3
Aplicação da Metodologia

3.1
Placa fina

3.1.1
Campo de deslocamentos

Para o problema da placa fina têm-se seis deslocamentos generalizados em cada ponto, duas translações uz_i ; duas rotações em $\varphi\theta_i$ e duas rotações em φr_i (i=1,2). Considerando-se pequenos deslocamentos, mostra-se que o giro no plano r-z é $\varphi\theta = \frac{\partial w}{\partial r}$ e no plano θ-z é $\varphi r = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$ que podem ser substituídas nas equações (2-4) tendo:

$$u_r(r,\theta,z) = z\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{43}$$

$$u_\theta(r,\theta,z) = -z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{44}$$

$$u_z(r,\theta,z) = w \tag{45}$$

3.1.2
Campo de deformações

Sabe-se que para a teoria das placas finas as deformações $\varepsilon_{zz}, \gamma_{\theta z}$ e γ_{rz} são aproximadamente iguais à zero. Substituindo as equações (43-45) de deslocamentos, nas equações (5), (6) e (8) obtemos:

$$\varepsilon_{rr} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \tag{46}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \tag{47}$$

$$\gamma_{r\theta} = -z\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{48}$$

3.1.3
Funções descritivas dos deslocamentos e graus de liberdade

No elemento da placa, além de ter graus de liberdade translação perpendicular à superfície média, temos as rotações da seção transversal.

O campo de deslocamentos da placa fina w_f é dado por um vetor de funções básicas w_{Bf}, que tem como elementos duas translações uz_i; e duas rotações $\varphi\theta_i$ (i=1,2); e o vetor de funções adicionais w_{Af} que são aproximações das funções de interpolação polinomiais de terceiro grau. Para descrever os deslocamentos circunferenciais tem que adicionar os vetores w_{BTf} e w_{ATf} que resulta da multiplicação dos vetores $w_{Bf}\ e\ w_{Af}$ por uma função trigonométrica $(sen\theta)$.

$$w_f = \begin{Bmatrix} w_{Bf} \\ w_{Af} \\ w_{BTf} \\ w_{ATf} \end{Bmatrix} \tag{49}$$

$$w_{Bf} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

$$w_{Af} = \begin{Bmatrix} N_5 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix} \tag{51}$$

$$w_{BTf} = w_{Bf} \ sen\theta \qquad w_{ATf} = w_{Af} \ sen\theta \tag{52}$$

Onde $N_1 \ldots N_4$ são as funções de interpolação básicas nodais; $N_5 \ldots N_n$ são as funções de interpolação adicionais que permitem descrever deslocamentos e deformações internas.

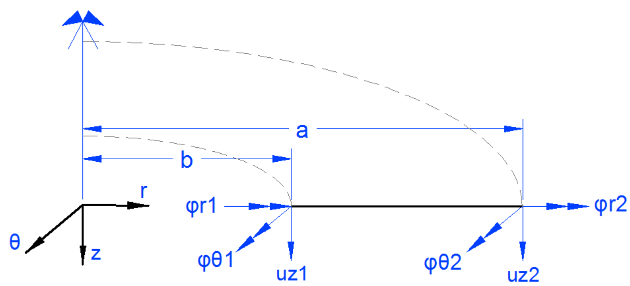

Figura 3-1: Graus de liberdade de a placa circular.

3.1.4
Funções Nodais

As funções de forma polinomiais de uma viga que descrevem os quatro graus de liberdade da placa a partir dos deslocamentos nodais são polinômios cúbicos que tem graus de liberdade de rotação e translação nas extremidades correspondentes.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & \qquad N_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & \qquad N_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \tag{53}$$

Sabendo que estas funções de interpolação cumprem as condições básicas do problema por ter translações e rotações máximas nos nós. Os valores de x e L na equação (53) cumprem com as seguintes relações:

$$x = r - b \qquad L = a - b \tag{54}$$

3.1.5
Funções adicionais

As funções adicionais $N_5 \ldots N_n$ são funções que fornecem deslocamentos e rotações nulos nas extremidades.

$$N_{\geq 5} = A + B\left(\frac{x}{L}\right) + C\left(\frac{x}{L}\right)^2 + D\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^{n+3} \tag{55}$$

Foi adotada uma função básica polinomial de terceiro grau, no qual precisa da determinação das constantes A, B, C e D e isto se dá através de condições apropriadas de contorno. Ou seja, as funções e suas tangentes (primeira derivada) se anulam nos extremos $(x = 0,\ x = L)$ obtendo assim os valores das constantes, para poder substituir na equação 55, tendo como resultado a seguinte expressão:

$$N_{\geq 5} = n\left(\frac{x}{L}\right) - (1+n)\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^{n+3} \tag{56}$$

Substituindo os valores da equação (54) na equação (56) tem-se.

$$N_{\geq 5} = n\left(\frac{r-b}{a-b}\right)^2 - (1+n)\left(\frac{r-b}{a-b}\right)^3 + \left(\frac{r-b}{a-b}\right)^{n+3} \tag{57}$$

Onde n é o número de polinômios adicionais que precisa para refinar o problema.

3.1.6
Energia de deformação da placa fina

Conhecendo o campo de deslocamentos da placa fina pode-se conhecer a energia interna da placa. Substituindo as deformações das equações (46-48) e as tensões das equações (11), (12) e (14) na equação (33) e integrando com respeito de h e simplificando, chega-se a seguinte igualdade:

$$U = Do\int_b^a\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)^2 \\ -2(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \\ +2(1-\nu)\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\end{bmatrix} r\,dr\,d\theta\,dz + \frac{1}{2}\int_b^a\int_0^{2\pi} k\, w^2\, r\,dr\,d\theta \tag{58}$$

Na expressão acima, k é o coeficiente da base elástica e Do, é o coeficiente de rigidez da placa dado por:

$$Do = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{59}$$

Onde ν é o coeficiente de Poisson e E é o Modulo de Elasticidade do material.

3.1.7
Matriz de rigidez da placa fina

A matriz de rigidez da placa fina será composta com a somatória de energias de deformação da mesma. Para realizar a análise matricial destas integrais precisamos das seguintes parcelas:

$$\{V1\} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \tag{60}$$

$$\{V2\} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \tag{61}$$

$$\{V3\}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \tag{62}$$

$$\{V4\}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{63}$$

Então, substituindo as igualdades (60-63) na integral (58), obtemos:

$$\begin{aligned}[K_E] &= \int_b^a\int_0^{2\pi} Do\,\{V1\}\{V1\}^T\; rd\theta dr + \int_b^a\int_0^{2\pi} Do\,\{V2\}\{V3\}^T\; rd\theta dr \\ &+ \int_b^a\int_0^{2\pi} Do\,\{V3\}\{V2\}^T\; rd\theta dr + \int_b^a\int_0^{2\pi} Do\,\{V4\}\{V4\}^T\; rd\theta dr \\ &+ \int_b^a\int_0^{2\pi} k\,\{w\}\{w\}^T\; rd\theta dr\end{aligned} \tag{64}$$

3.1.8
Vetor de forças

O tipo de carga que é considerado é a carga uniforme distribuída perpendicular na superfície media da placa. Para calcular o vetor de forças pode ser feita através da energia potencial de cargas externas da seguinte forma:

$$[P]=-\int_b^a\int_0^{2\pi} qz\,\{w\}\,rdrd\theta \tag{65}$$

3.1.9
Matriz de massa

A matriz de massa será descrita pela seguinte expressão, onde ρ é a massa específica do material:

$$\begin{aligned}[M] = \rho\int_{-h/2}^{h/2}\int_{b}^{a}\int_{0}^{2\pi}\{w\}\{w\}^T r\,d\theta\,dr\,dz \\ +\frac{\rho h^2}{12}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{b}^{a}\int_{0}^{2\pi}\{w\}_{,r}\{w\}_{,r}^T r\,d\theta\,dr\,dz \\ +\frac{\rho h^2}{12}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{b}^{a}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}\{w\}_{,\theta}\{w\}_{,\theta}^T r\,d\theta\,dr\,dz\end{aligned} \tag{66}$$

3.1.10 Matriz geométrica

A matriz de rigidez geométrica para a placa circular fina pode ser obtida pelo trabalho realizado pelas forças constantes agindo em direção axial do plano médio da placa. A matriz de rigidez geométrica pode ser obtida por:

$$[K_G] = h\int_{b}^{a}\int_{0}^{2\pi}\sigma_r\,\{w\}_{,r}\{w\}_{,r}^T r\,d\theta\,dr + h\int_{b}^{a}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}\sigma_\theta\,\{w\}_{,\theta}\{w\}_{,\theta}^T r\,d\theta\,dr \tag{67}$$

3.2 Placa espessa

3.2.1 Campo de deformações

A deformação que uma placa circular espessa sofre é $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}\ e\ \gamma_{\theta z}$. Então, substituindo as equações (2-4) nas equações (5-6) e (8-10) obtêm-se:

$$\varepsilon_{rr} = z\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}\right) \tag{68}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{z}{r}\left(\varphi_\theta - \frac{\partial\varphi_r}{\partial\theta}\right) \tag{69}$$

$$\gamma_{r\theta} = -z\left[\frac{\partial\varphi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} - \varphi_r\right)\right] \tag{70}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_r}{\partial z} \tag{71}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial\varphi_\theta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{72}$$

3.2.2
Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos da placa espessa é dado por três vetores que descrevem translações uz_i no eixo z, rotações $\varphi\theta_i$ no eixo θ e rotações φr_i no eixo r, $(i = 1{,}2)$. Como se pode ver na figura 3.1, os vetores que descrevem estas translações e rotações são: $w_e, \varphi r_e\ e\ \varphi\theta_e$. Para o caso de carregamento axissimétrico interessam os seguintes vetores:

$$w_e = \begin{Bmatrix} w_{Be} \\ w_{Ae} \end{Bmatrix}; \quad \varphi r_e = \begin{Bmatrix} \varphi r_{Be} \\ \varphi r_{Ae} \end{Bmatrix}; \quad \varphi\theta_e = \begin{Bmatrix} \varphi\theta_{Be} \\ \varphi\theta_{Ae} \end{Bmatrix} \tag{73}$$

$$w_{Be} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \\ N_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \varphi r_{Be} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \\ N_5 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \varphi\theta_{Be} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \\ 0 \\ 0 \\ N_6 \end{Bmatrix} \tag{74}$$

$$w_{Ae} = \begin{Bmatrix} Nw \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \varphi r_{Ae} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N\varphi r \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \varphi\theta_{Ae} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N\varphi\theta \end{Bmatrix} \tag{75}$$

Nas expressões acima $w_{Be}, \varphi r_{Be}, \varphi\theta_{Be}$ são vetores que tem como elementos $N_1 \ldots N_6$ polinômios básicos de interpolação nodais, que descrevem os deslocamentos e rotações nodais. $w_{Ae}, \varphi r_{Ae}, \varphi\theta_{Ae}$ Estes são vetores que tem como elementos $N_7 \ldots N_n$, são funções de interpolação adicionais que descrevem deslocamentos e rotações internas, onde Nw é o numero de funções adicionais de translação no eixo z; $N\varphi r$ é o numero de funções adicionais de rotação no eixo r; e $N\varphi\theta$ é o numero de funções adicionais de rotação no eixo θ. Dentro de cada uma das funções adicionais tem-se como elementos uma função par e ímpar. Então o número total de elementos de cada função adicional pode ser calculado da seguinte forma:

$$Nw = N\varphi r = N\varphi\theta = 2\left(N_{\mathrm{Im}\,par} + N_{Par}\right) \tag{76}$$

Agora, ao se considerar um carregamento não axissimétrico, temos vetores divididos em duas partes, a primeira com funções básicas e funções adicionais que já foi desenvolvida acima; a segunda parte que tem como elementos os vetores multiplicados por a função trigonométrica $(sen\theta)\ ou\ (\cos\theta)$.

$$w_e = \begin{Bmatrix} w_{Be} \\ w_{Ae} \\ w_{BTe} \\ w_{ATe} \end{Bmatrix}; \quad \varphi r_e = \begin{Bmatrix} \varphi r_{Be} \\ \varphi r_{Ae} \\ \varphi r_{BTe} \\ \varphi r_{ATe} \end{Bmatrix}; \quad \varphi\theta_e = \begin{Bmatrix} \varphi\theta_{Be} \\ \varphi\theta_{Ae} \\ \varphi\theta_{BTe} \\ \varphi\theta_{ATe} \end{Bmatrix} \tag{77}$$

Nessas equações, $w_{BTe}, w_{ATe}, \varphi_{BTe}, \varphi_{ATe}, \varphi\theta_{BTe}\ e\ \varphi\theta_{ATe}$ são elementos do vetor que descrevem as deformações radiais e circunferenciais não axissimétricos.

$$\begin{Bmatrix} w_{BTe} \\ w_{ATe} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_B \\ w_A \end{Bmatrix}(sen\theta); \quad \begin{Bmatrix} \varphi r_{BTe} \\ \varphi r_{ATe} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi r_B \\ \varphi r_A \end{Bmatrix}(\cos\theta)$$
$$\begin{Bmatrix} \varphi\theta_{BTe} \\ \varphi\theta_{ATe} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi\theta_B \\ \varphi\theta_A \end{Bmatrix}(sen\theta) \tag{78}$$

3.2.3
Funções nodais

As funções de forma polinomiais de primeiro grau que descrevem os seis graus de liberdade da placa a partir dos deslocamentos nodais tem quatro graus de liberdade de rotação e duas de translação nas extremidades correspondentes.

$$N_{1,2,3} = 1 - \frac{x}{L}; \qquad N_{4,5,6} = \frac{x}{L} \tag{79}$$

Substituindo os valores de x e L da equação (54) na equação (79) obtemos com as seguintes relações,

$$N_{1,2,3} = 1 - \frac{r-b}{a-b}; \qquad N_{4,5,6} = \frac{r-b}{a-b} \tag{80}$$

3.2.4
Funções adicionais

As funções adicionais $N_7 \ldots N_n$ são polinômios hierárquicos que não tem um significado físico, mas que ajudam a descrever as deformações dentro do domínio da placa.

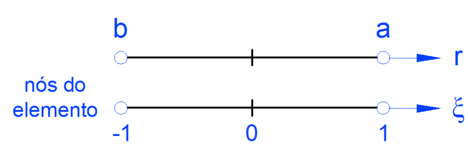

Figura 3-2. Relação de coordenadas normalizadas e coordenadas globais

$$\xi = c\,r + d \tag{81}$$

Nesta expressão a equação linear relaciona as coordenadas normalizadas com as globais. Para isso é necessário conhecer as constantes *c* e *d* substituindo as duas condições nodais que se conhecem:

$$\left.\begin{array}{ll} r=b & \rightarrow \xi=-1 \\ r=a & \rightarrow \xi=1 \end{array}\right\} \quad c=\frac{2}{a-b}; \quad d=\frac{2b}{a-b}-1 \tag{82}$$

Substituindo as constantes c e d da equação (82) e o valor de *x* na equação (81) obtém-se o valor de ξ é:

$$\xi=\frac{2(r-b)}{a-b}-1 \tag{83}$$

Uma alternativa prática para definir as funções adicionais é escolhendo dois tipos de polinômios pares e impares como pode se mostrar:

$$N_{\geq 7}=\begin{cases} 1-\xi^{2n} & n\ par \\ \xi-\xi^{2n} & n\ impar \end{cases} \tag{84}$$

Esta série de polinômios tem sempre valores nulos nos extremos do seu domínio, substituindo o valor de ξ na equação (83), tem-se:

$$\begin{aligned} N_{par>7} &= 1-\left(\frac{2(r-b)}{a-b}-1\right)^{2n} \\ N_{\mathrm{Im}\,par\geq 7} &= \left(\frac{2(r-b)}{a-b}-1\right)\left(1-\left(\frac{2(r-b)}{a-b}-1\right)^{2n}\right) \end{aligned} \tag{85}$$

3.2.5
Graus de liberdade

Na placa espessa serão considerados seis graus de liberdade, duas translações no eixo z duas rotações no eixo r e duas rotações no eixo θ. Que serão descritos com os vetores $w, \varphi_r\ e\ \varphi_\theta$ respectivamente.

$$w=\begin{Bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \\ w_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \varphi_\theta=\begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_5 \\ 0 \end{Bmatrix} \varphi_r=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_6 \end{Bmatrix} \tag{86}$$

Aonde cada grau de liberdade é igual a uma função nodal polinomial $w_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 = N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$.

3.2.6
Relação tensão deformação

A relação tensão deformação para uma placa elástica espessa pode ser descrita pelas equações (11-12) e (14-16):

$$\sigma_{rr} = \frac{E\,z}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\nu}{r}\left(\varphi_\theta - \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}\right)\right] \tag{87}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E\,z}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\frac{1}{r}\left(\varphi_\theta - \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}\right) + \nu\left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r}\right)\right] \tag{88}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{E\,z}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} - \varphi_r\right)\right] \tag{89}$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right] \tag{90}$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\right] \tag{91}$$

3.2.7
Energia de deformação da placa espessa

Uma vez conhecido o campo de deslocamentos e deformações da placa espessa pode se enxergar a energia de deformação da placa espessa, sabendo que a relação tensão deformação para uma placa elástica espessa pode ser descrida pelas tensões $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta})$ que são tensões normais e $(\sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z})$ que são tensões cisalhantes.

$$U = \frac{1}{2}\int_b^a\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\left[\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta} + \tau_{rz}\gamma_{rz} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z}\right] rdrd\theta dz \\ + \frac{1}{2}\int_b^a\int_0^{2\pi} k\, w^2\, rdrd\theta \tag{92}$$

Na qual a segunda parcela desta integral é a energia do apoio elástico da placa.

3.2.8
Matriz de rigidez da placa espessa

A matriz de rigidez pode ser construída através do princípio da energia de deformação. Sabendo que a deformação pode ser representada de maneira vetorial, então consideramos os seguintes elementos como vetores coluna $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z})$ os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são dados por

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \qquad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{93}$$

Com os valores da equação (93), integrando a equação (92) de tensões e deformações torna-se:

$$[K_E] = \int_b^a\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\begin{pmatrix} \{\varepsilon_{rr}\}E'\{\varepsilon_{rr}\}^T + \nu\{\varepsilon_{\theta\theta}\}E'\{\varepsilon_{rr}\}^T + \nu\{\varepsilon_{rr}\}E'\{\varepsilon_{\theta\theta}\}^T \\ +\{\varepsilon_{\theta\theta}\}E'\{\varepsilon_{\theta\theta}\}^T + \{\gamma_{r\theta}\}G\{\gamma_{r\theta}\}^T + \{\gamma_{rz}\}G\{\gamma_{rz}\}^T \\ +\{\gamma_{\theta z}\}G\{\gamma_{\theta z}\}^T \end{pmatrix} rdr\,d\theta\,dz \\ + \int_b^a\int_0^{2\pi} k\{w\}\{w\}^T\, rdrd\theta \tag{94}$$

Aonde k é o coeficiente de rigidez de apoio elástico e w é o vetor de funções de deformação na direção da aplicação das molas.

3.2.9
Vetor de forças

O tipo de carga que é considerado é a carga uniforme distribuída perpendicular na superfície média da placa. Para calcular o vetor de forças utiliza-se a energia potencial de cargas externas:

$$[P] = -\int_b^a \int_0^{2\pi} q_z \{w\} r dr d\theta \tag{95}$$

3.2.10
Matriz de massa

A matriz de massa contém a ação inercial de um elemento devido as acelerações unitárias nos graus de liberdade. Estas ações inerciais são transformadas em forças concentradas nos nós. Substituindo os deslocamentos na equação (35), obtemos:

$$[M] = \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\{u_r\}\{u_r\}^T + \{u_\theta\}\{u_\theta\}^T + \{u_z\}\{u_z\}^T \right) r dr d\theta dz \tag{96}$$

3.2.11
Matriz geométrica

A matriz de rigidez geométrica para a placa circular pode ser obtida pelo trabalho realizado pelas forças constantes agindo em direção axial do plano médio da placa. Estas forças são as tensões das equações (40-41). A matriz de rigidez geométrica pode ser obtida em função da energia de deformação das cargas externas, equação (39).

$$\begin{aligned}[K_G] &= \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} \{\varphi_\theta\}\{\varphi_\theta\}^T r\, dr d\theta dz \\ &+ \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} \{\varphi_r\}\{\varphi_r\}^T r\, dr d\theta dz \end{aligned} \tag{97}$$

3.3 Matriz de rigidez dos apoios

O número total de funções é dado por

$$N_{Tf} = N_{pb} + N_{pa} \tag{98}$$

Onde $N_{pb} = 6$ que é o número total de funções básicas e N_{pa} é o número total de funções adicionais.

A matriz de apoios terá de tamanho $(N_{Tf} \times N_{Tf})$, e para conhecer os seis elementos da diagonal principal da matriz é preciso conhecer as condições de contorno do problema utilizado o Método das Penalidades.

Terão que conhecer as rigidezes das molas que se encargam de restringir as rotações e translações nos nós.

$$K_{Ap} = \left[\begin{array}{c|ccc|c|cc} K_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{66} & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{(N_{Tf} \times N_{Tf})} \tag{99}$$

3.4 Frequências naturais

As frequências podem ser obtidas através da solução da seguinte equação:

$$\{\lambda\} = [M]^{-1} [K_E] \tag{100}$$

Onde $[M]$ é a matriz de massa e $[K_E]$ é a matriz elástica da placa. Resolvendo este problema obtemos os auto valores para poder obter desta forma as frequências naturais do sistema $\{\lambda\} = \{\omega^2\}$.

3.5 Carga crítica

Para o cálculo das cargas críticas utiliza-se a mesma formulação já citada no capítulo 2, a partir disto pode se obter a seguinte formulação para a obtenção desta carga:

$$\{\lambda\} = -[K_G]^{-1}[K_E] \tag{101}$$

Onde se sabe que $[K_G]$ é a matriz geométrica e $[K_E]$ é a matriz elástica da placa. Resolvendo este problema obtemos os auto valores para obter desta forma a carga crítica o sistema $\{\lambda\} = \{\omega^2\}$.

3.6 Matriz de carga seguidora

A matriz da carga seguidora não conservativa que depende linearmente dos deslocamentos é a seguinte:

$$[K_L]_{34} = -\int_0^a \int_0^{2\pi} Pcr\ dr d\theta \tag{102}$$

$$[K_L] = \left[\begin{array}{c|ccc|c|cc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & K_{34} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{(N_{Tf} \times N_{Tf})} \tag{103}$$

3.7 Carga crítica dinâmica

Para a obtenção da carga críticas parte-se da seguinte análise:

$$\{\lambda\} = [K_G + K_L]^{-1} [K_E] \tag{104}$$

Onde se sabe que $[K_L]$ é a matriz de carga seguidora da placa. Resolvendo este problema obtemos os auto valores para obter desta forma a carga crítica o sistema $\{\lambda\} = \{\omega^2\}$.

3.8 Variação de espessura da placa

Para o projeto de a placa circular anular pode ser considerada uma variação da espessura linear, quando a espessura da placa incrementa-se linearmente com o raio.

$$h = \left(\frac{h_1 - h_0}{a - b} \right) (r - b) + h_0 \tag{105}$$

Onde h_0 é a espessura interna, h_1 é a espessura externa da placa e *a* e *b* são os raios externo e interno como pode observar na figura 2.3.