{n+1} - \bar{\xi}^{\beta}_{n}\right)\right] \tag{5.25a}$$

De forma semelhante, para o caso de deslizamento:

$$\Delta t_{T_{n+1_\alpha}} = \mu\varepsilon_N H(g)\, p_{T_\alpha}\Delta g + \frac{\mu t_{N_{n+1}}}{\left\| \mathbf{t}^{b^{trial}}_{T_{n+1}} \right\|}\Delta t_{T_{n+1_\beta}}\left[\delta^{\beta}_{\alpha} - p^{\beta}_{T}\, p_{T_\alpha}\right] + \mu t_{N_{n+1}} \mathbf{p}_T \cdot \left[\mathbf{u}^{(2)^h}_{,\beta}\left(\bar{\xi}\right) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}\left(\bar{\xi}\right)\Delta\bar{\xi}^{\gamma}\right] p^{\beta}_{T} P_{T_\alpha} \tag{5.25b}$$

onde: $p_T = \dfrac{t^{b^{trial}}_{T_{n+1_\alpha}}}{\left\| \mathbf{t}^{b^{trial}}_{T_{n+1}} \right\|}$. As não-linearidades ainda presentes após a operação de linearização do trabalho virtual estão associadas ao termo: $\Delta t_{T_{n+1_\alpha}}\, \delta\bar{\xi}^{\alpha}$ (rigidez direta do atrito).

5.1.6 Formulação Variacional do Problema de Contato

Usando as notações da seção 5.1.1, as equações de equilíbrio e as condições de contorno, para cada corpo e considerando uma resposta quase-estática, são dadas a seguir:

$$DIV\mathbf{P}_t^{(i)} + \mathbf{f}_t^{(i)} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbf{\Omega}^{(i)} \tag{5.26a}$$

$$\mathbf{P}_t^{(i)}\mathbf{n}_0^{(i)} = \bar{\mathbf{t}}_t^{(i)} \quad \text{em} \quad \mathbf{\Gamma}_\sigma^{(i)} \tag{5.26b}$$

$$\varphi_t^{(i)} = \bar{\varphi}_t^{(i)} \quad \text{em} \quad \mathbf{\Gamma}_\varphi^{(i)} \tag{5.26c}$$

onde: $\mathbf{P}_t^{(i)}$ o primeiro tensor de tensão Piola-Kirchhoff no corpo (i), no tempo t; $\mathbf{f}_t^{(i)}$ a força prescrita no corpo (i), no tempo t; $\mathbf{n}_0^{(i)}$ a normal externa na configuração de referência, para o corpo (i); $\mathbf{\Gamma}_\sigma^{(i)}$ e $\mathbf{\Gamma}_\varphi^{(i)}$ são as partes do contorno do corpo (i) $\partial\mathbf{\Omega}^{(i)}$ onde a força superficial ($\bar{t}_t^{(i)}$) e o deslocamento ($\bar{\varphi}_t^{(i)}$) são prescritos. O termo t subscrito é associado a configuração $\varphi_t^{(i)}$ no intervalo de tempo $t = [0, T]$. O termo $\mathbf{P}^{(i)}$ pode ser governado por leis constitutivas elásticas ou inelásticas.

Na formulação fraca das equações globais consideram-se as funções $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)} \in U^{(i)}$ para cada corpo (i), onde $U^{(i)}$ são todas as variações admissíveis $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)} : \Omega^{(i)} \rightarrow \Re^3$ que satisfazem a condição $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)} = 0$ em $\Gamma_\varphi^{(i)}$. Na linearização das variações de g e $\bar{\xi}$ em $\mathbf{X} \in \mathbf{\Gamma}^{(1)}$ são considerados os campos perturbados dados a seguir:

$$\varphi_\varepsilon^{(1)} = \varphi^{(1)} + \varepsilon\overset{*}{\varphi}{}^{(1)} \tag{5.27a}$$

$$\varphi_\varepsilon^{(2)} = \varphi^{(2)} + \varepsilon\overset{*}{\varphi}{}^{(2)} \tag{5.27b}$$

Assim, para um dado $\beta\left(\mathbf{X}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right)$, para todos os pontos $\mathbf{X} \in \mathbf{\Gamma}^{(1)}$, a sua variação linearizada $\delta\beta\left(\mathbf{X}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right)$, usando a definição da derivada direcional, é:

$$\delta\beta\left(\mathbf{X}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right) = \frac{d}{d\varepsilon}\delta\beta\left(\mathbf{X}_\varepsilon^{(1)}, \varphi_\varepsilon^{(1)}\right) \quad \text{para} \quad \varepsilon = 0 \tag{5.28}$$

logo, a variação de g :

$$\delta g = \delta\left\{-\left[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right]\cdot \mathbf{v}\right\}$$

$$= \delta\left\{\left\|\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right\| sign(g)\right\}$$

$$= \frac{sign(g)}{|g|}\left[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}\right)\right]\cdot\left[\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right) - \boldsymbol{\tau}_{\alpha}\delta\bar{\xi}^{\alpha}\right]$$

$$\delta g = -\mathbf{v}\cdot\left[\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right] \tag{5.29}$$

O termo que contém $\delta\bar{\xi}^{\alpha}$ desaparece devido à ortogonalidade existente entre a normal $\mathbf{v}$ e os vetores tangentes $\boldsymbol{\tau}^{\alpha}$. É conveniente ressaltar que qualquer termo baseado em $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$, tal como $\varphi_t^{(2)}$, inclui de forma implícita $\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X})$, tornando-se necessário considerar a sua variação. A coordenada paramétrica $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ não pode ser expressa em função das deformações, assim o cálculo da sua variação $\delta\bar{\xi}^{\alpha}$ é feito de forma implícita como indicado a seguir:

$$\left[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right]\cdot\boldsymbol{\tau}_{\alpha} = 0 \tag{5.30}$$

A expressão (5.30) garante que $\varphi^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)$ é a projeção de $\varphi^{(1)}(\mathbf{X})$ em $\gamma^{(2)}$, e a sua variação linerizada é dada por:

$$0 = \left\{\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right) - \boldsymbol{\tau}_{\gamma}\delta\bar{\xi}^{\gamma}\right\}\boldsymbol{\tau}_{\alpha} - g\mathbf{v}\left\{\overset{*}{\varphi}{}^{2}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\delta\bar{\xi}^{\beta}\right\} \tag{5.31}$$

ou

$$A_{\alpha\beta}\delta\bar{\xi}^{\gamma} = \left\{\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right\}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\alpha} - g\mathbf{v}\cdot\left\{\overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right\} \tag{5.32}$$

onde:

$$A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + g\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \tag{5.33}$$

A simplificação da variação $\delta\bar{\xi}^{\beta}$ para o caso de $g = 0$ é dada a seguir:

$$\delta \bar{\xi}^{\beta} = \boldsymbol{\tau}^{\beta} \cdot \left\{ \overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right) \right\} \tag{5.34}$$

5.1.6.1
Trabalho Virtual de Contato

Multiplicando a equação de equilíbrio (5.26a) por $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)} \in U^{(i)}$, integrando em $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$ e aplicando a integração por partes obtém-se:

$$G^{(i)}(\varphi_t^{(i)}, \overset{*}{\varphi}{}^{(i)}) := \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{P}_t^{(i)} \cdot GRAD\left[\overset{*}{\varphi}{}^{(i)} \right] d\Omega^{(i)} - \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{f}_t^{(i)} \cdot \overset{*}{\varphi}{}^{(i)}\, d\Omega^{(i)} - \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \mathbf{t}^{\bar{(i)}} \cdot \overset{*}{\varphi}{}^{(i)}\, d\Gamma_\sigma^{(i)} \tag{5.35a}$$

$$= \int_{\Gamma^{(i)}} \mathbf{t}_t^{\bar{(i)}} \cdot \overset{*}{\varphi}{}^{(i)}\, d\Gamma^{(i)} \tag{5.35b}$$

A equação acima tem que ser satisfeita por cada corpo durante todo o tempo t. O termo $G^{(i)}(\varphi_t^{(i)}, \overset{*}{\varphi}{}^{(i)})$ representa a soma do trabalho virtual interno e o trabalho virtual das forças aplicadas no corpo (i), assim:

$$G\left(\varphi_t, \overset{*}{\varphi} \right) := G^{(1)}(\varphi_t^{(1)}, \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}) + G^{(2)}(\varphi_t^{(2)}, \overset{*}{\varphi}{}^{(2)})$$

$$= \int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{t}_t^{\bar{(1)}} \cdot \overset{*}{\varphi}{}^{(1)}\, d\Gamma^{(1)} + \int_{\Gamma^{(2)}} \mathbf{t}_t^{\bar{(2)}} \cdot \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\, d\Gamma^{(2)} \tag{5.36}$$

onde φ_t abrange os mapeamentos de ambos os corpos $\varphi_t^{(1)}$ e $\varphi_t^{(2)}$. Idem para $\overset{*}{\varphi}$.

O lado direito da expressão (5.36) representa o trabalho virtual referente ao contato, que pode ser representado numa única integral no contorno $\Gamma^{(1)}$. Para cada ponto $\mathbf{X} \in \boldsymbol{\Gamma}^{(1)}$, torna-se necessário que a força de contato induzida no corpo (2) em $\bar{\mathbf{Y}}$ seja igual mas com sentido oposto daquela produzida no corpo (1) em $\mathbf{X}$; sendo assim, tem-se:

$$\mathbf{t}_t^{(2)}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right] d\Gamma^{(2)} = -\mathbf{t}_t^{(1)}(\mathbf{X}) d\Gamma^{(1)} \tag{5.37}$$

Adota-se que para um dado instante, em todas as áreas em que ocorre contato, $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ é considerado ser indexado por $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ pela identificação dos pontos $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \in \mathbf{\Gamma}^{(2)}$. Substituindo (5.34) em (5.36), teremos a contribuição do contato, numa única integral em $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$:

$$G(\varphi_{t,} \overset{*}{\varphi}) + G_c(\varphi_{t,} \overset{*}{\varphi}) = 0 \tag{5.38}$$

$$G_c(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) = -\int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{t}_t^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \left\{ \overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right]\right\} d\Gamma^{(1)} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned} G_c(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) &= -\int_{\Gamma^{(1)}} \left[t_N \mathbf{v} - t_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha\right] \cdot \left[\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right] d\Gamma^{(1)} \\ &= \int_{\Gamma^{(1)}} \left[t_{N_t} \delta g - t_{T\alpha_t} \delta \bar{\xi}^\alpha \right] d\Gamma^{(1)} \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde as forças superficiais de contato são dadas nas equações (5.19) e (5.20). Esta formulação do trabalho virtual de contato é obtida diretamente da forma forte das equações, isto é possível devido à estrutura geométrica das restrições de contato.

Na determinação de (5.40), foi utilizada (5.34) em lugar de (5.32) para definir $\bar{\xi}^\alpha$. Considerando a solução, (5.38) tem que satisfazer as restrições de contato, a folga g tem que ser igual a zero em todos os pontos onde o integrando de (4.40) é diferente de zero.

5.1.6.2 Linearização do Trabalho Virtual de Contato

A solução implícita da equação não-linear (5.38) requer a linearização das equações governantes. A linearização do trabalho virtual de contato G_c, pode ser obtida no contínuo, somente com a parcela da rigidez do atrito, baseada em algoritmos para a obtenção das forças superficiais de contato.

Assim como a primeira linearização (direcionada para $\overset{*}{\varphi}$) de $\beta(\mathbf{X};\varphi)$ foi definida como $\delta\beta(\mathbf{X};\varphi)$ assim a segunda derivada (direcionada para $\mathbf{u}$) é definida como $\Delta\beta(\mathbf{X};\varphi)$. O cálculo da derivada de (5.40) torna-se fácil, devido ao fato que a integral é computada na configuração de referência. Somente o integrando varia com o movimento. Analisando os termos do contato normal, a derivada direcional de t_N é dada por:

$$\Delta t_N = \Delta\{\varepsilon_N \langle g \rangle\}$$

$$= \varepsilon_N \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial g} \Delta g$$

$$\Delta t_N = H(g)\varepsilon_N \Delta g \qquad (5.41)$$

onde $H(g)$, é a função Heaviside: $H(g) = 1$ se $g > 0$ ou $H(g) = 0$ se $g < 0$; a derivada não é definida quando $g = 0$. A expressão para Δg é dada por:

$$\Delta g = -\mathbf{v} \cdot \left[\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\mathbf{u}}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right) \right] \text{e } \Delta(\delta g):$$

$$\Delta(\delta g) = g\mathbf{v} \cdot \left\{ \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\gamma}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right] + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\delta\bar{\xi}^{\alpha} \right\} m^{\gamma\beta} \mathbf{v} \cdot \left\{ \mathbf{u}^{(2)}_{,\beta}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right] + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\Delta\bar{\xi}^{\alpha} \right\} + \delta\bar{\xi}^{\beta}\, \mathbf{v} \cdot \left\{ \mathbf{u}^{(2)}_{,\beta}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right] \right\}$$

$$+ \Delta\bar{\xi}^{\beta} \cdot \left\{ \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\beta}\left[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right] \right\} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\delta\bar{\xi}^{\beta}\, \Delta\bar{\xi}^{\alpha} \qquad (5.42)$$

onde $\Delta\bar{\xi}^{\beta}$ é obtida da expressão:

$$A_{\alpha\beta}\Delta\bar{\xi}^{\gamma} = \left\{ \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha} - g\mathbf{v} \cdot \left\{ \mathbf{u}^{(2)}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right) \right\}$$ onde $A_{\alpha\beta}$ é dada por (5.33). Portanto, a expressão para $\Delta(t_N \delta g)$:

$$\Delta(t_N \delta g) = \Delta(t_N)\delta g + t_N \Delta(\delta g) \qquad (5.43)$$

Na linearização dos termos de contato com atrito, o cálculo de Δt_T, vai depender do algoritmo usado para integrar as equações (5.20). A contribuição permanente (geométrica) da linearização do atrito é dada pelo termo $\Delta\left(\delta\bar{\xi}^{\alpha} \right)$, calculado de forma implícita, através da derivada direcional:

$$A_{\alpha\beta}\Delta\left(\delta\bar{\xi}^{\beta} \right) = -\boldsymbol{\tau}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\beta}\left(\bar{\mathbf{Y}} \right)\Delta\bar{\xi}^{\alpha} - \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}^{(2)}_{,\beta}\left(\bar{\mathbf{Y}} \right)\delta\bar{\xi}^{\alpha} - \left[\mathbf{t}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta,\gamma}\left(\bar{\boldsymbol{\xi}} \right) + g\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}\left(\bar{\boldsymbol{\xi}} \right)\delta\bar{\xi}^{\beta}\, \Delta\bar{\xi}^{\gamma} \right]$$

$$-\delta\bar{\xi}^{\beta}\, \mathbf{t}_{\beta} \cdot \left[\mathbf{u}^{(2)}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}\left(\bar{\boldsymbol{\xi}} \right)\Delta\bar{\xi}^{\gamma} \right] - \Delta\bar{\xi}^{\beta}\, \mathbf{t}_{\beta} \cdot \left[\overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \right) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}\left(\bar{\boldsymbol{\xi}} \right)\delta\bar{\xi}^{\gamma} \right]$$

$$-g\mathbf{v}\cdot\left[\overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\alpha\beta}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\Delta\bar{\xi}^{\beta}-\cdot\mathbf{u}^{(2)}_{,\alpha\beta}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\delta\bar{\xi}^{\alpha}\right]+\left[\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(\mathbf{X})-\overset{*}{\varphi}{}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)\right]\cdot\left[\mathbf{u}^{(2)}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)+\mathbf{e}_{\alpha,\gamma}\left(\bar{\xi}\right)\Delta\bar{\xi}^{\gamma}\right]$$
$$+\left[\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X})-\mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\right]\cdot\left[\overset{*}{\varphi}{}^{(2)}_{,\alpha}\left(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})\right)+\mathbf{e}_{\alpha,\gamma}\left(\bar{\xi}\right)\delta\bar{\xi}^{\gamma}\right] \quad (5.44)$$

onde $A_{\alpha\beta}$ é dado pela expressão (5.33). Pode-se verificar que a equação (5.44) é também simétrica em relação a $\overset{*}{\varphi}$ e $\mathbf{u}$. Portanto, a linearização do trabalho virtual de contato devido ao atrito é:

$$\Delta G_c\left(\varphi_t,\overset{*}{\varphi}\right)=\Delta\left\{\int_{\Gamma^{(1)}}\left[t_N\delta g+t_{T_\alpha}\delta\bar{\xi}^{\alpha}\right]d\Gamma^{(1)}\right\}$$
$$=\int_{\Gamma^{(1)}}\left[\Delta\left(t_N\delta g\right)+\Delta t_{T_\alpha}\delta\bar{\xi}^{\alpha}+t_{T_\alpha}\Delta\left(\delta\bar{\xi}^{\alpha}\right)\right]d\Gamma^{(1)} \quad (5.45)$$

a não-simetria da linearização do PTV referente ao atrito provém do termo $\Delta t_{T_\alpha}\delta\bar{\xi}^{\alpha}$.

5.2 Implementação da Formulação em Elementos Finitos: Método da Penalidade

Na discretização em elementos finitos são utilizados $\varphi^{(i)^h}$ e $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)^h}$ em contrapartida a $\varphi^{(i)}$ e $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)}$. Os mapeamentos $\varphi^{(i)^h}$ e $\overset{*}{\varphi}{}^{(i)^h}$ são um conjunto de mapeamentos locais, definidos sobre a superfície de cada elemento, $\varphi_e^{(1)^h}(\boldsymbol{\eta})$ com $\boldsymbol{\eta}\in A_e^{(1)^h}$, cuja expressão é dada a seguir.

$$\varphi_e^{(1)^h}(\boldsymbol{\eta})=\sum_{a=1}^{n_e}N^a(\boldsymbol{\eta})\varphi_a^{(1)} \quad (5.46)$$

onde $\varphi^1_{(a)}$ é o valor nodal de $\varphi^{(1)^h}$, e n_e é o número de nós em cada superfície do elemento. $N^a(\boldsymbol{\eta})$, representa a função de forma isoparamétrica padrão. Da mesma forma é feita a interpolação de $\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}$. Usando o esquema de interpolação isoparamétrica, pode-se obter também:

$$\mathbf{X}_e^h(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{a=1}^{n_e} N^a(\boldsymbol{\eta})\mathbf{X}_a \tag{5.47}$$

Da forma análoga a (5.46) e (5.47) pode ser obtida para o corpo (2).

Assim, o trabalho virtual de contato na forma discretizada pode ser expresso como a seguir:

$$G_c\left(\varphi_t^h, \overset{*}{\varphi}^h\right) = \int_{\Gamma^{(i)^h}} \left[t_{N_t}^h \delta g^h + t_T^h \delta \xi^{\bar{\alpha}^h} \right] d\Gamma^{(1)^h} \tag{5.48}$$

A equação (5.48) pode ser escrita como um somatório das integrais nas superfícies dos n_{el} elementos em $\Gamma^{(1)^h}$:

$$G_c\left(\varphi_t^h, \overset{*}{\varphi}^h\right) = \sum_{j=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{ej}^{(1)^h}} \left[t_N^h \delta g^h + t_T^h \delta \xi^{\bar{\alpha}^h} \right] d\Gamma_{ej}^{(1)^h} \tag{5.49}$$

onde cada sub-integral acima é avaliada usando uma quadratura adequada. Assim, aplicando a regra de quadratura e realizando a mudança de variáveis para o domínio padrão (parametrização: $A_e^{(1)^h}$) obtém-se:

$$\begin{aligned} G_c\left(\varphi^h, \overset{*}{\varphi}^h\right) &\approx \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{\text{int}}} W^k j\left(\boldsymbol{\eta}^k\right) \left[t_N^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right) \delta g^h(\boldsymbol{\eta}^k) + t_{T_\alpha}^h(\boldsymbol{\eta}^k) \delta \xi^{\bar{\alpha}^h}(\boldsymbol{\eta}^k) \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{\text{int}}} W^k j\left(\boldsymbol{\eta}^k\right) \delta\boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot \mathbf{R}_c^k \right\} \end{aligned} \tag{5.50}$$

onde n_{int} é o número de pontos de integração para a superfície de cada elemento de $\Gamma^{(1)^h}$, que depende da regra de quadratura usada; W^k é o peso da quadratura correspondente ao ponto local da quadratura k; $j\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)$ é o jacobiano da transformação em relação ao domínio de referência; $\delta\boldsymbol{\Phi}_c^k$ é o vetor das variações nodais correspondente ao ponto k da quadratura e $\mathbf{R}_c^k$ é o vetor residual para o ponto k da quadratura. Os termos $\delta g^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)$ e $\delta \xi^{\bar{\alpha}^h}\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)$ são obtidos usando as expressões (5.29) e (5.34), com seus correspondentes campos discretos.

Através da linearização de (5.50) obtém-se a rigidez de contato necessária para a solução de (5.38) pelo método de Newton-Raphson. Esta linearização se obtém através da aplicação da quadratura a (5.45), isto porque a definição de G_c envolve uma integral na configuração de referência, assim tem-se:

$$\Delta G_c\left(\varphi^h, \overset{*}{\varphi}{}^h\right) \approx \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{int}}} W^k j\left(\boldsymbol{\eta}^k\right) \left[\Delta\left[t_N^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\delta g^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\right] + \Delta t_{T_\alpha}^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\delta\bar{\xi}^{\alpha^h}\left(\boldsymbol{\eta}^k\right) + t_{T_\alpha}^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\Delta\left[\delta\bar{\xi}^{\alpha^h}\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\right]\right]\right\}$$

$$\Delta G_c\left(\varphi^h, \overset{*}{\varphi}{}^h\right) = \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{int}}} W^k j\left(\boldsymbol{\eta}^k\right) \delta\boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot \mathbf{K}_c^k \Delta\boldsymbol{\Phi}_c^k \right\} \tag{5.51}$$

onde: $\mathbf{K}_c^k$ é matriz de rigidez de contato; os termos $\Delta\left[t_N^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\delta g^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\right]$e $\Delta\left[\delta\bar{\xi}^{\alpha^h}\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)\right]$ são dados por (5.43) e (5.44), com suas respectivos componentes discretos. O vetor $\Delta\boldsymbol{\Phi}_c^k$ contém os valores nodais de $\mathbf{u}^h$, que é a representação em elementos finitos de $\mathbf{u}$. O termo $\Delta t_T^h\left(\boldsymbol{\eta}^k\right)$ é obtido pelo algoritmo de retorno.

Adota-se a quadratura nodal para definir (5.50) e (5.51), e o elemento sólido híbrido Enhanced Assumed Strain – EAS (Roehl & Ramm, 1996) de oito (8) nós (BRICK8-E3) é usado para a discretização em elementos finitos. Devido ao fato que a contribuição total de contato é a soma das contribuições individuais de cada ponto da quadratura, enfoca-se a um ponto da quadratura a definição da matriz de rigidez $\mathbf{K}_c$ e do vetor residual $\mathbf{R}_c$.

A posição corrente do ponto da quadratura (escravo) é definido como sendo $\mathbf{x}$ e a superfície mestre contém a sua projeção $\bar{\mathbf{y}}$ em $\gamma^{(2)^h}$ definido no elemento como $\gamma_e^{(2)^h}$. Adota-se que $\bar{\mathbf{y}}$ encontra-se no interior contínuo da superfície do elemento $\gamma_e^{(2)^h}$ (ver Fig. 5-4).

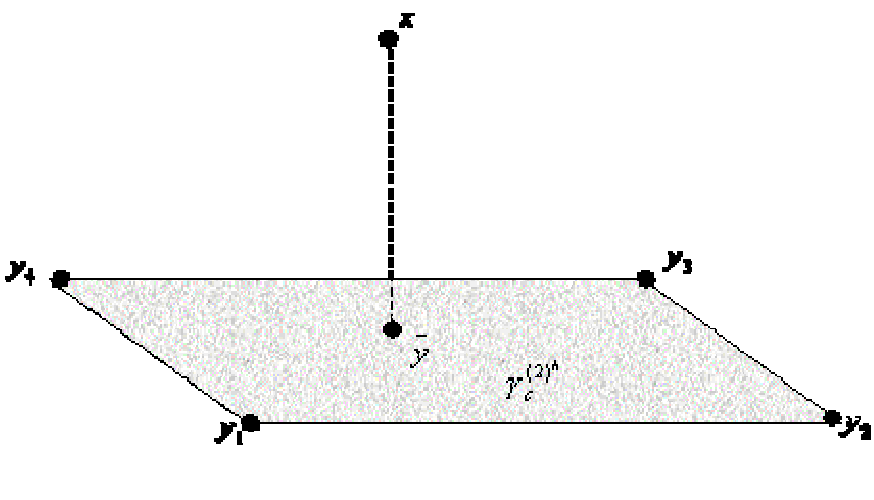


Figura 5.4 – Definição do ponto escravo e da superfície mestre em 3D

Considerando que a quadratura nodal está sendo usada, o ponto de quadratura escravo é de fato o nó escravo. Assim, $\delta\mathbf{\Phi}$ é vetor que contém as variações deste nó escravo ($\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X})$) e as variações dos nós da superfície mestre em $\gamma_e^{(2)^h}$ ($\overset{*}{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}), a = 1-4$). Logo, os vetores das variações são dados a seguir:

$$\delta\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) \\ \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}_1) \\ \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}_2) \\ \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}_3) \\ \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}_4) \end{bmatrix} \qquad \Delta\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{Y}_1) \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{Y}_2) \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{Y}_3) \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{Y}_4) \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

A seguir são definidos os vetores que são usados nas expressões da matriz de rigidez e do vetor residual para o contato com atrito:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -N_1(\bar{\xi})\mathbf{v} \\ -N_2(\bar{\xi})\mathbf{v} \\ -N_3(\bar{\xi})\mathbf{v} \\ -N_4(\bar{\xi})\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_1(\bar{\xi})\boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_2(\bar{\xi})\boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_3(\bar{\xi})\boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_4(\bar{\xi})\boldsymbol{\tau}_\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi})\mathbf{v} \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi})\mathbf{v} \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi})\mathbf{v} \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi})\mathbf{v} \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

onde $\alpha = 1{,}2$ para as definições de $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{N}_\alpha$; $N_a, a = 1{,}4$, representa as funções de forma isoparamétricas que definem a superfície mestre ($\gamma_e^{(2)^h}$). Os vetores definidos a seguir dependem das definições acima (5.53):

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{\det[\mathbf{A}]}\left[A_{22}(\mathbf{T}_1 + g\mathbf{N}_1) - A_{12}(\mathbf{T}_2 + g\mathbf{N}_2)\right] \tag{5.54a}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{\det[\mathbf{A}]}\left[A_{11}(\mathbf{T}_2 + g\mathbf{N}_2) - A_{12}(\mathbf{T}_1 + g\mathbf{N}_1)\right] \tag{5.54b}$$

$$\bar{\mathbf{N}}_1 = \mathbf{N}_1 - (\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi})\cdot\mathbf{v})\mathbf{D}_2 \tag{5.54c}$$

$$\bar{\mathbf{N}}_2 = \mathbf{N}_2 - (\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi})\cdot\mathbf{v})\mathbf{D}_1 \tag{5.54d}$$

E a matriz $\mathbf{A}$ é dada em (5.33). Comparando os vetores acima com a expressão (5.50) torna-se fácil obter a expressão para $\mathbf{R}_c$:

$$\mathbf{R}_c = t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}_1 + t_{T_2} \mathbf{D}_2 \tag{5.55}$$

onde as equações para t_N e t_{T_α} são dadas por (5.23) e (5.24). A rigidez de contato é decomposta em uma parcela de rigidez normal e outra de rigidez tangencial:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{c_N} + \mathbf{K}_{c_T} \tag{5.56}$$

onde as expressões para $\mathbf{K}_{c_N}$ e $\mathbf{K}_{c_t}$ são extraídas de (5.51), (5.43), (5.44) e (5.25). Assim, a rigidez normal é:

$$K_{c_N} = \varepsilon_N H(g)\mathbf{N}\mathbf{N}^T + t_N \left\{ g \left[m^{11} \bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_1^T + m^{12} \left(\bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_2^T + \bar{\mathbf{N}}_2 \bar{\mathbf{N}}_1^T \right) + m^{22} \bar{\mathbf{N}}_2 \bar{\mathbf{N}}_2^T \right] \right\}$$

$$+ t_N \left\{ -\mathbf{D}_1\mathbf{N}_1^T - \mathbf{D}_2\mathbf{N}_2^T - \mathbf{N}_1\mathbf{D}_1^T - \mathbf{N}_2\mathbf{D}_2^T + \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{v} \right)\left(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^T \right) \right\} \tag{5.57}$$

Para se obter a rigidez tangencial torna-se necessário definir também os termos a seguir:

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_{2,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_{3,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{\tau}_\alpha \\ -N_{4,\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{\tau}_\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{v} \\ -N_{2,\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{v} \\ -N_{3,\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{v} \\ -N_{4,\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{p}_T \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{p}_T \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{p}_T \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\boldsymbol{\xi}})\mathbf{p}_T \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

onde $\alpha, \beta = 1,2$ e $p_T = \dfrac{t^{b^{trial}}_{T_{n+1\alpha}}}{\left\| \mathbf{t}^{b^{trial}}_{T_{n+1}} \right\|}$., discutido no *item* (5.5). Neste caso, onde a superfície mestre é definida por funções de interpolação bi-linear, os termos $\mathbf{N}_{11}$ e $\mathbf{N}_{22}$ são iguais a zero. Baseado nisto definem-se os termos a seguir:

$$\bar{\mathbf{T}}_{\alpha 1} = \mathbf{T}_{\alpha 1} - \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \right)\mathbf{D}_2 \tag{5.59a}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\alpha 2} = \mathbf{T}_{\alpha 2} - \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \right)\mathbf{D}_1 \tag{5.59b}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_1 - \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi}) \cdot \mathbf{p}_T \right)\mathbf{D}_2 \tag{5.59c}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_2 - \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi}) \cdot \mathbf{p}_T \right)\mathbf{D}_1 \tag{5.59d}$$

logo, teremos a expressão de $\mathbf{K}_{c_T}$:

$$\mathbf{K}_{c_T} = \mathbf{K}_{c_T}^{direta} + \left[t_{T_1} A^{11} + t_{T_2} A^{12}\right]\mathbf{K}_{c_{T1}} + \left[t_{T_1} A^{12} + t_{T_2} A^{22}\right]\mathbf{K}_{c_{T2}} \tag{5.60}$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{c_{T1}} = {} & \mathbf{T}_{11}\mathbf{D}_1^T + \mathbf{T}_{12}\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_1\mathbf{T}_{11}^T + \mathbf{D}_2\mathbf{T}_{12}^T - \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi})\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right)\left(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^T\right) \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{11}\mathbf{D}_1^T + \bar{\mathbf{T}}_{21}\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_1\bar{\mathbf{T}}_{11}^T + \mathbf{D}_2\bar{\mathbf{T}}_{21}^T + g\left(\mathbf{N}_{12}\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2\mathbf{N}_{12}^T\right) \\ & - \mathbf{N}\bar{\mathbf{N}}_1^T - \mathbf{T}_1\left(m^{11}\bar{\mathbf{T}}_{11} + m^{12}\bar{\mathbf{T}}_{21}\right)^T - \mathbf{T}_2\left(m^{21}\bar{\mathbf{T}}_{11} + m^{22}\bar{\mathbf{T}}_{21}\right)^T \\ & - \bar{\mathbf{N}}_1^T\mathbf{N} - \left(m^{11}\bar{\mathbf{T}}_{11} + m^{12}\bar{\mathbf{T}}_{21}\right)\mathbf{T}_1^T - \left(m^{21}\bar{\mathbf{T}}_{11} + m^{22}\bar{\mathbf{T}}_{21}\right)\mathbf{T}_2^T\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{c_{T2}} = {} & \mathbf{T}_{21}\mathbf{D}_1^T + \mathbf{T}_{22}\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_1\mathbf{T}_{21}^T + \mathbf{D}_2\mathbf{T}_{22}^T - \left(\mathbf{e}_{1,2}(\bar{\xi})\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)\left(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^T\right) \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{12}\mathbf{D}_1^T + \bar{\mathbf{T}}_{22}\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_1\bar{\mathbf{T}}_{12}^T + \mathbf{D}_2\bar{\mathbf{T}}_{22}^T + g\left(\mathbf{N}_{21}\mathbf{D}_1^T + \mathbf{D}_1\mathbf{N}_{21}^T\right) \\ & - \mathbf{N}\bar{\mathbf{N}}_2^T - \mathbf{T}_1\left(m^{11}\bar{\mathbf{T}}_{12} + m^{12}\bar{\mathbf{T}}_{22}\right)^T - \mathbf{T}_2\left(m^{21}\bar{\mathbf{T}}_{12} + m^{22}\bar{\mathbf{T}}_{22}\right)^T \\ & - \bar{\mathbf{N}}_2^T\mathbf{N} - \left(m^{11}\bar{\mathbf{T}}_{12} + m^{12}\bar{\mathbf{T}}_{22}\right)\mathbf{T}_1^T - \left(m^{21}\bar{\mathbf{T}}_{12} + m^{22}\bar{\mathbf{T}}_{22}\right)\mathbf{T}_2^T\end{aligned} \tag{5.62}$$

A parcela $\mathbf{K}_{c_T}^{direta}$ depende se prevalece a aderência ou o deslizamento.

Para o caso com aderência:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{c_T}^{direta} = {} & \varepsilon_T\left[M_{11}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^T + M_{12}\left(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^T\right) + M_{22}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2^T + k_1 g_T^2\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^T + \left(2k_1 g_T^1 + k_2 g_T^2\right)\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^T\right] \\ & + \varepsilon_T\left[\left(2k_2 g_T^2 + k_1 g_T^1\right)\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^T + k_2 g_T^1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2^T\right]\end{aligned} \tag{5.63}$$

onde: $g_T^\alpha = \bar{\xi}_{n+1}^\alpha - \bar{\xi}_n^\alpha$ e $k_\alpha = \mathbf{E}_{1,2}(\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{T}_\alpha$

Para o caso com deslizamento:

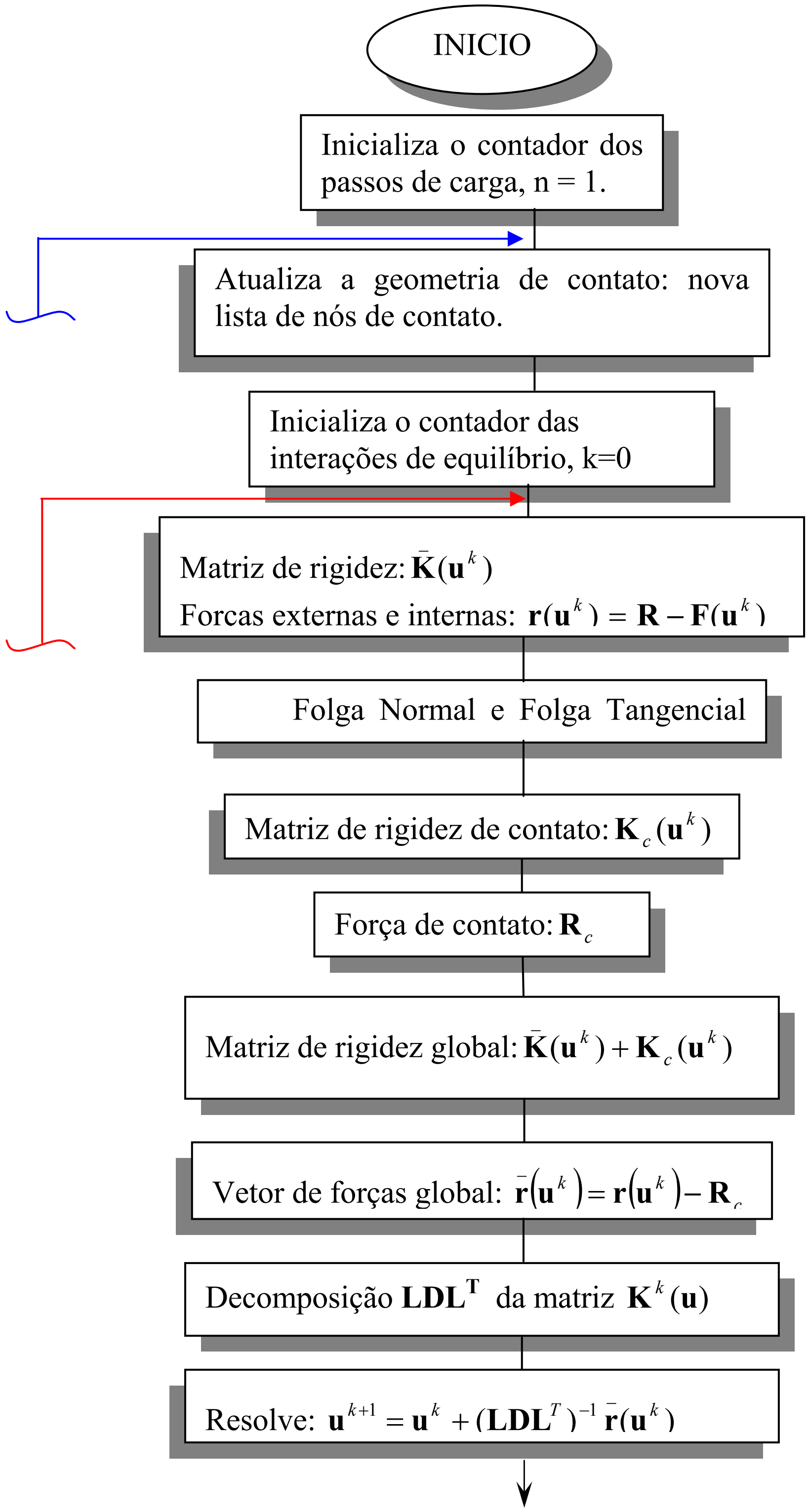
$$\mathbf{K}_{c_T}^{direta} = \mu\varepsilon_N H(g)\left[p_{T1}\mathbf{D}_1 + p_{T2}\mathbf{D}_2\right]\mathbf{N}^T$$

$$+ \frac{\varepsilon_T \mu t_N}{\left\|\boldsymbol{\tau}_T^{trial}\right\|}\left\{\left[\left(1 - p_T^1 p_{T_1}\right)\left(M_{11} + k_1 g_T^2\right) - p_T^2 p_{T_1}\left(M_{12} + 2k_2 g_T^2 + k_1 g_T^1\right)\right]\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^T\right\}$$

$$+ \frac{\varepsilon_T \mu t_N}{\left\|\boldsymbol{\tau}_T^{trial}\right\|}\left\{\left[\left(1 - p_T^2 p_{T_2}\right)\left(M_{12} + 2k_2 g_T^2 + k_1 g_T^1\right) - p_T^1 p_{T_2}\left(M_{11} + k_1 g_T^2\right)\right]\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^T\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\varepsilon_T \mu t_N}{\left\|\boldsymbol{\tau}_T^{trial}\right\|}\left\{\left[\left(1-p_T^1 p_{T_2}\right)\left(M_{12}+2k_1 g_T^1+k_2 g_T^2\right)-p_T^2 p_{T_2}\left(M_{22}+k_2 g_T^1\right)\right]\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^T\right\} \\
&+\frac{\varepsilon_T \mu t_N}{\left\|\boldsymbol{\tau}_T^{trial}\right\|}\left\{\left[\left(1-p_T^2 p_{T_2}\right)\left(M_{22}+k_2 g_T^1\right)-p_T^1 p_{T_2}\left(M_{12}+2k_1 g_T^1+k_2 g_T^2\right)\right]\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2^T\right\} \\
&-\mu t_N\left[p_T^1 p_{T_1}\mathbf{D}_1\,\bar{\mathbf{P}}_1^{\,T}+p_T^1 p_{T_2}\mathbf{D}_2\,\bar{\mathbf{P}}_1^{\,T}+p_T^2 p_{T_2}\mathbf{D}_1\,\bar{\mathbf{P}}_2^{\,T}+p_T^2 p_{T_2}\mathbf{D}_2\,\bar{\mathbf{P}}_2^{\,T}\right]
\end{aligned}
\tag{5.64}
$$

5.3
Fluxograma do Método da Penalidade: PC com atrito



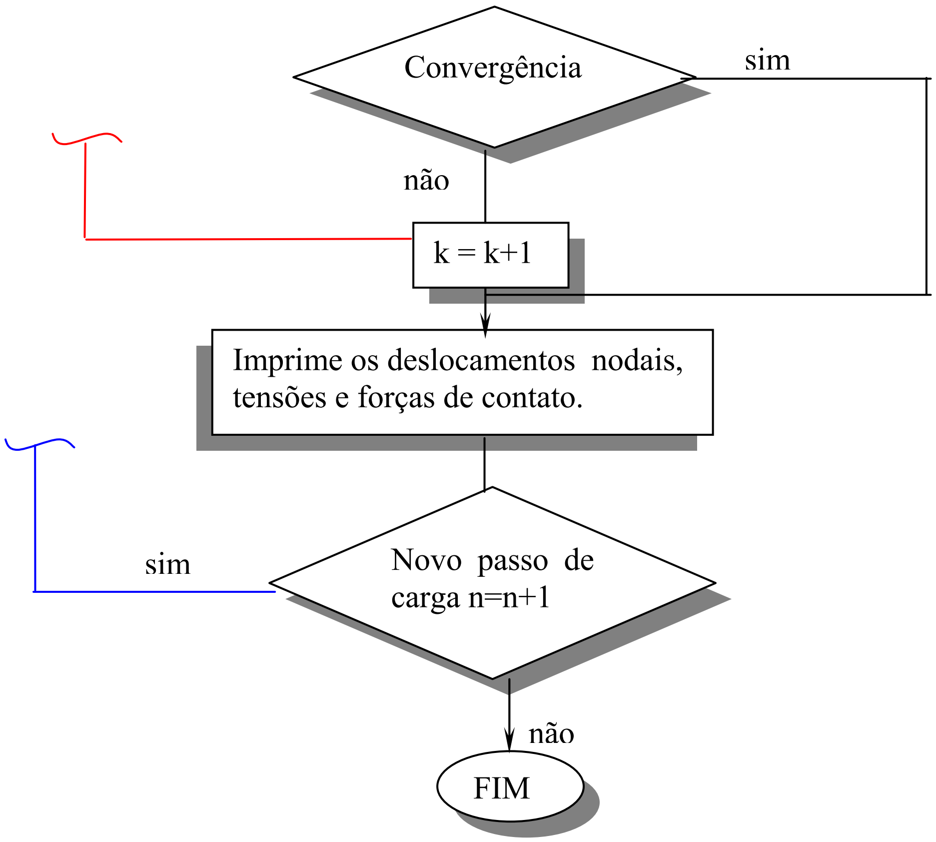


Figura 5.5 – Fluxograma do Método da Penalidade: PC com atrito