

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Renata Cordeiro Araujo da Fonseca

**Porismo de Poncelet e um estudo dos
polígonos bicêntricos**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Marcos Craizer

Rio de Janeiro

Setembro de 2015



Renata Cordeiro Araujo da Fonseca

**Porismo de Poncelet
e um estudo dos polígonos bicêntricos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós- Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer

Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Dirce Uesu Pesco

Departamento de Matemática e Estatística – UFF

Profa. Renata Martins da Rosa

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de setembro de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Renata Cordeiro Araujo da Fonseca

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na UFF (Universidade Federal Fluminense) em 2011. Atualmente é professora efetiva da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Fonseca, Renata Cordeiro Araujo da

Porismo de Poncelet e um estudo dos polígonos bicêntricos / Renata Cordeiro Araujo da Fonseca ; orientador: Marcos Craizer. – 2015.

56 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Porismo. 3. Jean-Victor Poncelet. 4. Porismo de Poncelet. 5. Polígonos bicêntricos. 6. Incentro. 7. Circuncentro. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo incentivo que sempre me deram e por me ensinarem a não desistir dos meus objetivos. Aos meus irmãos, por me servirem de exemplo de dedicação. E aos meus amigos e colegas de profissão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela oportunidade que me concedeu de cursar esse mestrado e por estar sempre comigo, me protegendo e dando forças para continuar.

Agradeço também à Capes e à PUC-Rio, que muito me auxiliaram para que esse trabalho pudesse ser realizado.

Agradeço ao meu orientador, Marcos, pela paciência e disposição a me ajudar sempre que foi preciso.

Sou grata a todos os professores desta universidade, que contribuíram muito para a minha formação.

Agradeço aos meus colegas de classe, pelos momentos de parceria e apoio.

Também sou grata a minha família, meus pais e irmãos, pela educação que me foi dada e pela compreensão que sempre tiveram.

Resumo

Fonseca, Renata Cordeiro Araujo da; Craizer, Marcos (Orientador). **Porismo de Poncelet e um estudo dos polígonos bicêntricos**. Rio de Janeiro, 2015. 56p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho propomos um estudo de polígonos bicêntricos (inscritíveis e circunscritíveis), que pode ser abordado em turmas de ensino médio. Tendo como base um resultado importante da Geometria Projetiva, conhecido como Porismo de Poncelet, estudamos os casos de triângulos e quadriláteros bicêntricos, destacando as propriedades destes polígonos e suas relações com o porismo.

Palavras-chave

Porismo; Jean-Victor Poncelet; Porismo de Poncelet; Polígonos Bicêntricos; Incentro; Circuncentro

Abstract

Fonseca, Renata Cordeiro Araujo da; Craizer, Marcos (Advisor). **Poncelet porism and a study of bicentric polygons**. Rio de Janeiro, 2015. 56p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we propose a study of the bicentric polygons (inscribed and circumscribed), that can be used on high school classes. Based on an important result of Projective Geometry known as Poncelet's Porism, we study the cases of bicentric triangles and quadrilaterals, emphasizing the properties of these polygons and their relations with the porism.

Keywords

Porism; Jean-Victor Poncelet; Poncelet's Porism; Bicentric Polygons; Incentre; Circumcentre

Sumário

1.Introdução	11
2.Breve biografia de Jean Victor Poncelet	13
3.Porismo de Poncelet	15
3.1.Porismo	15
3.2.Linha Poligonal x Polígono	15
3.3.O porismo de Poncelet	17
4.Polígonos Bicêntricos	20
4.1.Triângulos Bicêntricos	22
4.1.1.Fórmula de Chapple	23
4.2.Quadriláteros Bicêntricos	26
4.2.1.Fórmula de Fuss	34
4.2.2.Recíproca do Porismo de Poncelet para quadriláteros	39
4.3.Pentágonos e outros polígonos	43
5 Propostas de Atividades	44
6.Conclusão	52
7.Referências Bibliográficas	53
8.Anexo	55

Lista de figuras

Figura 1 – Porismo de Poncelet	11
Figura 2 – Jean Victor Poncelet	13
Figura 3 – Uma transformação por projeção	14
Figura 4 – Linha Poligonal aberta	16
Figura 5 – Linha Poligonal Fechada	16
Figura 6 – Polígono	16
Figura 7 – Porismo de Poncelet após cinco passos	17
Figura 8 – Deslocamento do ponto P1 na elipse E1	18
Figura 9 – Polígono bicêntrico ABCD	20
Figura 10 – Polígonos bicêntricos ABCD e EFGI	21
Figura 11– Polígono bicêntrico ABCD destacados R, r e d	22
Figura 12 – Triângulo bicêntrico ABC	23
Figura 13 – Triângulo bicêntrico ABC	24
Figura 14 – Quadrilátero inscrito ABCD	26
Figura 15 – Quadrilátero inscrito ABED	27
Figura 16 – Quadrilátero ABCD circunscritível	28
Figura 17 – Quadrilátero ABCD circunscritível	28
Figura 18 – Quadrilátero ABCD Circunscritível	29
Figura 19 – Quadrilátero ABCD não circunscritível	30
Figura 20 – Quadrado ABCD bicêntrico	31
Figura 21 – Retângulo Eghi inscritível e não circunscritível	32
Figura 22 – Losango AEBD circunscritível e não inscritível	32
Figura 23 – Losango AEBD circunscritível e não inscritível	33
Figura 24 – Trapézio Isósceles AEFB inscritível e não circunscritível	33

Figura 25 – Trapézio Isósceles AEFB inscritível e circunscritível	34
Figura 26 – Quadrilátero inscrito ABCD	35
Figura 27 – Destaque dos triângulos AIK e CIL	36
Figura 28 – Triângulos AIK e CIL juntos	36
Figura 29 – Destaque do triângulo EFI	37
Figura 30 – Destaque do diâmetro PQ	38
Figura 31 – Quadrilátero ABCD circunscrito e não inscrito	40
Figura 32 – Tabela de ferramentas do Geogebra	44
Figura 33 – Atividade 1	46
Figura 34 – Atividade 2	48
Figura 35 – Atividade 3	50
Figura 36 – Triângulo ABC e ceviana d	55

1

Introdução

Jean Victor Poncelet, ou simplesmente Poncelet, foi um matemático francês que muito contribuiu para o estudo da Geometria Projetiva. Por volta de 1815, ocorreram suas primeiras publicações voltadas para o estudo de polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica. Dentre seus trabalhos, está um importante resultado, conhecido como Porismo de Poncelet.

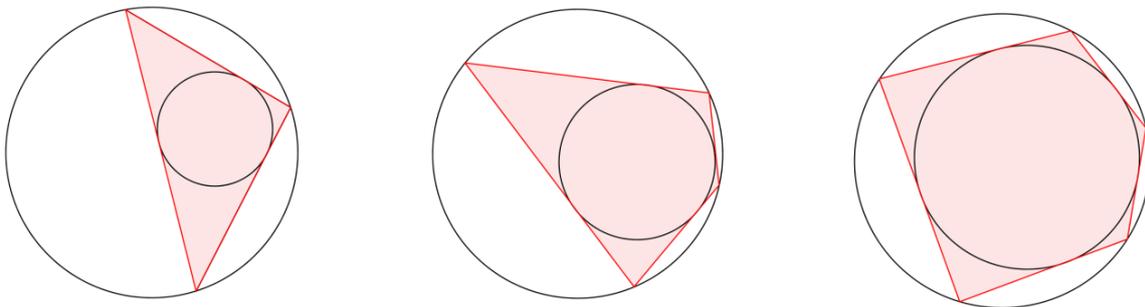


Figura 1 – Porismo de Poncelet

O objetivo deste trabalho é apresentar este porismo, como um meio para se estudar os polígonos bicêntricos (polígonos que podem ser inscritíveis e circunscritíveis ao mesmo tempo), analisando as relações existentes entre esses polígonos e seus círculos inscritos e circunscritos.

Vale ressaltar que, neste trabalho, foram destacados os casos do triângulo e do quadrilátero, que podem ser facilmente compreendidos pelos estudantes do ensino médio. Portanto, recomenda-se que tal estudo seja voltado para esse público.

O presente trabalho é composto de quatro capítulos.

No primeiro capítulo, é feita uma breve biografia de Jean Victor Poncelet, onde são apresentadas suas principais contribuições para a matemática. No segundo capítulo, o Porismo de Poncelet é enunciado. No terceiro, são

apresentados os polígonos bicêntricos, destacando os casos dos triângulos e dos quadriláteros. No quarto, são propostas três atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, utilizando o Geogebra como recurso. No capítulo seguinte, o trabalho é então concluído.

Breve biografia de Jean Victor Poncelet



Figura 2 – Jean Victor Poncelet

Nascido em 1º de julho de 1788 na cidade de Metz, França, Jean- Victor Poncelet foi um importante matemático e engenheiro.

Estudou na Escola Politécnica de Metz, e tendo-se destacado nos estudos, tornou-se um renomado professor de matemática.

Poncelet foi convidado a servir e fez parte do corpo de engenharia do Exército de Napoleão que, em 1812, lutou contra a Rússia. Abandonado como morto em Krasnoy e preso em Saratov por dezoito meses, ainda como prisioneiro, começou a dedicar-se à geometria projetiva, sendo considerado um de seus fundadores.

Regressou à França, em 1814, e em 1815 começou a publicar seus primeiros trabalhos, que falavam sobre polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica.

A obra "Tratado das propriedades projetivas das figuras", publicada em 1822, é tida como sua principal publicação, onde observou que, quando figuras sofrem deformações por projeções, certas propriedades se mantêm constantes.

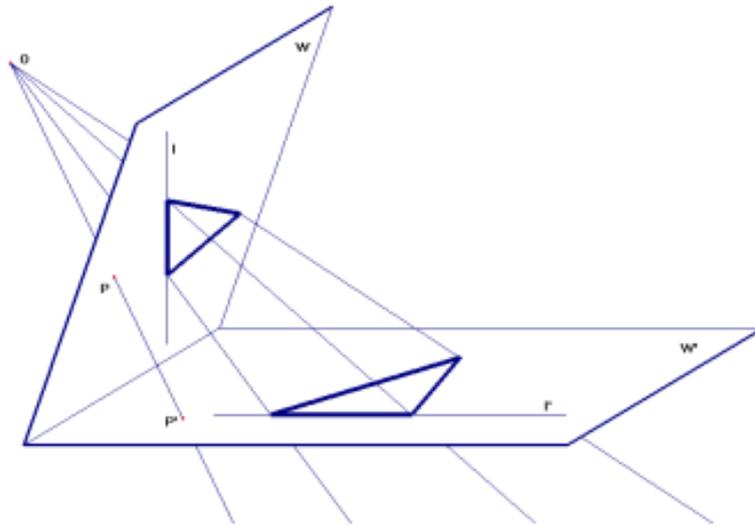


Figura 3 – Uma transformação por projeção.

Poncelet é considerado o criador da teoria da polaridade e do princípio da dualidade. Desenvolveu os princípios da perspectiva, e estabeleceu o conceito de razão dupla ou anarmônica, facilitando a criação da chamada pangeometria, por Klein. Além disso, pelos seus conhecimentos da Física, também contribuiu para o desenvolvimento dessa ciência e escreveu vários trabalhos sobre mecânica.

Jean Victor Poncelet faleceu na França em 1867. Em sua homenagem foi criado o chamado Prêmio Poncelet, concedido pela Academia de Ciências da França, por algum trabalho que contribua para o progresso das ciências, seja da física (mecânica) ou da matemática (pura ou aplicada).

3

Porismo de Poncelet

3.1.

Porismo

Não se tem uma definição exata sobre o que vem a ser um porismo ou porisma.

Algumas fontes indicam que é uma palavra grega, visto que Euclides escreveu um livro com exatamente esse título, mas que se perdeu. Outras fontes, afirmam que porismo vem do francês “porisme”, significando uma afirmação muito fácil de demonstrar.

Alguns dicionários, no entanto, descrevem porisma como uma “forma de proposição entre os antigos gregos que tem sido definida de diversas maneiras, especialmente como proposição suplementar ou corolário inserido pelos comentadores de Euclides ou como proposição que afirma a possibilidade de achar condições tais que tornem certo problema indeterminado ou capaz de inúmeras soluções.”

Existem famosos porismos, como o porismo de Poncelet, o de Steiner, Diofantos, Euclides. No presente trabalho, enunciaremos o primeiro (de Poncelet).

3.2.

Linha Poligonal x Polígono

Para compreender melhor o que o porismo significa, algumas definições se fazem necessárias. Muitas vezes, os termos “linha poligonal” e “polígono” são utilizados equivocadamente, como se representassem a mesma coisa. No entanto, há uma leve diferença entre esses conceitos.

Definição: Uma **linha poligonal** é uma figura plana formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, não colineares. Os pontos são os vértices da linha poligonal e os segmentos são os seus lados. Se $A_n = A_1$, dizemos que a linha poligonal é *fechada*.

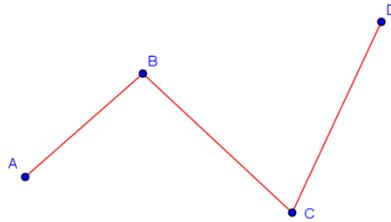


Figura 4 – Linha poligonal aberta

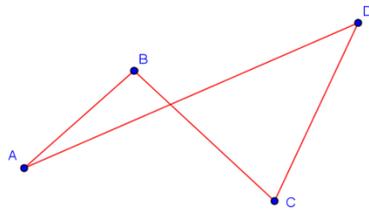


Figura 5 – Linha poligonal fechada

Definição: Um **polígono** é uma linha poligonal fechada, em que cada um de seus vértices é extremidade de dois lados e os únicos pontos em comum dos lados são os vértices.

Uma linha poligonal fechada possui uma parte interna e uma parte externa. Assim, em outras palavras, podemos dizer que polígono é uma linha poligonal fechada que possui uma única região interna, chamada de região poligonal.

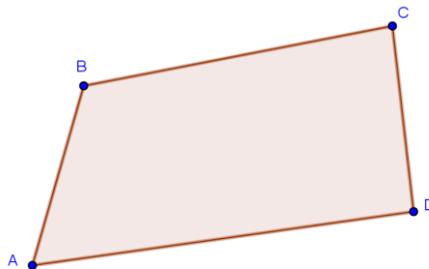


Figura 6 – Polígono

3.3.

O Porismo de Poncelet

O porismo de Poncelet, às vezes referido como o teorema do fechamento de Poncelet, é um resultado clássico da geometria projetiva.

Considere duas elipses, E_1 e E_2 , com E_2 dentro de E_1 . Escolha um ponto P_1 em E_1 e trace a partir de P_1 uma tangente à E_2 . Seja P_2 a interseção dessa tangente com E_1 . Repita a construção, começando agora com P_2 , e assim por diante. Obtemos assim uma linha poligonal, inscrita em E_1 e circunscrita a E_2 . Suponha que façamos esse processo N vezes e que o último ponto coincida com o ponto inicial P_1 . O porismo de Poncelet garante que, se iniciarmos por um ponto diferente de P_1 , X_1 , por exemplo, teremos novamente uma linha poligonal fechada após N passos.

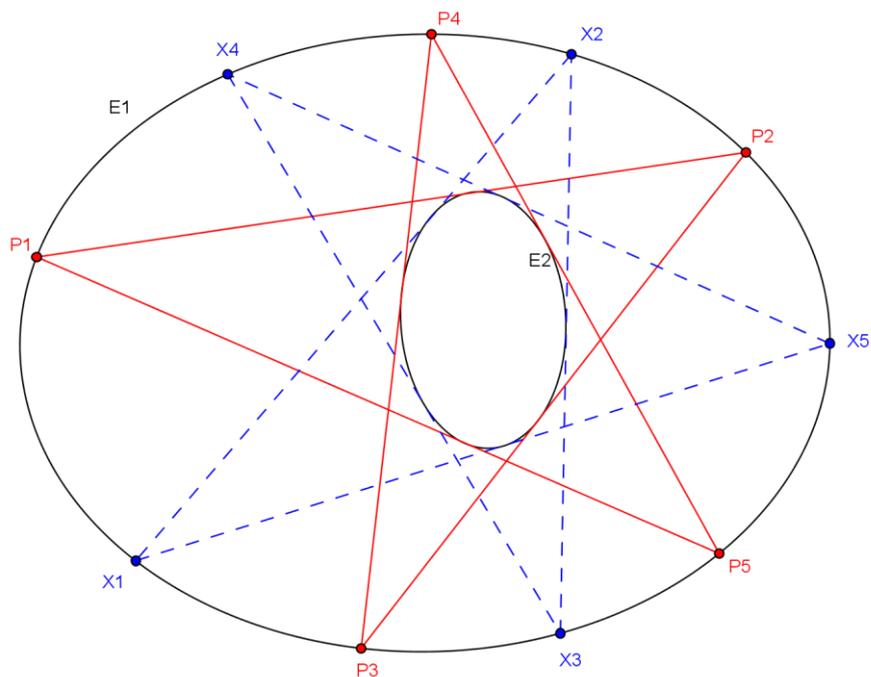


Figura 7 – Porismo de Poncelet após cinco passos

A figura acima representa duas linhas poligonais, ambas inscritas em E_1 e circunscritas a E_2 ao mesmo tempo. Observe que se partimos do ponto P_1 , encontramos os pontos P_2 , P_3 , P_4 , P_5 e finalmente retornamos à P_1 , “fechando” a

linha poligonal após cinco passos. O mesmo acontece quando partimos do ponto X1 e encontramos X2, X3, X4, X5 e novamente, após cinco passos, retornamos à X1.

Em outras palavras, o porismo afirma que, sempre que uma linha poligonal de n lados está inscrita em uma cônica e circunscreve outra, existe uma família infinita de linhas poligonais com o mesmo número de lados, que também estão inscritas e circunscrevem as mesmas duas cônicas.

As quatro figuras a seguir indicam que podemos deslocar o ponto P1 (destacado) pelo contorno da elipse E1, obtendo sempre linhas poligonais inscritas e circunscritas, à E1 e E2 respectivamente, sem alterar essas cônicas, e mantendo o mesmo número de lados, comprovando assim a existência desta “família” de linhas poligonais.

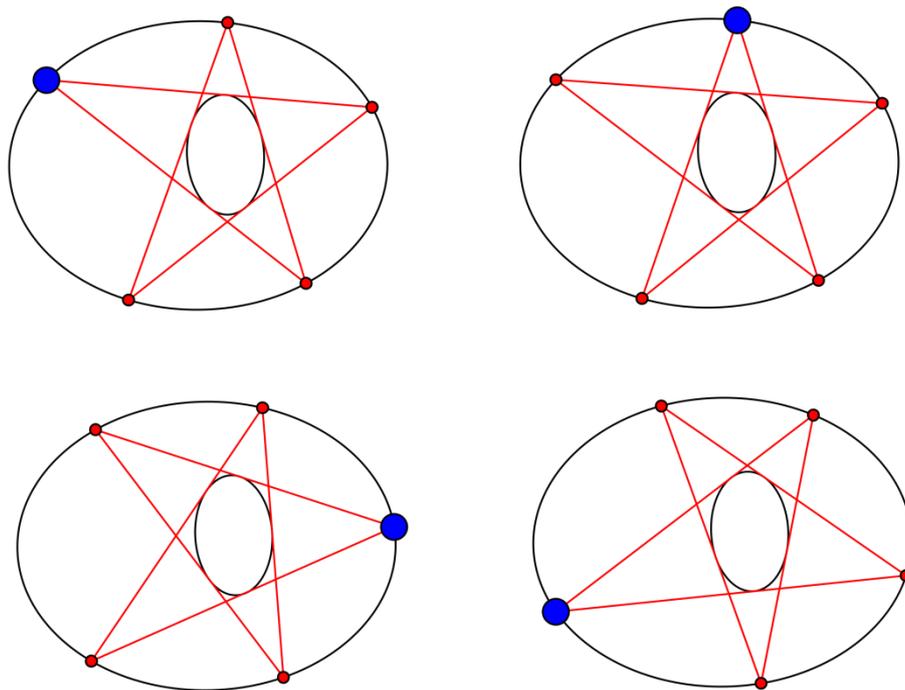


Figura 8 – Deslocamento do ponto P1 na elipse E1

Poncelet provou esse porisma, em 1822, de uma forma bastante analítica. Anos mais tarde, em 1828, o matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851), deu outra prova para o Porismo de Poncelet.

Uma possível demonstração encontra-se no livro *Mathematical Omnibus*, uma das importantes referências bibliográficas utilizadas para a elaboração deste trabalho. Como a ênfase do mesmo está no estudo dos polígonos bicêntricos, tal demonstração não se faz necessária.

4

Polígonos Bicêntricos

Vamos agora analisar o caso dos polígonos. Para isso, considere a seguinte situação: o que acontece quando as cônicas, inscrita e circunscrita, são círculos?

O porismo de Poncelet pode então ser reescrito da seguinte forma. Sejam C_1 e C_2 dois círculos, não concêntricos. Seja A um ponto de C_1 . Por A , trace uma tangente à C_2 , obtendo o ponto B , a outra interseção dessa tangente com C_1 . A partir de B , trace outra tangente à C_2 , obtendo o ponto C e assim por diante. Suponha que o último ponto seja P_n e que P_n coincida com A , onde n é um número inteiro que indica o número de vezes que o processo se repetiu. Obtemos assim um polígono fechado com n vértices. Se iniciarmos o procedimento por um ponto diferente de A , obteremos também após n passos, outro polígono fechado com n vértices.

Se as cônicas são círculos, os polígonos que estão inscritos num dos círculos e circunscritos no outro, são chamados de *polígonos bicêntricos*. Em outras palavras, polígono bicêntrico é aquele que possui, ao mesmo tempo, uma circunferência inscrita e outra circunscrita, ou seja, tem incentro e circuncentro.

A figura a seguir representa o polígono bicêntrico ABCD.

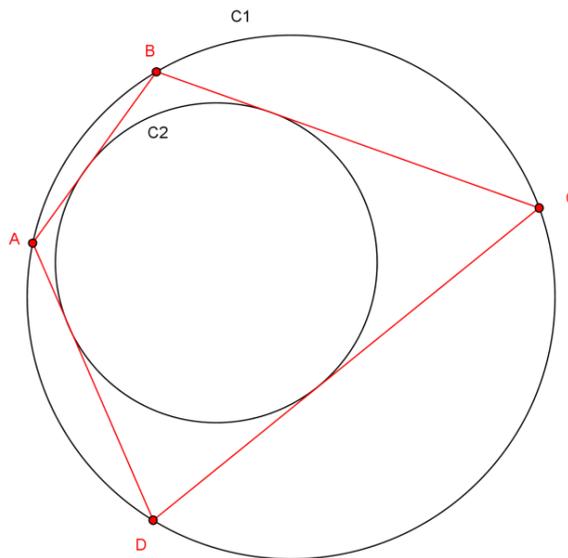


Figura 9 – Polígono bicêntrico ABCD

Pode-se dizer que, para este caso especial do porismo de Poncelet, cada polígono bicêntrico é parte de uma família infinita de polígonos bicêtricos, relacionados aos mesmos dois círculos.

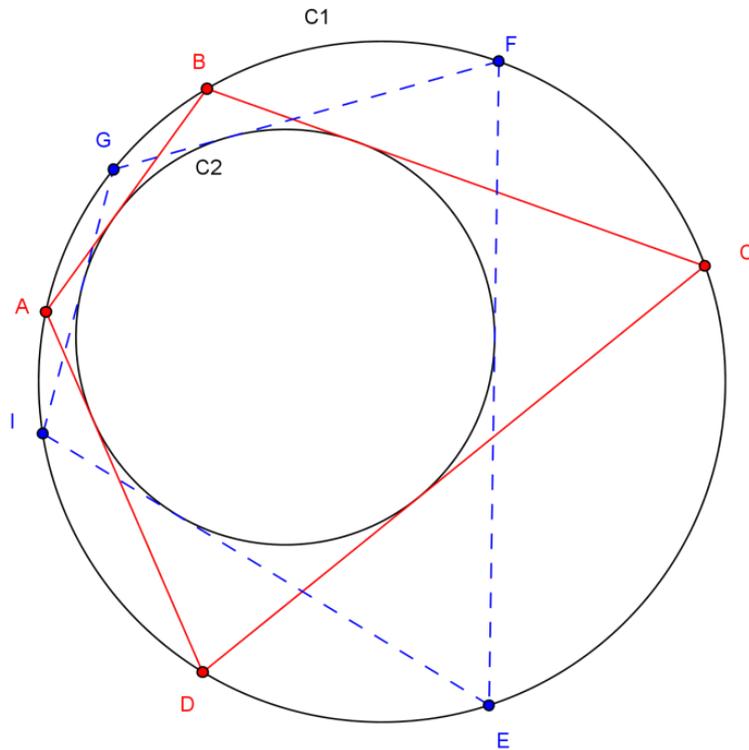


Figura 10 – Polígonos bicêtricos ABCD e EFGI

Na figura, o polígono ABCD é bicêntrico com respeito à C1 e à C2. O mesmo acontece com o polígono EFGI. Os dois polígonos fazem parte da mesma família de polígonos bicêtricos de quatro lados, inscritos e circunscritos em C1 e C2, respectivamente.

Neste momento, a seguinte pergunta é pertinente: dadas duas circunferências, uma dentro da outra, de raios R , r e distância entre centros d , e um polígono de n lados inscrito e circunscrito a ambas, que relação existe entre R , r e d ?

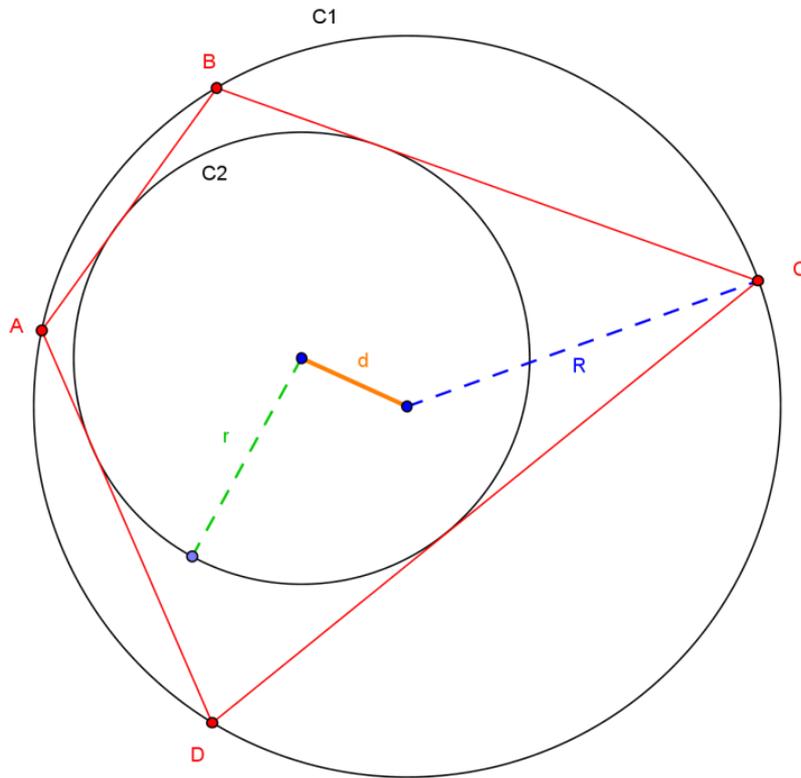


Figura 11 – Polígono bicêntrico ABCD destacados R , r e d

Para o caso particular em que os dois centros coincidem, teremos polígonos regulares, que sempre são inscritíveis e circunscritíveis. Assim, todo polígono regular é bicêntrico.

E se os dois círculos não são concêntricos, ou seja, a distância d entre os centros não é nula? Para responder à essas perguntas, analisaremos alguns casos.

4.1.

Triângulos Bicêntricos

Todo triângulo possui um incentro e um circuncentro. Portanto, todo triângulo é bicêntrico.

4.1.1.

Fórmula de Chapple

Vamos agora entender a relação existente entre R , r e d para triângulos bicêntricos.

Considere o triângulo ABC inscrito e circunscrito em $C1$ e $C2$, respectivamente. Seja R o raio de $C1$, r o raio de $C2$ e d a distância entre os centros. Sejam O e I os centros de $C1$ e $C2$, respectivamente.

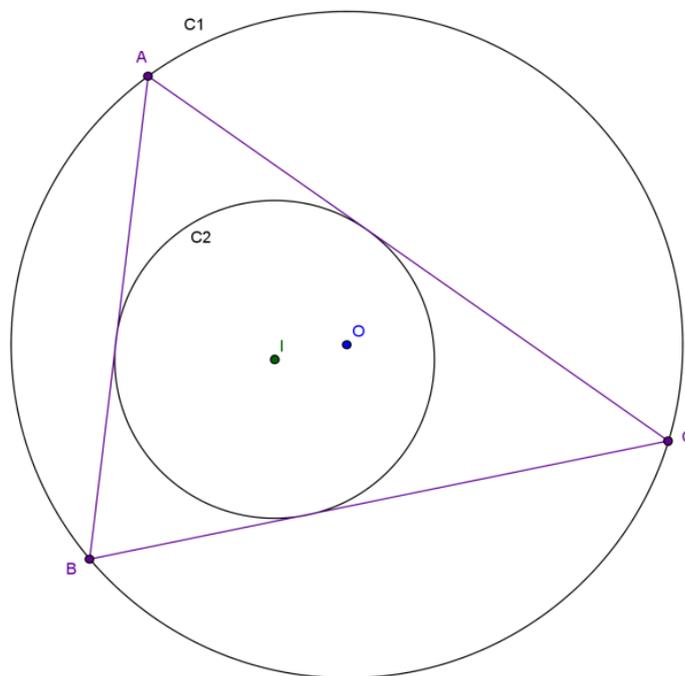


Figura 12 – Triângulo bicêntrico ABC

Prolongando o segmento AI , encontramos o ponto K em $C1$. Tracemos o diâmetro UV , de forma que o segmento UV contenha os pontos O e I . Tracemos agora o diâmetro passando por K . Seja K' a extremidade oposta à K .

Seja Z o ponto de tangência de $C2$ com o segmento AB . Tracemos agora os segmentos IZ , IC e $KCe CK'$.

Denotemos por α , β e γ os ângulos do triângulo ABC , com $BAC = \alpha$, $CBA = \beta$ e $ACB = \gamma$.

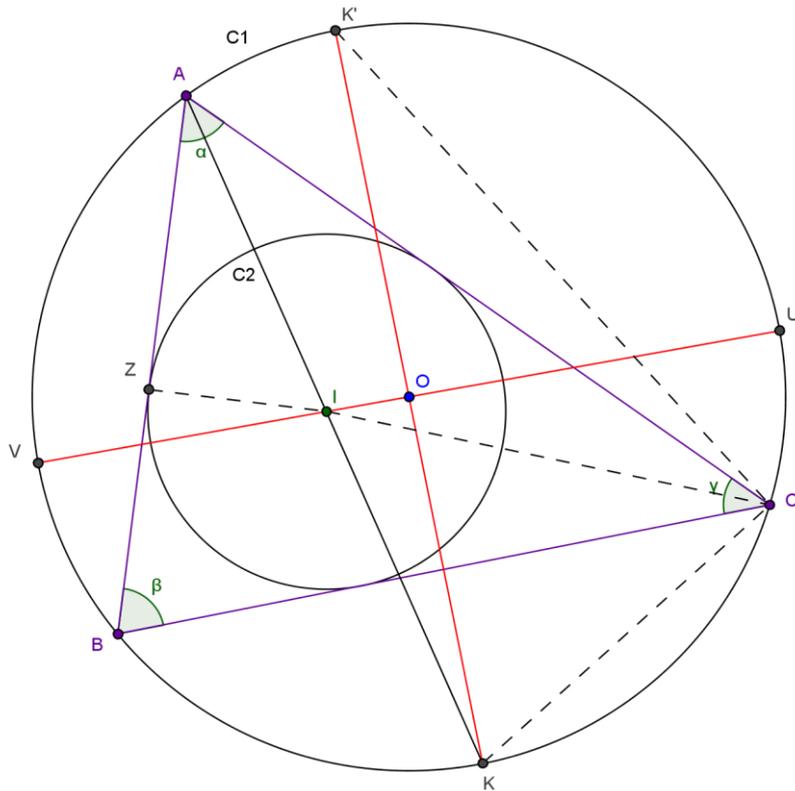


Figura 13 – Triângulo bicêntrico ABC

As cordas AK e UV se intersectam em I, e, portanto vale

$$AI \cdot IK = IU \cdot IV \quad (1)$$

Mas $IU = R + d$ e $IV = R - d$. Substituindo em (1) temos,

$$AI \cdot IK = (R + d) \cdot (R - d) = R^2 - d^2 \quad (2)$$

Como I é incentro (ponto de encontro das bissetrizes) e o ângulo CIK é externo ao triângulo AIC, temos

$$\text{med}(CIK) = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Além disso, $\text{med}(BCK) = \text{med}(BAK)$, pois ambos são ângulos inscritos ao mesmo arco \widehat{BK} . Portanto,

$$\text{med}(ICK) = \text{med}(BCI) + \text{med}(BCK) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Assim, constatamos que os ângulos CIK e ICK são congruentes e que o triângulo ICK é isósceles. Daí, temos que

$$IK = CK \quad (3)$$

Portanto a equação (2) pode ser reescrita como

$$AI \cdot CK = R^2 - d^2 \quad (4)$$

Observe o triângulo AIZ. Como Z é ponto de tangência, temos $\text{med}(AZI) = 90^\circ$. Temos também que $\text{med}(ZAI) = \frac{\alpha}{2}$, pois AI é bissetriz. Observe agora que o triângulo CKK' também é retângulo, pois KK' é diâmetro e que $\text{med}(CK'K) = \text{med}(CAK) = \frac{\alpha}{2}$, pois ambos são ângulos inscritos ao mesmo arco \widehat{CK} . Daí, temos que os triângulos AIZ e CKK' são semelhantes, donde

$$\frac{AI}{IZ} = \frac{KK'}{KC} \text{ e } AI \cdot KC = IZ \cdot KK'$$

Mas $IZ = r$ e $KK' = 2R$. Portanto

$$AI \cdot KC = r \cdot 2R \quad (5)$$

Logo, de (4) e (5), segue

$$2Rr = R^2 - d^2$$

Tal resultado é conhecido como Teorema de Euler. No entanto, essa relação foi descoberta pelo matemático inglês Chapple em 1746, que entendeu a verdadeira lógica do porismo: se houver dois círculos satisfazendo a última fórmula, significa que há uma infinidade de triângulos inscritos em um e circunscrito em outro círculo. Esses triângulos são chamados triângulos porísticos. Provavelmente, esta é a primeira aparição conhecida de porismas do tipo Poncelet.

4.2.

Quadriláteros Bicêntricos

Para que seja bicêntrico, o quadrilátero deve ser:

- Inscritível, o que significa que seus vértices devem pertencer à uma mesma circunferência.
- Circunscritível, quando os quatro lados são tangentes à mesma circunferência.

As definições e proposições a seguir são, portanto necessárias para podermos prosseguir.

Definição: Um quadrilátero é inscritível se existir um círculo passando por seus vértices.

Proposição 3.3: Um quadrilátero convexo ABCD, de lados AB, BC, CD e DA é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

Prova: Suponha que ABCD seja inscritível.

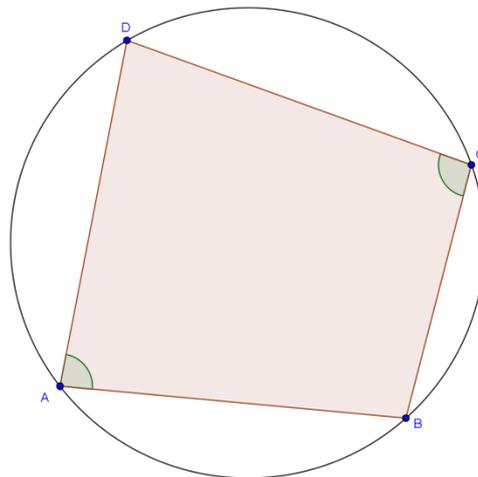


Figura 14– Quadrilátero inscrito ABCD

Sendo $\text{med}(A)$ a medida do ângulo A , $\text{med}(C)$ a medida do ângulo C , $\text{arc}(BCD)$ a medida do arco BCD e $\text{arc}(DAB)$ a medida do arco DAB , temos que

$$\text{med}(A) + \text{med}(C) = \frac{\text{arc}(BCD)}{2} + \frac{\text{arc}(DAB)}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Suponha agora que $\text{med}(A) + \text{med}(C) = 180^\circ$ e que ABCD não seja inscritível. Considere o triângulo ABD e trace a circunferência circunscrita a esse triângulo. Seja E o ponto de interseção do lado BC com a circunferência, conforme a figura.

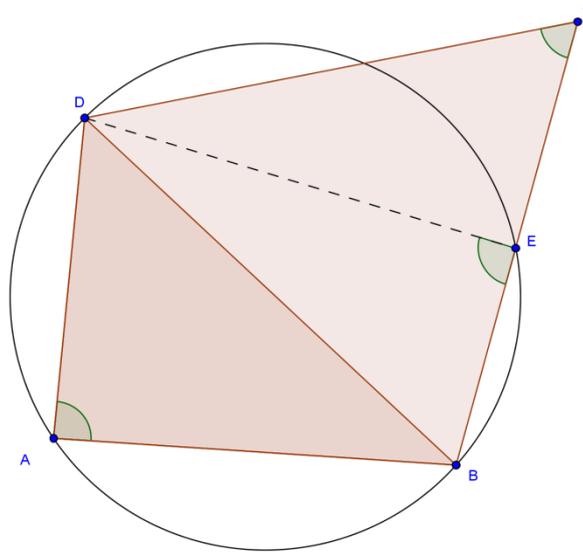


Figura 15 – Quadrilátero inscrito ABED

Como ABED é inscritível, $\text{med}(A) + \text{med}(E) = 180^\circ$. Portanto, temos que $\text{med}(E) = \text{med}(C)$, o que é um absurdo já que o ângulo E é externo ao triângulo CDE.

Se C for interior ao círculo, chegamos a uma contradição análoga. \square

Definição: Um quadrilátero é circunscritível quando possui um círculo tangente a todos os seus lados.

Proposição 3.4: Um quadrilátero convexo é circunscritível se as bissetrizes de seus ângulos internos intersectarem-se em um único ponto, que será o centro do círculo inscrito.

Prova: Suponha que ABCD é circunscritível.

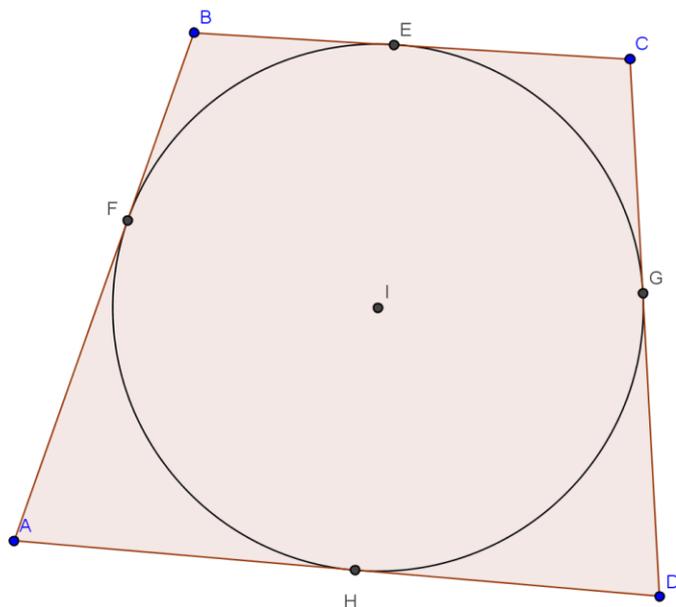


Figura 16 – Quadrilátero ABCD circunscritível

Os pontos F, E, G e H são pontos de tangência respectivamente aos lados AB, BC, CD e DA. Então o centro I da circunferência inscrita está a uma igual distância dos lados do polígono.

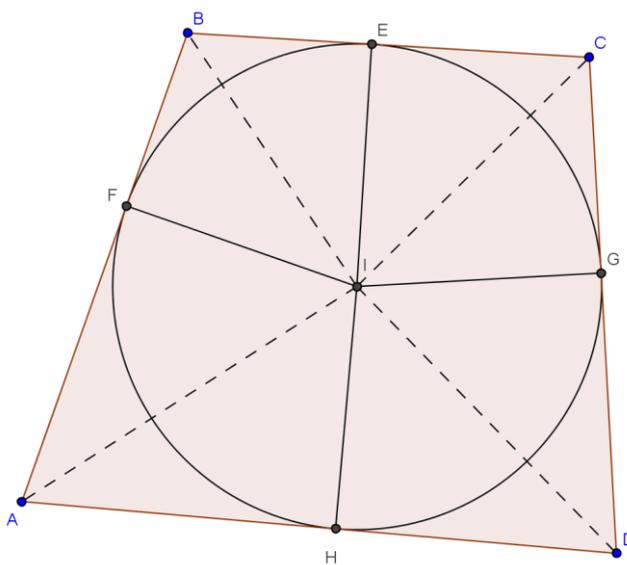


Figura 17 – Quadrilátero ABCD circunscritível

Assim, como bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que estão à uma mesma distância dos lados do polígono, podemos afirmar que I é a interseção das bissetrizes dos quatro ângulos internos do polígono $ABCD$. \square

Proposição 3.5: (Teorema de Pitot) Um quadrilátero convexo $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois., ou seja, $AB + CD = AD + BC$.

Prova: Suponha que $ABCD$ seja circunscritível e sejam F , E , G e H os pontos de tangência de AB , BC , CD e DA com o círculo inscrito em $ABCD$.

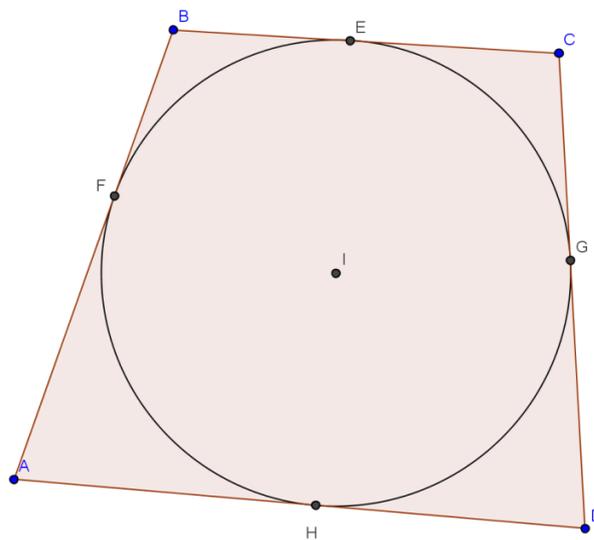


Figura 18 – Quadrilátero $ABCD$ Circunscritível

$$AB + CD = (AF + FB) + (CG + GD)$$

Mas, $AF = AH$, $FB = BE$, $CG = EC$ e $GD = HD$

Podemos então reescrever

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AH + BE) + (EC + HD) \\ &= (BE + EC) + (AH + HD) \\ &= BC + AD \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $AB + CD = AD + BC$. Se $ABCD$ não for circunscritível, o círculo interior não vai tangenciar um dos lados. Seja CD esse lado.

Existe então um ponto P em BC , tal que PD tangencia o círculo. Considere que P está entre BC (o outro caso é análogo).

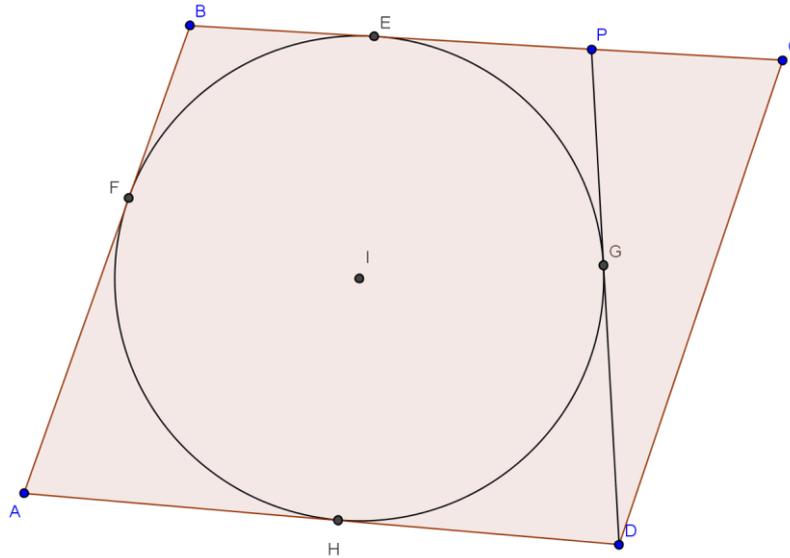


Figura 19 – Quadrilátero $ABCD$ não circunscritível

Temos que $AB + PD = AD + BP$. Como $AB + CD = AD + BC$, segue que

$$AB - AD = BP - PD \text{ e } AB - AD = BC - CD$$

Ou ainda, que $BP - PD = BC - CD$

$$CD - PD = BC - BP$$

$$CD - PD = PC$$

$$CD = PC + PD$$

O que contradiz a desigualdade triangular no triângulo PCD . \square

Podemos afirmar então que, nem todos os quadriláteros são bicêntricos.

Com base nas proposições acima demonstradas, nota-se que:

- Todos os quadrados são bicêntricos.

De fato, como todos os ângulos são retos, dois ângulos opostos são sempre suplementares. Por outro lado, como os lados têm mesma medida, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

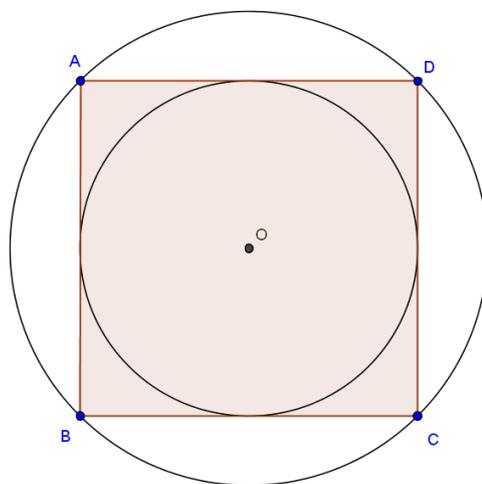


Figura 20 – Quadrado ABCD bicêntrico

Note que, no caso do quadrado, os centros das circunferências inscrita e circunscrita coincidem.

- Retângulos são apenas inscritíveis.

No retângulo, todos os ângulos medem 90° , satisfazendo a condição para ser inscritível. No entanto, como seus lados opostos são iguais, mas diferentes dos outros dois, segue que a soma de dois lados opostos será também diferente da soma dos outros dois. Apenas para o caso particular do quadrado, os retângulos são bicêntricos.

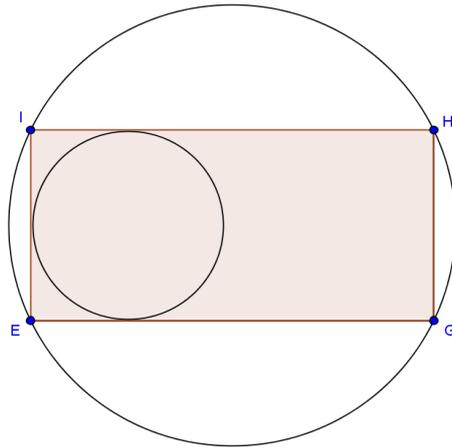


Figura 21 – Retângulo EIGH inscrito e não circuncritível

- Paralelogramos são circuncritíveis apenas no caso do losango.

Para os paralelogramos, não podemos garantir que a soma de seus ângulos opostos seja 180° , com exceção do quadrado. Portanto todos os outros paralelogramos não são inscritíveis. Agora, especificamente no caso do losango, teremos a soma de dois lados opostos igual à soma dos outros dois lados. Assim, neste caso, o paralelogramo será circuncritível.

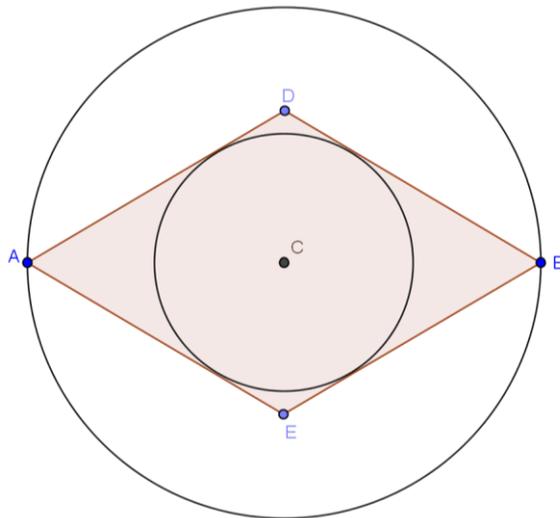


Figura 22 – Losango AEBD circuncritível e não inscritível

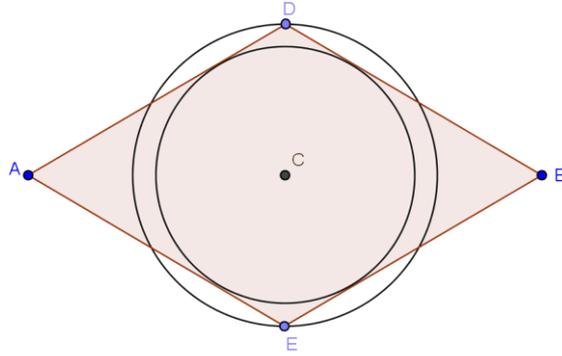


Figura 23 – Losango AEBD circunscritível e não inscritível

- Trapézios Isósceles são inscritíveis e podem ser circunscritíveis.

Trapézios isósceles possuem ângulos opostos suplementares, e, portanto são inscritíveis. No entanto, só serão circunscritíveis quando a soma de seus lados opostos for a mesma.

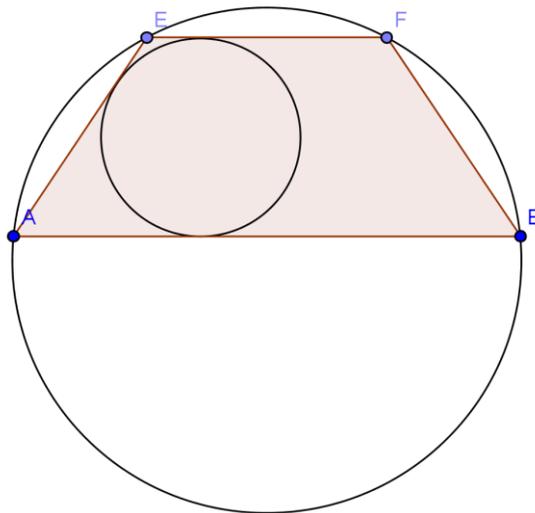


Figura 24 – Trapézio Isósceles AEFB inscritível e não circunscritível

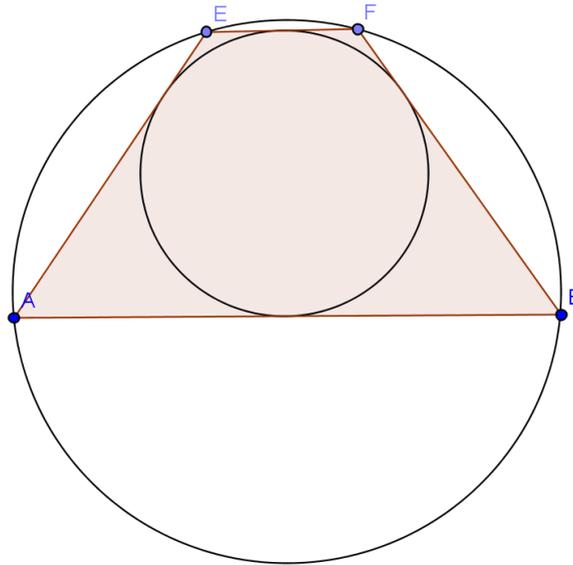


Figura 25 – Trapézio Isósceles AEFB inscrito e circunscrito

Existem muitos outros quadriláteros bicêntricos. Na verdade, para que o sejam, basta que satisfaçam a fórmula a seguir, conhecida como fórmula de Fuss.

4.2.1.

Fórmula de Fuss

Nicolas Fuss (1755 – 1826), um amigo e estudante de Euler, descobriu que um quadrilátero bicêntrico deve satisfazer a relação $2.r^2.(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$.

Vamos agora demonstrar a veracidade dessa relação.

Considere o quadrilátero ABCD, inscrito em um círculo C1 de centro em O e raio R e circunscrito em um círculo C2 de centro I e raio r. Os pontos K e L são pontos de tangência do quadrilátero com respeito à C2. Seja d a distâncias entre os centros O e I.

Prolongando o segmento CI, encontramos o ponto E em C1. Da mesma forma, prolongando o segmento AI, encontramos o ponto F em C1. Tracemos os segmentos EO, OF, IO, IL e IK.

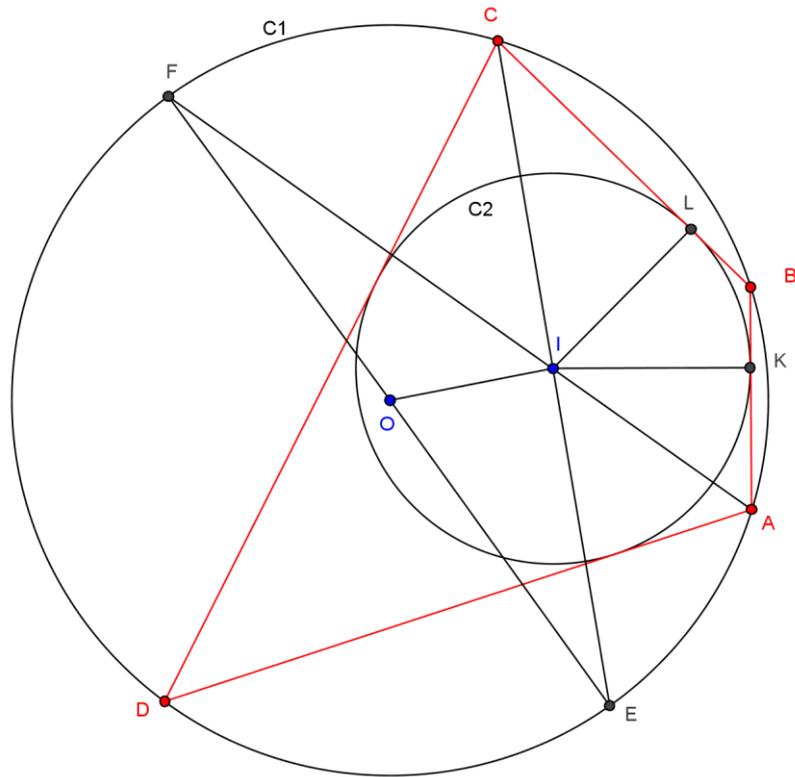


Figura 26 – Quadrilátero inscrito ABCD

Como o quadrilátero ABCD está inscrito em $C1$, os ângulo A e C são suplementares. Por outro lado, a reta AI é bissetriz do ângulo A e CI é bissetriz do ângulo C. Portanto, $\text{med}(\text{BAI}) + \text{med}(\text{ICB}) = 90^\circ$.

Pela construção, $\text{IK} = \text{IL} = r$. Os triângulos AIK e CIL juntos formam um triângulo retângulo de catetos AI e CI, e hipotenusa $\text{AK} + \text{CL}$, conforme ilustram as figuras a seguir.

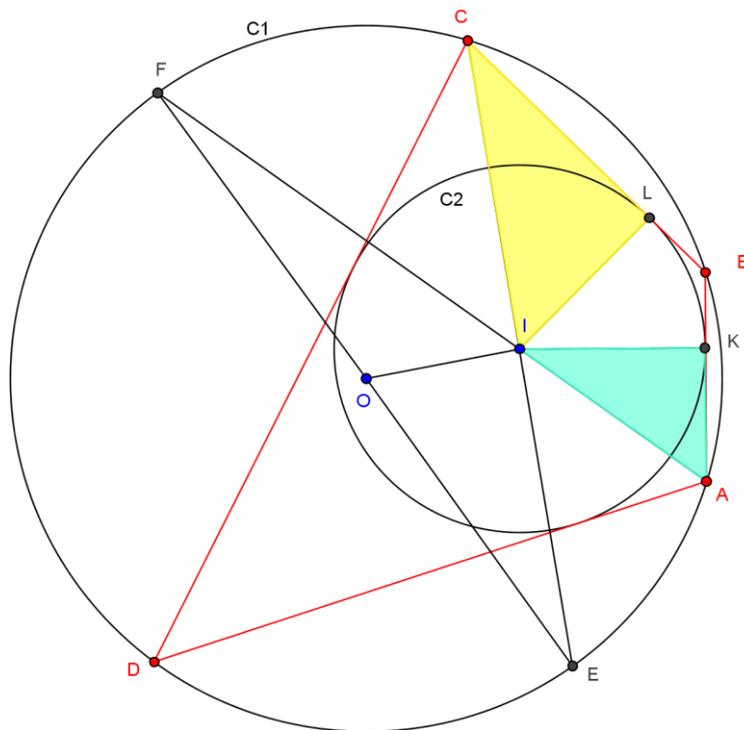


Figura 27 – Destaque dos triângulos AIK e CIL

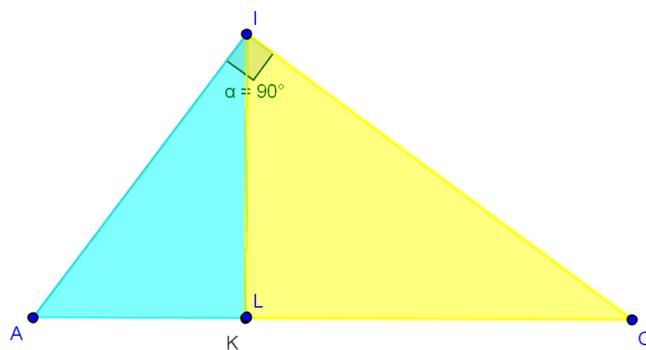


Figura 28 – Triângulos AIK e CIL juntos

Das relações métricas no triângulo retângulo, temos que

$$IL \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI$$

Ou ainda

$$r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AIC, temos

$$(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2 \quad (2)$$

Elevando (1) ao quadrado

$$r^2 \cdot (AK + CL)^2 = AI^2 \cdot CI^2$$

E substituindo (2) em (1)

$$r^2 \cdot (AI^2 + CI^2) = AI^2 \cdot CI^2$$

Donde

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{CI^2} \quad (3)$$

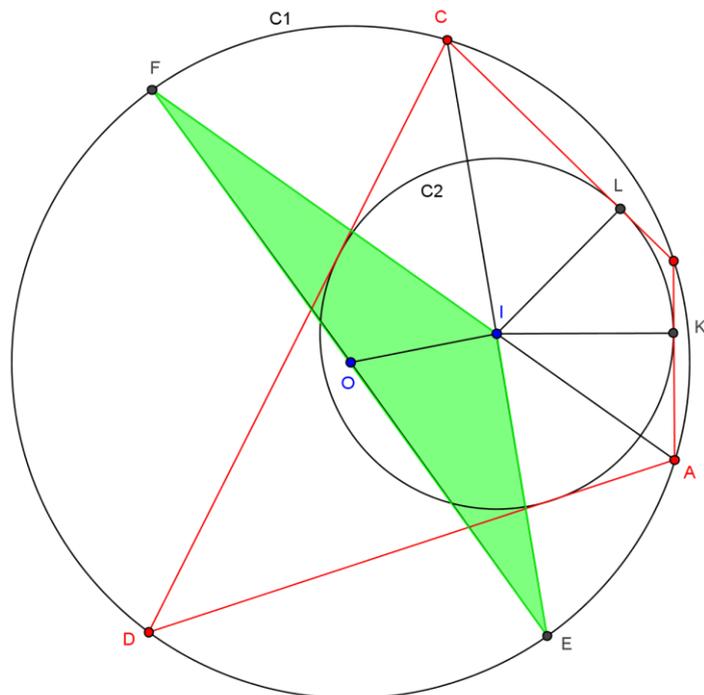


Figura 29 – Destaque do triângulo EFI

Observe na figura acima que o segmento EF é diâmetro, pois

$$\begin{aligned} \text{med}(\text{DOF}) + \text{med}(\text{DOE}) &= 2 \cdot (\text{med}(\text{DAF}) + \text{med}(\text{DCE})) \\ &= \text{med}(\text{BAD}) + \text{med}(\text{BCD}) \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Portanto, $EF = 2r$ e O é ponto médio do segmento EF . Assim, IO é mediana do triângulo EFI . Utilizando o Teorema de Stewart (ver anexo), para o cálculo de medianas, segue

$$EI^2 + FI^2 = 2 \cdot IO^2 + \frac{EF^2}{2}$$

Mas sabemos que $IO = d$ e $EF = 2R$.

$$EI^2 + FI^2 = 2 \cdot (d^2 + R^2) \quad (4)$$

Considere agora o diâmetro de C_1 passando por O e por I . Sejam P e Q os pontos extremos desse diâmetro.

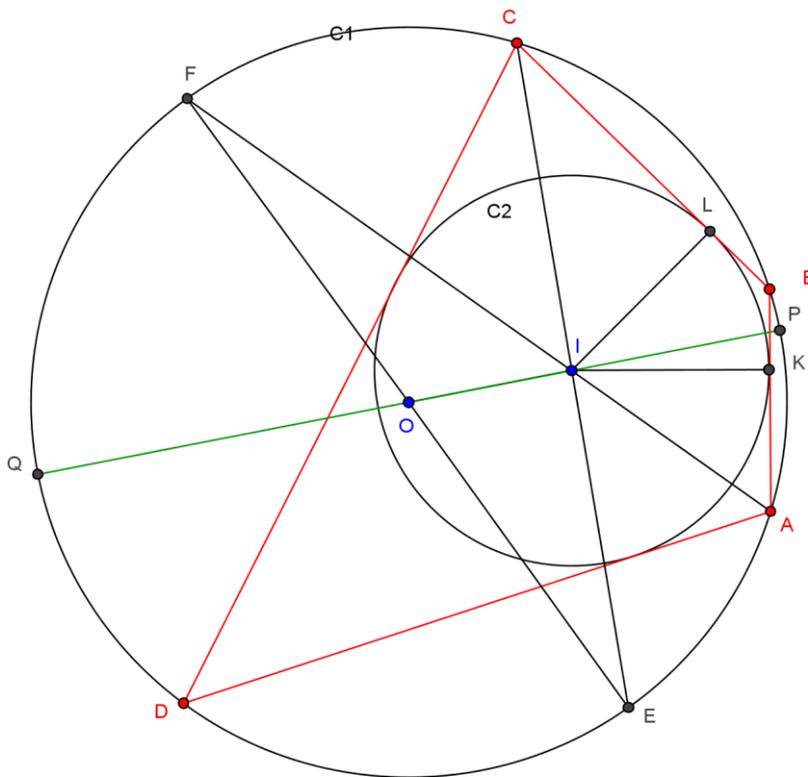


Figura 30 – Destaque do diâmetro PQ

As cordas AF e PQ também se intersectam em I , valendo

$$AI \cdot FI = PI \cdot QI$$

Mas $PI = R - d$ e $QI = R + d$. Temos portanto,

$$AI \cdot FI = (R + d) \cdot (R - d) = (R^2 - d^2) \quad (5.1)$$

Por outro lado, as cordas AF e CE também se intersectam em I, e, portanto vale

$$AI \cdot FI = CI \cdot EI$$

$$CI \cdot EI = (R^2 - d^2) \quad (5.2)$$

Isolando AI e CI em (5.1) e (5.2), e substituindo em (3) temos

$$\frac{1}{r^2} = \frac{FI^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{EI^2}{(R^2 - d^2)^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{FI^2 + EI^2}{(R^2 - d^2)^2} \quad (6)$$

Substituindo agora (4) em (6),

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2 \cdot (d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2}$$

$$\text{Logo, } 2r^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2.$$

4.2.2.

Recíproca da Fórmula de Fuss para quadriláteros

O objetivo é mostrar que, se vale a fórmula de Fuss, então o polígono é bicêntrico.

Para tanto, sejam I, o centro da circunferência interior e O, o centro da circunferência exterior. Prolongando o segmento AI encontramos o ponto E, e

prolongando o segmento CI, encontramos o ponto F, com E e F em C1. Considere os ângulos $IAB = \alpha$ e $ICB = \beta$. Trace a corda GH que contém os pontos I e O. GH é, portanto, diâmetro de C1.

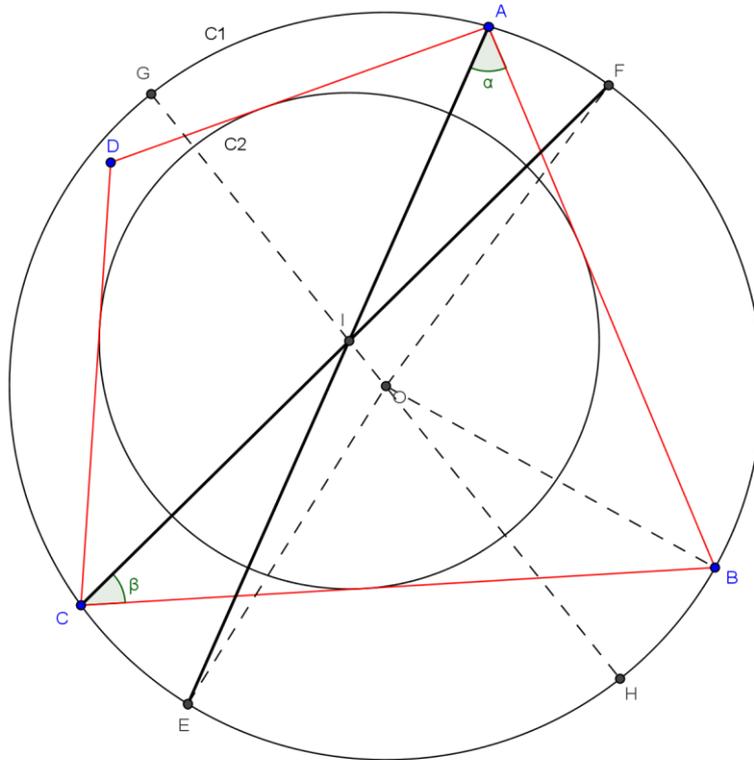


Figura 31 – Quadrilátero ABCD circunscrito e não inscrito

Temos $\text{med}(\text{EOB}) = 2\alpha$ e $\text{med}(\text{FOB}) = 2\beta$ e portanto

$$\text{med}(\text{EOB} + \text{FOB}) = 2(\alpha + \beta) \quad (1)$$

Já que AE e GH são cordas que concorrem em I, podemos escrever

$$\text{sen } \alpha = \frac{r}{AI} = \frac{r \cdot IE}{AI \cdot IE} = \frac{r \cdot IE}{GI \cdot IH}$$

Por outro lado, $GI = R - d$ e $IH = R + d$. A igualdade acima pode ser reescrita

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{r.IE}{(R+d).(R-d)}$$

Ou ainda,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{r^2.IE^2}{(R+d)^2.(R-d)^2} \quad (2)$$

Suponhamos que vale a fórmula de Fuss para esse caso, ou seja,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2.(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2}$$

Que equivale à igualdade

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2.(d^2 + R^2)}{(R+d)^2(R-d)^2} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), temos que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{IE^2}{2.(d^2 + R^2)}$$

Analogamente, encontramos que

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{IF^2}{2.(d^2 + R^2)}$$

Somando as igualdades anteriores,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{IE^2 + IF^2}{2.(d^2 + R^2)}$$

Agora, no triângulo IEO, pela lei dos cossenos,

$$IE^2 = EO^2 + IO^2 - 2.EO.IO.\cos(EOI)$$

$$IE^2 = R^2 + d^2 - 2.R.d.\cos(EOI)$$

E, no triângulo IFO, também pela lei dos cossenos,

$$IF^2 = FO^2 + IO^2 - 2.FO.IO.\cos(EOI)$$

$$IF^2 = R^2 + d^2 - 2.R.d.\cos(FOI)$$

Portanto,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{R^2 + d^2 - 2.R.d.\cos(EOI) + R^2 + d^2 - 2.R.d.\cos(FOI)}{2.(d^2 + R^2)}$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1 - \frac{R.d.(\cos(EOI) + \cos(FOI))}{2.(d^2 + R^2)} \quad (4)$$

Agora, usando (1),

$$\begin{aligned} \text{med}(EOI) + \text{med}(FOI) &= 360^\circ - (\text{med}(EOB) + \text{med}(FOB)) \\ &= 360^\circ - 2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Sabemos que $\alpha < 90^\circ$ e $\beta < 90^\circ$, e por isso, $\alpha + \beta < 180^\circ$.

Vamos analisar três possíveis casos para a equação (4).

- Caso 1: $\alpha + \beta < 90^\circ$

Então $\text{med}(EOI) + \text{med}(FOI) > 180^\circ$, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1$ e $\cos(EOI) + \cos(FOI) < 0$.

Substituindo em (4) teremos $\sin^2\alpha + \sin^2\beta > 1$, o que é uma contradição.

- Caso 2: $\alpha + \beta > 90^\circ$

Então $\text{med}(EOI) + \text{med}(FOI) < 180^\circ$, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta > 1$ e $\cos(EOI) + \cos(FOI) > 0$.

Substituindo em (4) teremos $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1$, o que é uma contradição.

- Caso 3: $\alpha + \beta = 90^\circ$

Então $med(EOI) + med(FOI) = 180^\circ$, $sen^2\alpha + sen^2\beta = 1$ e $cos(EOI) + cos(FOI) = 0$.

Substituindo em (4) teremos $sen^2\alpha + sen^2\beta = 1$, o que é verdadeiro.

Portanto, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Como $med(BAD) = 2\alpha$ e $med(BCD) = 2\beta$,

$$med(BAD + BCD) = 180^\circ$$

Logo, o quadrilátero ABCD é inscritível o que implica que D pertence ao círculo que passa por A, B e C. Fica comprovado assim que, para qualquer ponto arbitrário inicial A, o quadrilátero ABCD será bicêntrico.

4.3.

Pentágonos e outros polígonos

A relação existente entre os raios R, r e a distância d, também pode ser encontrada para pentágonos, hexágonos, etc. Diversos matemáticos, como Jacob, Steiner, Chaundy, Kerawala e Richelot, desenvolveram estudos à respeito dos polígonos bicêntricos.

De uma forma mais prática, eles definiram as seguintes igualdades:

$$a = \frac{1}{R+d}, b = \frac{1}{R-d} \text{ e } c = \frac{1}{r}$$

A equação para triângulos bicêntricos pode então ser escrita como $a + b = c$.

Para quadriláteros bicêntricos teremos $a^2 + b^2 = c^2$.

Para pentágonos bicêntricos, $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b) \cdot (b + c) \cdot (a + c)$ ou ainda $(a + b + c)^3 = 4(a^3 + b^3 + c^3)$.

5

Propostas de Atividades

A seguir, são apresentadas três propostas de atividades que podem ser utilizadas em sala de aula, para que o próprio aluno compreenda o porismo de Poncelet e perceba as relações expostas anteriormente a respeito dos polígonos bicêntricos.

Para isso, é interessante que eles tenham acesso ao Geogebra, um recurso bastante útil e dinâmico na exposição de conceitos e relações matemáticas.

O professor deve direcioná-los na construção, usando como base os passos descritos.

Para facilitar a aplicação das atividades, a figura a seguir exhibe as principais ferramentas a serem utilizadas, bem como seus respectivos ícones.

Ferramenta	Ícone
Elipse	
Ponto	
Reta tangente	
Polígono	
Círculo dados centro e um de seus pontos	
Bissetriz	
Reta perpendicular	
Segmento	
Círculo dados centro e raio	

Figura 32 – Tabela de ferramentas do Geogebra

ATIVIDADE 1: Entendendo o Porismo

- Recurso utilizado: Geogebra
- Objetivo: Compreender a existência uma família de linhas poligonais com mesmo número de vértices, inscritas e circunscritas às mesmas cônicas.

Passo 1: Utilizando a ferramenta *Elipse*, construa duas elipses, uma interior à outra. Sejam A e B os focos da elipse externa e D e E os focos da elipse interna.

Passo 2: Desmarque os focos D e E para facilitar a visualização. Dica: Clique com o botão direito do mouse em cima do ponto que deseja desmarcar, e selecione a opção “Exibir objeto”.

Passo 3: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque um ponto sobre a elipse externa. Seja G esse ponto.

Passo 4: Utilizando a ferramenta *Tangente*, trace a reta tangente à elipse interna passando por G. Aparecerão duas retas. Desmarque uma delas. Dica: Clique com o botão direito do mouse em cima da reta que deseja desmarcar, e selecione a opção “Exibir objeto”.

Passo 5: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque o ponto H, interseção dessa tangente com a elipse externa.

Passo 6: Utilizando a ferramenta *Reta Tangente*, trace a reta tangente à elipse interna passando por H.

Passo 7: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque o ponto I, interseção dessa tangente com a elipse externa.

Passo 8: Repita o procedimento até obter os pontos J, K e L.

Passo 9: Mova os focos A e B até o ponto L coincidir com o ponto inicial G. Após fazer coincidir, desmarque o ponto L. Dica: Mantenha pressionado o botão direito do mouse e então mova o ponto desejado.

Passo 9: Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa um polígono passando por G, H, I, J, K e G novamente.

Passo 10: Desmarque as retas tangentes e os focos A e B para facilitar a visualização.

Passo 11: Mova o ponto G sobre a elipse externa.

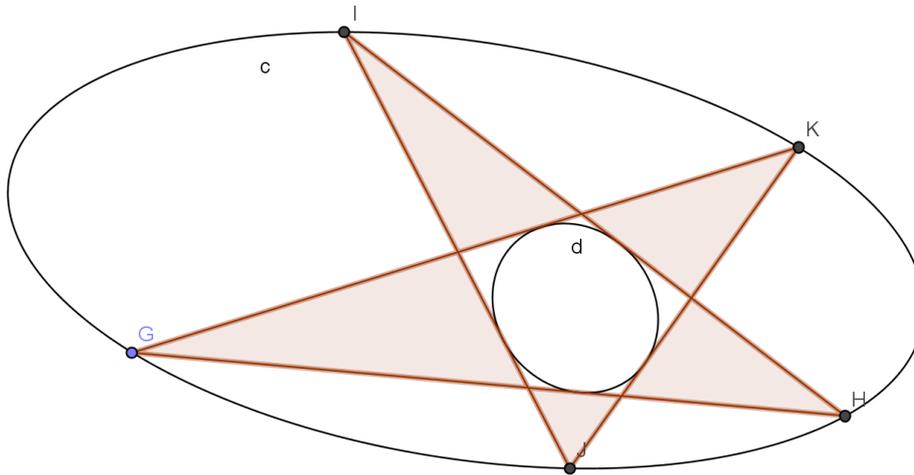


Figura 33 – Atividade 1

Espera-se que, com essa atividade, o aluno perceba a existência de infinitas linhas poligonais de cinco vértices, inscritíveis e circunscritíveis às elipses. Dessa forma, estará compreendendo de fato o que o Porismo afirma.

ATIVIDADE 2: Triângulo

- Recurso utilizado: Geogebra
- Objetivo: Verificar o Teorema de Euler-Chapple para triângulos bicêntricos.

Passo 1: Utilize a ferramenta *Círculo dados centro e um de seus pontos* para construir um círculo com centro A e raio qualquer. Nesse momento o ponto B aparecerá.

Passo 2: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque os pontos C e D sobre a circunferência determinada pelo círculo do passo anterior.

Passo 3: Construa o triângulo BCD, utilizando a ferramenta *Polígono*.

Passo 4: Agora, utilizando a ferramenta *Bissetriz*, trace as bissetrizes de dois dos ângulos internos desse triângulo.

Passo 5: Utilizando a ferramenta *Ponto* marque o ponto de interseção entre elas. Seja E esse ponto.

Passo 6: Desmarque as retas bissetrizes para facilitar a sua visualização.

Passo 7: Por E, construa a reta perpendicular a um dos lados do triângulo BCD, utilizando a ferramenta *Reta Perpendicular*.

Passo 8: Utilize a ferramenta *Ponto* para marcar o ponto de interseção da perpendicular com o segmento. Seja F esse ponto.

Passo 9: Desmarque a reta perpendicular para facilitar a sua visualização.

Passo 10: Construa o círculo de centro E e raio EF, utilizando a ferramenta *Círculo dados centro e um de seus pontos*.

Passo 11: Utilizando a ferramenta *Segmento*, construa o segmento EF e nomeie-o de “r”. Dica: Para nomear o segmento, clique com o botão direito do mouse e selecione a opção “Renomear”.

Passo 12: Utilizando a ferramenta *Segmento*, construa o segmento EA e nomeie-o de “d”.

Passo 13: Utilizando a ferramenta *Segmento*, construa o segmento AB e nomeie-o de “R”.

Passo 14: Clique em Exibir e em seguida, Janela CAS.

Passo 15: Na linha 1 digite $2*R*r$ e em seguida o símbolo \approx .

Passo 16: Na linha 2 digite $R^2 - d^2$.

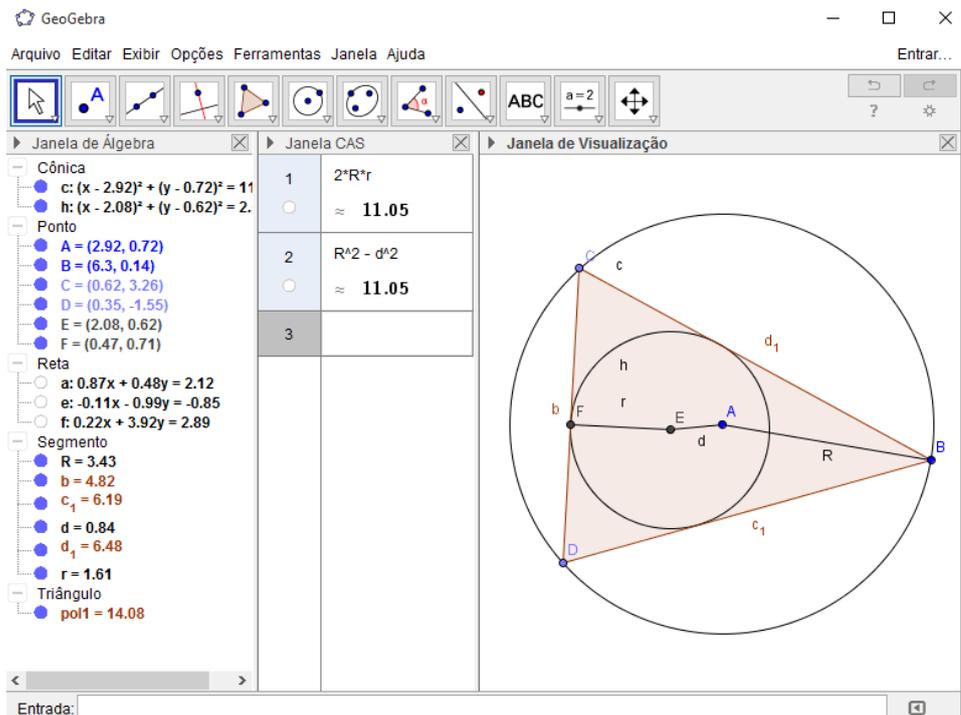


Figura 34 – Atividade 2

Perguntas:

- 1) O que você observa sobre os valores encontrados nas linhas 1 e 2 da janela CAS?
- 2) Movimente os pontos B, C e D. O que acontece com os valores encontrados nas linhas 1 e 2 da janela CAS?
- 3) Tente fazer o ponto A coincidir com o ponto E, e verifique as medidas dos segmentos que formam os lados do triângulo BCD. O que você pode observar?

Espera-se que os valores obtidos nas linhas 1 e 2 da janela CAS sejam os mesmos, verificando assim a relação $2.R.r = R^2 - d^2$. Assim, mesmo que o aluno movimente os pontos B, C ou D, essa relação ainda vale. E quando os pontos A e E coincidirem, espera-se que as medidas dos segmentos observados sejam iguais, caracterizando assim o caso do triângulo equilátero.

ATIVIDADE 3: Quadrilátero

- Recurso utilizado: Geogebra
- Objetivo: Verificar a fórmula de Fuss para quadriláteros bicêntricos.

Passo 1: Construa um círculo, utilizando a ferramenta *Círculo dados centro e raio*. Escolha a medida do raio.

Passo 2: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque os pontos B e C sobre a circunferência determinada pelo círculo do passo anterior.

Passo 3: Utilizando a ferramenta *Segmento* construa o segmento BC.

Passo 4: Agora, utilize a ferramenta *Reta Perpendicular* para traçar a reta perpendicular ao segmento BC que passa pelo ponto A.

Passo 5: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque as interseções dessa reta com a circunferência. Sejam D e E essas interseções.

Passo 6: Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa o polígono que passa por B, D, C e E.

Passo 7: Desmarque o segmento BC e a reta perpendicular para facilitar a sua visualização.

Passo 8: Agora, utilize a ferramenta *Bissetriz* para traçar as bissetrizes de dois dos ângulos internos desse quadrilátero.

Passo 9: Utilizando a ferramenta *Ponto* marque o ponto de interseção entre elas. Seja F esse ponto.

Passo 10: Desmarque as retas bissetrizes para facilitar a visualização.

Passo 11: Utilize a ferramenta *Reta Perpendicular* e, por F, construa a reta perpendicular a um dos lados do quadrilátero BDCE.

Passo 12: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque o ponto de interseção da perpendicular com o segmento. Seja G esse ponto.

Passo 13: Construa o círculo de raio FG, utilizando a ferramenta *Círculo dados centro e um de seus pontos*.

Passo 14: Utilizando a ferramenta *Segmento*, construa o segmento FG e nomeie-o de “r”.

Passo 15: Utilizando a ferramenta *Segmento*, construa o segmento FA e nomeie-o de “d”.

Passo 16: Utilizando a ferramenta *Segmento*, construa o segmento AB e nomeie-o de “R”.

Passo 17: Clique em Exibir e em seguida, Janela CAS.

Passo 18: Na linha 1 digite $2*r^2*(R^2 + d^2)$ e em seguida o símbolo \approx .

Passo 19: Na linha 2 digite $(R^2 - d^2)^2$ e em seguida o símbolo \approx .

The screenshot shows the GeoGebra interface with three main panels: Janela de Álgebra, Janela CAS, and Janela de Visualização.

- Janela de Álgebra:** Lists various objects including points (A, B, C, D, E, F, G), a quadrilateral (pol1), and several lines (b, f, g, h, i).
- Janela CAS:** Contains two lines of input:

1	$2*r^2*(R^2 + d^2)$	\approx	128.97
2	$(R^2 - d^2)^2$	\approx	128.97
- Janela de Visualização:** Displays a geometric diagram with a large circle and an inscribed quadrilateral. Points A, B, C, D, E, F, G are marked. Segments FG (labeled 'r'), FA (labeled 'd'), and AB (labeled 'R') are highlighted. Other segments like c, c1, k, d1, e, b1 are also shown.

Figura 35 – Atividade 3

Perguntas:

- 1) O que você observa sobre os valores encontrados nas linhas 1 e 2 da janela CAS?
- 2) Movimente os pontos B ou C. O que acontece com os valores encontrados nas linhas 1 e 2 da janela CAS?

- 3) Tente fazer o ponto A coincidir com o ponto F, e verifique as medidas dos segmentos que formam os lados do quadrilátero BDCE. O que você pode observar?

Espera-se que os valores obtidos nas linhas 1 e 2 da janela CAS sejam os mesmos, verificando a relação $2.r^2.(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$. Assim, ao movimentar os pontos B ou C, essa relação ainda vale. E quando os pontos A e E coincidirem, espera-se que as medidas dos segmentos observados sejam iguais, caracterizando assim o caso do quadrado. Observação: Como nem todo quadrilátero é inscrito e circunscrito ao mesmo tempo, o polígono construído deve possuir essa característica. Utilizamos para essa atividade o conhecido como “pipa” ou “papagaio”, que tem dois pares de lados consecutivos congruentes, mas os seus lados opostos não são congruentes.

6

Conclusão

O estudo dos polígonos bicêntricos é um assunto pouco abordado no ensino básico e também nos cursos de graduação. A inscrição e circunscrição de polígonos são normalmente estudadas de forma limitada, voltadas apenas para os casos dos polígonos regulares, em especial, o triângulo, o quadrado e o hexágono.

O trabalho apresentado sugere uma abordagem mais ampla da inscrição e circunscrição dos polígonos, tendo como base o porismo de Poncelet.

As propriedades dos polígonos bicêntricos são extremamente interessantes, e podem facilmente ser compreendidas por alunos do ensino médio. Além disso, possibilita fazer ligações com outros conteúdos da geometria, tais como arcos, ângulos, potência de ponto, tangência, etc.

Espera-se que o estudo apresentado nesta dissertação facilite a introdução dos polígonos bicêntricos em sala de aula, desperte nos alunos a curiosidade e a necessidade de ampliarem seus conhecimentos, e motive os professores ao uso de novas ferramentas e abordagens.

Referências Bibliográficas

FUCHS, D.; TABACHNIKOV, S. **Mathematical Omnibus**: Thirty Lectures on Classic Mathematics. United States: American Mathematical Society, 2007.

PONCELET'S PORISM. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html>>. Acesso em: 20 abril 2015.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA. **Del punto a los espacios multidimensionales**: Geometría Dinámica en la enseñanza media. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=Uq4Rgk8DiBEC&pg=PA39&lpg=PA39&dq=porisma+de+poncelet&source=bl&ots=Tn-B-mq-a9&sig=XnVnrpiEI8GckIHWXasij5sMwKM&hl=pt-BR&sa=X&ved=0CDAQ6AEwA2oVChMIza6kq_fixgIVgtGACH2VSAQx#v=onepage&q=porisma%20de%20poncelet&f=false>. Acesso em: 20 abril 2015.

EULER'S FORMULA AND PONCELET PORISM. Disponível em: <<http://www.cut-the-knot.org/triangle/EulerIO.shtml>>. Acesso em: 15 maio 2015.

FUSS' THEOREM. Disponível em: <<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml>> . Acesso em: 15 maio 2015.

INTRODUCTION TO PONCELET PORISMS. Springer, 2011. Disponível em: <http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9783034800143-p1.pdf?SGWID=0-0-45-1054140-p174034876>. Acesso em: 15 maio 2015.

NAGARAJAN, L. V. **Bi-centric Polygons**. Disponível em: <<https://lvnaga.wordpress.com/2014/05/13/bi-centric-polygons/>>. Acesso em: 13 junho 2015.

O TEOREMA DE STEWART. Disponível em:
<<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/02/o-teorema-de-stewart.html>>.
Acesso em 20 julho 2015.

Anexo

O Teorema de Stewart

O Teorema de Stewart relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana. Pode ser aplicado a qualquer ceviana.

Na demonstração apresentada anteriormente, ele foi utilizado para o cálculo da mediana.

Teorema: Seja ABC um triângulo qualquer, cujos lados medem a , b e c . Seja d uma ceviana e D o ponto de interseção da ceviana com o lado BC . Então

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

Demonstração: Considere a figura a seguir:

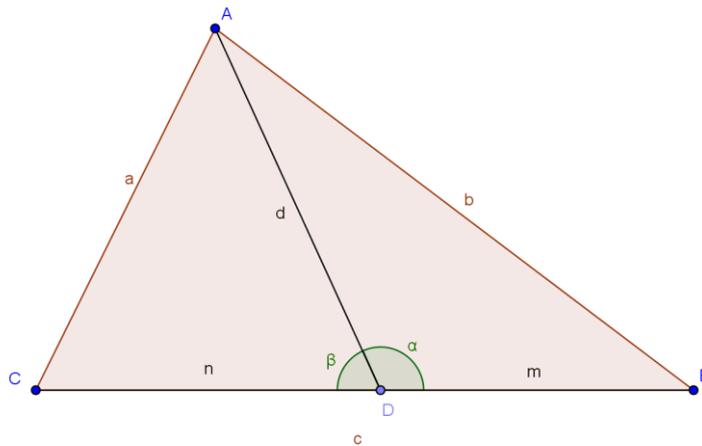


Figura 36 – Triângulo ABC e ceviana d

Sejam α e β os ângulos formados pelos segmentos m e d e n e d , respectivamente. Temos que α e β são suplementares.

Pela lei dos cossenos, temos que:

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot m \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = n^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos(\beta)$$

Mas $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$. Então,

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot m \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = n^2 + d^2 + 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos(\alpha)$$

Multiplicando a primeira equação por n e a segunda por m , fica

$$b^2 \cdot n = m^2 \cdot n + d^2 \cdot n - 2 \cdot d \cdot m \cdot n \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 \cdot m = n^2 \cdot m + d^2 \cdot m + 2 \cdot d \cdot m \cdot n \cdot \cos(\alpha)$$

Somando as equações, obtemos:

$$a^2 \cdot m + b^2 \cdot n = n^2 \cdot m + m^2 \cdot n + d^2 \cdot n + d^2 \cdot m$$

$$a^2 \cdot m + b^2 \cdot n = m \cdot n \cdot (m + n) + d^2 \cdot (m + n)$$

Mas $c = m + n$. Logo,

$$a^2 \cdot m + b^2 \cdot n = m \cdot n \cdot (c) + d^2 \cdot (c)$$

$$a^2 m + b^2 n - d^2 c = mnc \square$$

Agora, para o caso em que d é mediana, teremos $m = n$.

$$a^2 m + b^2 m - d^2 c = m^2 c$$

Mas $c = 2m$. Portanto,

$$a^2 m + b^2 m - d^2 2m = m^2 2m$$

Dividindo por m ,

$$a^2 + b^2 - d^2 2 = m^2 2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2d^2$$