

4

Formulação Matemática dos Modelos de Fratura Coesiva

Este capítulo apresenta a formulação matemática dos modelos de fratura coesiva e divide-se em quatro seções. A primeira seção é dedicada à apresentação do modelo de dano geral de elementos com base em modelos de fratura coesiva. A segunda é dedicada à formulação em elementos finitos dos elementos de fratura coesiva. Já a terceira, trata do modelo de fratura coesiva com base no potencial PPR. E por fim, a quarta seção é apresentada a formulação dos modelos de fratura coesiva Bi-linear e Linear exponencial.

4.1

Comportamento geral de modelos com base em zona coesiva

De maneira geral, os modelos com base em zona coesiva apresentam três tipos de respostas (Figura 4.1):

I - Fase de carregamento: o elemento se encontra em um regime linear-elástico, não apresenta dano algum. A tensão coesiva cresce linearmente em função da separação das faces do elemento.

II - Fase de amolecimento: o dano se desenvolve no material a partir de uma abertura crítica (δ_{nc} , δ_{lc}), para a qual as tensões geradas são máximas (T_{max}). Nesta fase o dano evolui até que as interfaces coesivas estejam totalmente separadas (δ_n , δ_t), já não existindo mais coesão entre as mesmas.

III - Fase de descarregamento: O dano é irreversível, fazendo com que o material apresente um decaimento em sua rigidez. Quando o carregamento externo é retirado, a curva tensão coesiva – deslocamento assume uma nova trajetória, descarregando linearmente até a origem.

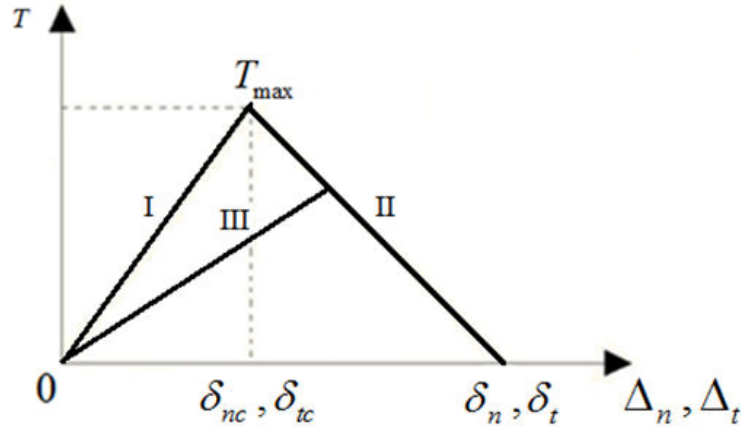


Figura 4.1: Lei constitutiva de tensão coesiva x separação.

4.2

Formulação em Elementos Finitos

A aplicação dos elementos de fratura coesiva na análise de fraturas consiste em uma abordagem discreta da fratura. Os elementos coesivos são introduzidos entre elementos finitos, onde a abertura é controlada por uma relação constitutiva, simulando assim as tensões coesivas na ponta da trinca.

A implementação computacional das interfaces coesivas via Princípio dos Trabalhos Virtuais trata-se da introdução de um termo de trabalho interno referente ao trabalho realizado pelas forças coesivas para a abertura da trinca. Dessa maneira, a equação de equilíbrio global que governa o problema de um corpo genérico (Figura 4.2) qualquer é dada por:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma dV + \int_{\Gamma_c} \delta \Delta : T_c dS = \int_{\Gamma} \delta u : T_{ext} dS \quad (4.1)$$

onde:

$\delta \varepsilon$ são as deformações virtuais;

δu são os deslocamentos virtuais;

$\delta \Delta$ é a abertura da trinca virtual;

σ são as tensões de Cauchy que atuam no domínio Ω ;

T_c é o vetor de tensões coesivas nas interfaces da trinca Γ_c ;

T_{ext} é o vetor de forças externas aplicadas no contorno Γ .

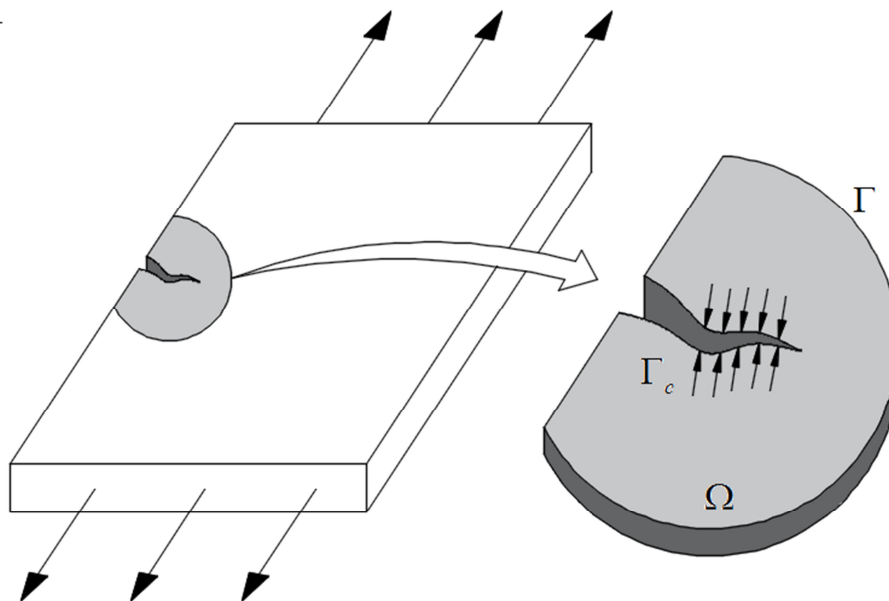


Figura 4.2: Corpo em estudo.

Para problemas bidimensionais, o elemento de fratura coesiva é unidimensional (Figura 4.3), em que n e t representam as direções normal e tangencial à interface, respectivamente. De forma padrão, a modelagem com interfaces coesivas considera a espessura do elemento na configuração inicial indeformada nula. Para um elemento de 4 nós (linear) tem-se que os nós 2 e 3 têm as mesmas coordenadas, assim como os nós 1 e 4.

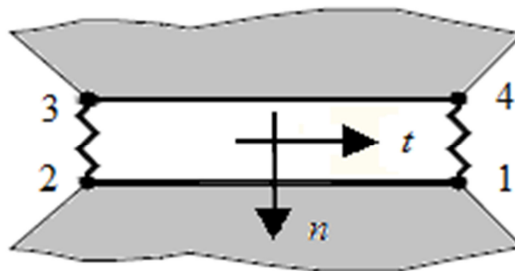


Figura 4.3: Elemento de fratura coesiva.

4.3

Modelo Polinomial de Zona Coesiva com base no Potencial PPR (Park-Paulino-Roesler)

4.3.1

Considerações iniciais

O modelo PPR faz uso da estrutura unificada proposta por Needleman (1987) e apresenta um potencial próprio que considera o acoplamento dos modos I e II. O potencial de PPR é dado pela Equação (4.2):

$$\begin{aligned} \psi(\Delta_n, \Delta_t) = \min(\phi_n, \phi_t) + & \left[\Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^m + \langle \phi_n - \phi_t \rangle \right] \\ & \left[\Gamma_t \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^n + \langle \phi_t - \phi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde:

ϕ_n e ϕ_t são, respectivamente, as energias de fratura normal e tangencial, a soma das duas energias corresponde a energia de fratura total, G_C ;

Γ_n e Γ_t são constantes de energia no modelo PPR;

Δ_n e Δ_t são, respectivamente, separação normal e tangencial ao longo da superfície de fratura;

δ_n e δ_t são, respectivamente, abertura normal e tangencial para separação completa;

α e β são parâmetros de forma do modelos PPR. Esses dois parâmetros são responsáveis pela forma do amolecimento da curva tensão x deslocamento;

m e n são constantes adimensionais do modelo PPR.

A partir das relações (2.15) e (2.16) chega-se às equações (4.3) e (4.4):

$$\begin{aligned} T_n(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{\Gamma_n}{\delta_n} & \left[m \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^{m-1} - \alpha \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^m \right] \\ & \left[\Gamma_t \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^n + \langle \phi_t - \phi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$T_t(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{\Gamma_t}{\delta_t} \left[n \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^{n-1} - \beta \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^{\beta-1} \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} \right)^n \right] \quad (4.4)$$

$$\left[\Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^m + \langle \phi_n - \phi_t \rangle \right]$$

4.3.2

Determinação dos parâmetros do modelo coesivo PPR

Para se efetuar uma análise de fratura com o modelo PPR é necessário fornecer ao modelo nove parâmetros de entrada. A partir desses parâmetros de entrada são calculados parâmetros internos para a estruturação do potencial PPR e assim a análise transcorrer. São os parâmetros de entrada:

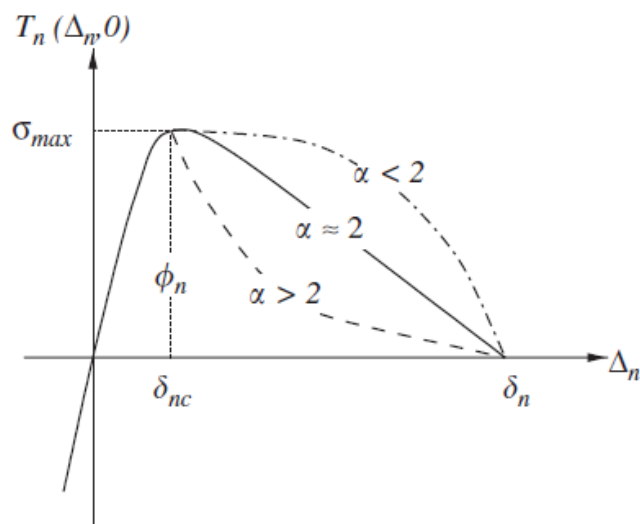
As tensões normal ($\sigma_{\max}$) e tangencial ($\tau_{\max}$) máximas que a interface da trinca suportará. Esses dados saem diretamente do resultado experimental (Figura 4.4).

As energias normal (ϕ_n) e tangencial (ϕ_t) dissipadas no processo de fratura. Estes dois parâmetros são obtidos a partir do cálculo da área abaixo das curvas de um diagrama de tensão-separação experimental, em modo I puro e/ou modo II puro (Figura 4.4).

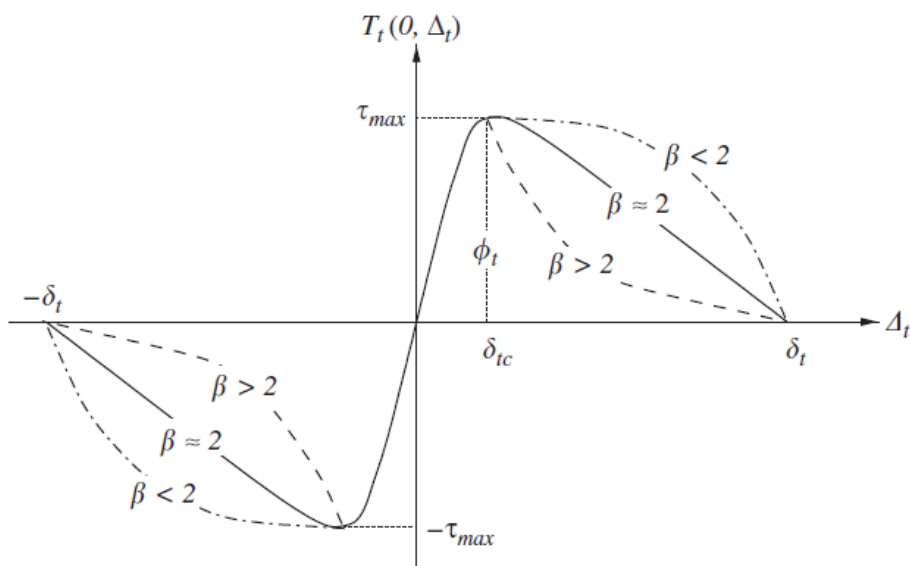
$$\phi_n = \int_0^{\delta_n} T_n(\Delta_n, 0) d\Delta_n \quad (\text{modo I}) \quad (4.5)$$

$$\phi_t = \int_0^{\delta_t} T_t(0, \Delta_t) d\Delta_t \quad (\text{modo II}) \quad (4.6)$$

Os dois parâmetros de forma responsáveis pela concavidade da curva dos modelos constitutivos na fase de amolecimento são o parâmetro alpha (α) responsável pela curva em modo I e o parâmetro beta (β) responsável pela curva em modo II (Figura 4.4)



(a) Parâmetro de forma alpha.



(b) Parâmetro de forma beta.

Figura 4.4: Caracterização do tipo de amolecimentos a partir dos parâmetros de forma.

Os dois parâmetros responsáveis pela inclinação inicial dos gráficos tensão x deslocamento são os indicadores de inclinação normal (λ_n) e tangencial (λ_t).

Os dois parâmetros seguem as seguintes relações:

$$\lambda_n = \frac{\delta_{nc}}{\delta_n} \quad (4.7)$$

$$\lambda_t = \frac{\delta_{tc}}{\delta_t} \quad (4.8)$$

Sendo que δ_{nc} e δ_{tc} são as aberturas críticas da trinca nas direções normal e tangencial, respectivamente. Nesse ponto o material chega à máxima tensão que a interface coesiva suporta e o dano se inicia.

E δ_n e δ_t são as aberturas para as separações completas nas direções normal e tangencial, respectivamente. Neste ponto o material já não apresenta rigidez alguma estando com o dano completo.

Tanto as aberturas críticas quanto as aberturas para as separações completas são obtidas a partir dos gráficos tensão x deslocamento experimentais (Figura 4.4).

E por fim, é fornecida ao modelo coesivo a largura do elemento. Esta propriedade geométrica é obtida a partir da dimensão do corpo-de-prova.

Fornecido ao modelo estes parâmetros de entrada, o próprio modelo realiza os cálculos dos parâmetros internos para a construção do potencial PPR como segue a seguir:

Cálculo dos parâmetros m e n que estão relacionados com a inclinação inicial da fase de carregamento no diagrama tensão-deslocamento.

$$m = \frac{\alpha(\alpha-1)\lambda_n^2}{(1-\alpha\lambda_n^2)} \quad (4.9)$$

$$n = \frac{\beta(\beta-1)\lambda_t^2}{(1-\beta\lambda_t^2)} \quad (4.10)$$

Cálculo da abertura final normal e tangencial da trinca, respectivamente.

$$\delta_n = \frac{\phi_n}{\sigma_{\max}} \alpha \lambda_n (1-\lambda_n)^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha}{m} + 1 \right) \left(\frac{\alpha}{m} \lambda_n + 1 \right)^{m-1} \quad (4.11)$$

$$\delta_t = \frac{\phi_t}{\tau_{\max}} \beta \lambda_t (1-\lambda_t)^{\beta-1} \left(\frac{\beta}{n} + 1 \right) \left(\frac{\beta}{n} \lambda_t + 1 \right)^{n-1} \quad (4.12)$$

Cálculo das constantes de energia. Dependendo do valor da energia normal e tangencial tem-se uma maneira específica de calcular as constantes de energia.

Para o caso $\phi_n \neq \phi_t$, tem-se:

$$\Gamma_n = (-\phi_n)^{\frac{\langle \phi_n - \phi_t \rangle}{\phi_n - \phi_t}} \left(\frac{\alpha}{m} \right)^m \quad (4.13)$$

$$\Gamma_t = (-\phi_t)^{\frac{\langle \phi_t - \phi_n \rangle}{\phi_t - \phi_n}} \left(\frac{\beta}{n} \right)^n \quad (4.14)$$

Para o caso $\phi_n = \phi_t$, tem-se:

$$\Gamma_n = -\phi_n \left(\frac{\alpha}{m} \right)^m \quad (4.15)$$

$$\Gamma_t = \left(\frac{\beta}{n} \right)^n \quad (4.16)$$

4.4

Modelo Polinomial de fratura coesiva Bi-linear e Linear exponencial

4.4.1

Considerações iniciais

Os modelos de fratura coesiva Bi-linear e Linear exponencial utilizam a estrutura unificada proposta por Needleman (1987). No entanto, assim como Tvergaard (1990), estes modelos não apresentam um potencial para a definição das tensões coesivas. Para o cálculo das tensões é apresentada uma função generalizada que descreve o comportamento das tensões geradas nas interfaces nas fases de carregamento e de amolecimento.

Genericamente, os modelos coesivos Bi-linear e Linear exponencial apresentam uma lei coesiva que pode ser escrita segundo a seguinte equação:

$$T = \begin{cases} K_0 \delta, & \Delta_n \leq \delta_{nc} \\ (1-D) K_0 \delta, & \delta_{nc} < \Delta_n < \delta_n \\ 0, & \Delta_n \geq \delta_n \end{cases} \quad (4.17)$$

Percebe-se que na Equação (4.17) estão presentes três situações distintas, onde cada uma delas mostra o comportamento da tensão medida no elemento. São estas situações (Figura 4.5):

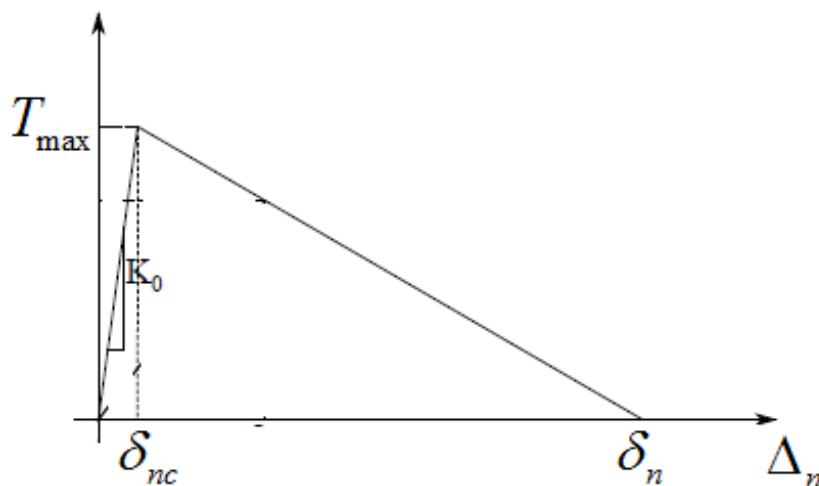


Figura 4.5: Lei constitutiva para o modelo coesivo Bi-linear para modo I.

A primeira parte corresponde à fase linear (fase de carregamento), nessa região a tensão cresce até atingir a tensão máxima que a interface suporta. Este trecho é controlado pela variável K_0 (rigidez de penalidade), responsável por controlar a inclinação inicial da função.

A segunda parte da função corresponde à fase de amolecimento. Neste trecho é inserida a variável de dano D . Essa variável por sua vez é calculada através do conceito de deslocamento efetivo proposto por Camanho e Davila (2002).

Durante a fase de carregamento a variável de dano tem o valor zero. A partir do ponto crítico, a variável de dano passa a crescer monotonicamente até assumir o valor unitário. Neste ponto a tensão coesiva é zero.

Por fim, a terceira fase, para qualquer valor de deslocamento a tensão coesiva medida na interface vai apresentar valor zero, pois não há mais coesão entre as interfaces.

Na fase linear os dois elementos coesivos (Bi-linear e Linear exponencial) têm as mesmas características. A diferença se dá justamente na fase de amolecimento, sendo linear ou exponencial. O cálculo do amolecimento fica em função do dano.

Para o cálculo da evolução do dano a partir dos deslocamentos efetivos é apresentada por Camanho e Davila (2002) a seguinte função para um amolecimento linear:

$$D = \frac{\delta_n \cdot (\delta_n^{\max} - \delta_{nc})}{\delta_n^{\max} \cdot (\delta_n - \delta_{nc})} \quad (4.18)$$

onde:

δ_n É o deslocamento efetivo referente à abertura completa;

δ_{nc} É o deslocamento efetivo referente ao início do dano;

$\delta_n^{\max}$ É o valor máximo do deslocamento efetivo atingido durante todo o histórico de carregamento.

Para o amolecimento exponencial é apresentada a seguinte expressão:

$$D = 1 - \left(\frac{\delta_{nc}}{\delta_n^{\max}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1 - \exp \left(-\varphi \left(\frac{\delta_n^{\max} - \delta_{nc}}{\delta_n - \delta_{nc}} \right) \right)}{1 - \exp(-\varphi)} \right) \quad (4.19)$$

onde:

φ é o parâmetro que controla o amolecimento.

4.4.2

Determinação dos parâmetros dos elementos coesivos Bi-linear e Linear exponencial

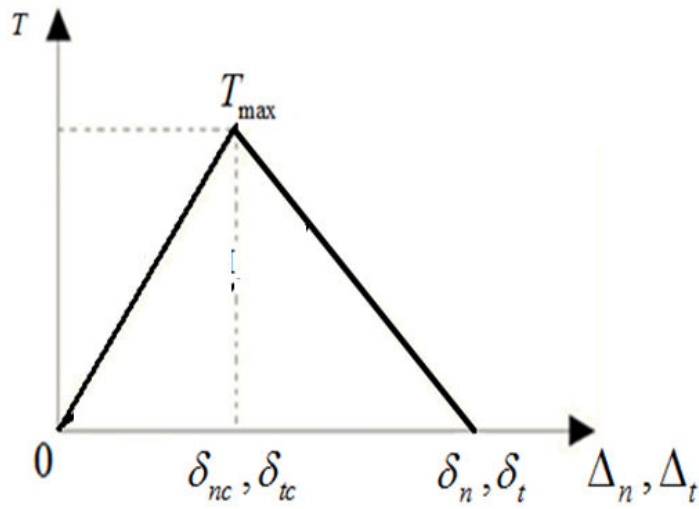
Para se realizar uma análise de fratura com os modelos Bi-linear e Linear exponencial é necessário fornecer aos modelos nove parâmetros de entrada. São os parâmetros de entrada:

As tensões normal ($\sigma_{\max}$) e tangencial ($\tau_{\max}$) máximas que a interface da trinca suportará. Esses dados saem diretamente do resultado experimental (Figura 4.6).

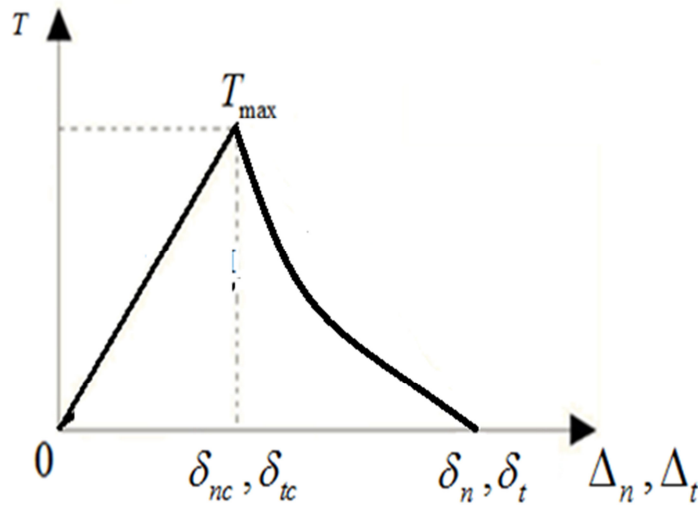
As energias normal (G_{IC}) e tangencial (G_{IIC}) dissipadas no processo de fratura. são obtidas a partir do cálculo da área abaixo das curvas de um diagrama de tensão-separação experimental. Porém para os modelos Bi-linear e Linear exponencial a área de interesse é compreendida entre o deslocamento crítico (δ_{nc} , δ_{tc}) e aberturas para as separações completas (δ_n , δ_t) conforme a Figura 4.6.

$$G_{IC} = \int_{\delta_{nc}}^{\delta_n} T_n(\Delta_n, 0) d\Delta_n \quad (\text{modo I}) \quad (4.20)$$

$$G_{IC} = \int_{\delta_{lc}}^{\delta_t} T_t(0, \Delta_t) d\Delta_t \quad (\text{modo II}) \quad (4.21)$$



(a) Modelo constitutivo Bi-linear.



(b) Modelo constitutivo Linear exponencial.

Figura 4.6: (a) Modelo constitutivo Bi-linear, (b) Modelo constitutivo Linear exponencial.

Para a inclinação inicial da curva na fase de carregamento da Figura 4.6 é necessário fornecer a rigidez de penalidade inicial (K_{nn}) para o modo I e (K_{ss}) para o modo II. Esses dois parâmetros são obtidos segundo as relações:

$$K_{nn} = \frac{T_{n,\max}}{\delta_{nc}} \quad (4.22)$$

$$K_{ss} = \frac{T_{t,max}}{\delta_{tc}} \quad (4.23)$$

Para o modelo Linear exponencial é fornecido também o parâmetro φ responsável pelo controle do amolecimento da Figura 4.6 (b).

É necessário também fornecer o valor da diferença entre o deslocamento efetivo relativo ao início do dano (δ_{nc} , δ_{tc}) e o deslocamento efetivo relativo à abertura completa (δ_n , δ_t).

$$\Delta\delta_n = \delta_n - \delta_{nc} \quad (4.24)$$

$$\Delta\delta_t = \delta_t - \delta_{tc} \quad (4.25)$$

E por fim, é fornecida ao modelo coesivo a largura do elemento. Esta propriedade geométrica é obtida a partir da dimensão do corpo-de-prova.

A partir desses parâmetros é adotado um critério de iniciação do dano. Esse critério é uma função quadrática envolvendo a relação entre as tensões calculadas em cada ponto durante o incremento de tempo de análise e a tensão máxima suportada pela interface. Quando esta relação tem como resultado o valor 1 significa que para esse nível de carregamento o dano se iniciou.

$$\left\{ \frac{\langle T_n \rangle}{T_{n,max}} \right\}^2 + \left\{ \frac{T_t}{T_{t,max}} \right\}^2 = 1 \quad (4.26)$$

Dois critérios para evolução do dano podem ser utilizados na fase de amolecimento: com base no conceito de deslocamentos efetivos ou o com base na energia dissipada no processo de fratura. No presente trabalho foram utilizados os dois. O conceito de deslocamentos efetivos foi utilizado para os ensaios numéricos em modos I e II puros e o critério de energia dissipada na fratura foi utilizado no ensaio de modo misto.

No ensaio de modo misto, o critério energético utilizado para a evolução do dano foi a lei de potência (Abaqus *documentation*, 2011), que consta de uma função que estabelece a interação entre as taxas de liberação de energia durante o processo de fratura.

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}} \right)^\eta + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}} \right)^\eta = 1 \quad (4.27)$$

onde:

η Representa um parâmetro adimensional de controle;

G_{IC} e G_{IIC} Representam as energias totais requeridas para ocorrer o processo de fratura;

G_I e G_{II} Representam as energias a cada incremento da análise.

Quando a relação entre as energias tiver o valor 1, o processo de falha está completo.

A Figura 4.7 mostra o processo de interação entre as tensões normal e tangencial, os deslocamentos normal e tangencial no modo misto de fratura.

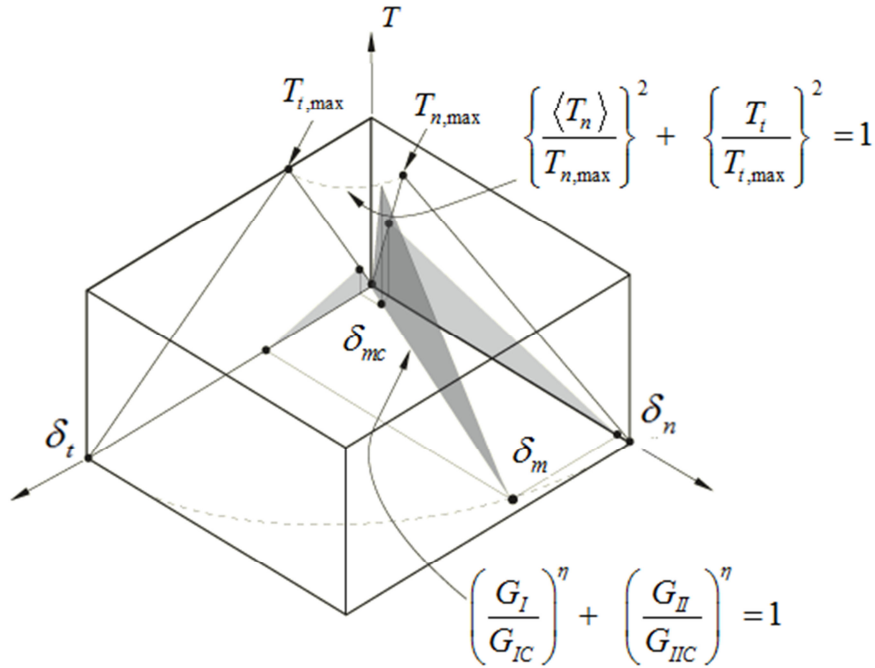


Figura 4.7: Diagrama da resposta do elemento Bi-linear em modo misto.

Fonte: Abaqus Documentation, 2011.

Onde deslocamento efetivo resultante é dado pela expressão proposta por Camanho e Davila (2002):

$$\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_t^2} \quad (4.28)$$