

2

Desenvolvimento de Teorias de Placas

Neste capítulo mostra-se o desenvolvimento da formulação utilizada para a realização do estudo de análise de vibração e flambagem de placas circulares anulares.

Para fazer um resumo breve dos autores que pesquisaram sobre o tema de placas, é necessário mencionar o matemático e físico Euler que em 1776 realizou uma análise de vibração livre de problemas de placas e Chadni, físico alemão que também investigou a vibração de placas. A teoria de Kirchhoff contribuiu no estudo de teoria de placas de flexão. No final do século XIX e início do século XX, o interesse por este tema aumentou devido aos construtores navais terem mudado seus métodos de construção ao substituir a madeira por aço estrutural. Esta mudança de materiais estruturais foi extremamente proveitosa para o desenvolvimento de várias teorias de placas, Krylov e seu aluno Bubnov contribuíram extensivamente com a teoria de placas finas com rigidez à flexão e extensionais. Galerkin também estudou problemas de placas sujeitas a flexão.

Stephen P. Timoshenko fez uma contribuição significativa para a teoria e aplicação de análise à flexão de placas circulares. Entre as inúmeras contribuições importantes de Timoshenko têm-se as soluções de placas circulares e a formulação de problema de estabilidade elástica serão necessárias para o desenvolvimento e compreensão desse trabalho.

Este assunto é tratado por (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959) onde apresentam uma profunda análise de diversos problemas de placas a flexão. Entre outras literaturas podemos apresentar (VENTSEL e KRAUTHAMMER, 2001), onde se soluciona o problema da placa fina circular com um carregamento uniforme axissimétrico (simetria axial).

O trabalho de (CHAKRAVERTY, 2009) também auxiliou o desenvolvimento deste trabalho. Ele estudou as vibrações em placas circulares anulares finas elípticas utilizando polinômios ortogonais de duas dimensões de contorno característico (BOPs 2D).

Nas últimas décadas tem-se estudado o problema de vibração de placas circulares finas, uns destes personagens importantes são: (WEAVER, JR, TIMOSHENKO e YOUNG, 1990) que calcularam as frequências e modos de vibrações em placas circulares.

A análise do valor crítico da força axial de compressão uniforme foi realizada por (TIMOSHENKO e GERE, 1963). Esta análise foi realizada para dois casos diferentes; o primeiro para uma placa simplesmente apoiada no contorno e a segunda análise para uma placa engastada em todo o contorno.

No artigo de (HOSSEINI-HASHEMI, ES'HAGHI, *et al.*, 2010) encontra-se o cálculo das frequências naturais e deslocamentos para placas circulares espessas, com diferentes condições de contorno e com base na teoria de deformação de terceira ordem de Reddy.

Numa publicação (ALIPOUR e SHARIYAT, 2011) fez a análise de flambagem das placas circulares viscoelásticas com gradação funcional e a análise de sensibilidade completa para avaliar os efeitos de vários parâmetros na carga de flambagem.

No trabalho de (MAZHARI e SHAHIDI, 2011) encontra-se determinado o comportamento pós-flambagem de placas homogêneas circulares com furo concêntrico submetido a uma carga radial uniforme utilizando o método de Rayleigh-Ritz, usando também a teoria não-linear Von-Karman.

Os estudos de (WANG, XIANG, *et al.*, 1993) analisaram placas Mindlin circulares com suportes de anéis concêntricos carregados radialmente, em que a solução deste problema teve como base a abordagem de Rayleigh-Ritz e também analisaram determinados fatores de flambagem.

A formulação do método Rayleigh-Ritz (COOK, MALKUS, *et al.*, 2002) tem uma forma clássica no método dos elementos finitos, ele foi originado em 1870 por Rayleigh e depois foi generalizado por Ritz através da

construção de um campo de aproximação de várias funções, as quais satisfazem as condições cinemáticas. Este método é um procedimento para a determinação de parâmetros de um campo de deslocamentos generalizado.

2.1 Considerações Iniciais

Considera-se uma placa circular anular sujeita a diferentes tipos de carregamento, conforme é mostrado na Fig. 2.2 e 2.3. Onde se consideram as seguintes variáveis:

$a = \text{Raio Externo}$

$b = \text{Raio Interno}$

$q_0, q_1 = \text{Carregamento axissimétrico}$

$p_0, p_1, p_2 = \text{Carregamento não axissimétrico}$

$Pz = \text{Carregamento Pontual}$

Utiliza-se um sistema de coordenadas cilíndricas, no qual os eixos r e θ descrevem o plano médio da placa e o eixo z é perpendicular à mesma, a orientação positiva dos eixos coordenados são mostrados na figura 2-1.

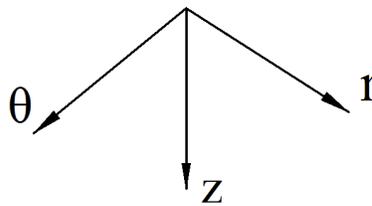


Figura 2-1: Eixos Coordenados

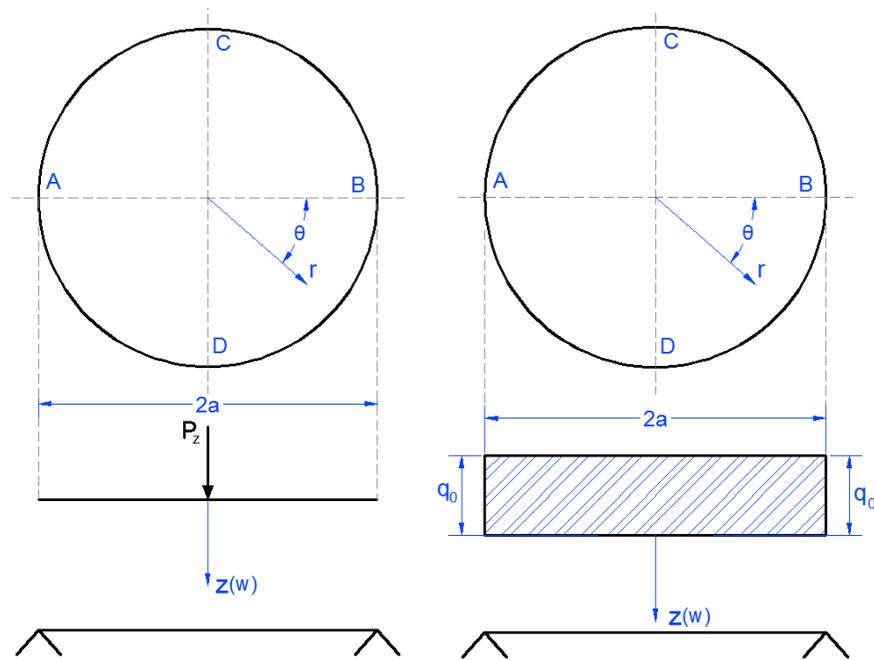


Figura 2-2: (esquerda) Carregamento pontual, (direita) Tipo de carregamento axissimétrico, ambos os casos para uma placa circular.

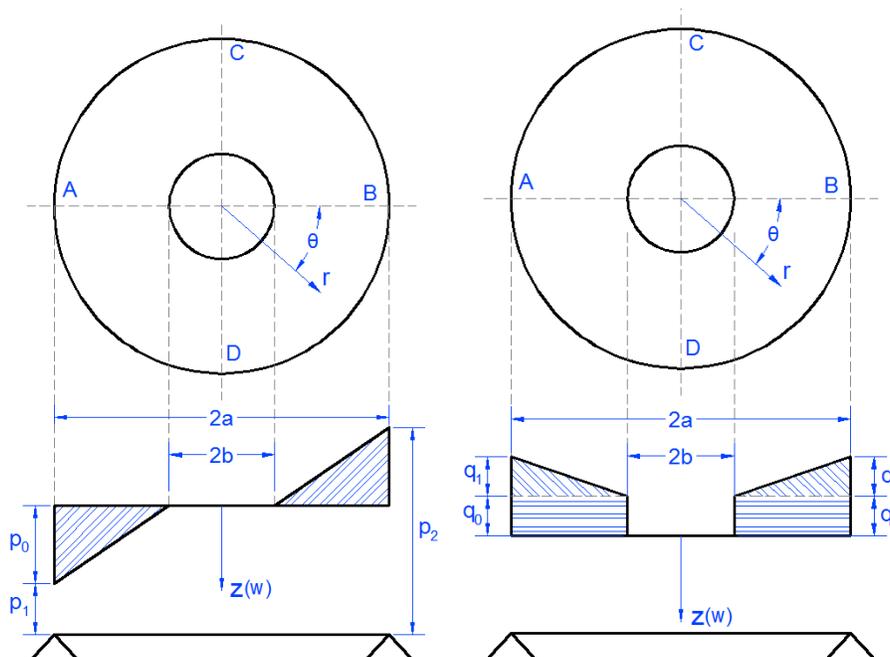


Figura 2-3: (esquerda) Tipo de carregamento Axissimétrico, (direita) tipo de carregamento não axissimétrico, ambos os casos para uma placa circular anular.

A função que descreverá os carregamentos axissimétricos e não axissimétricos com variação linear na placa será a seguinte:

$$q_z = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{a - b}(r - b) + p_0 \left(\frac{r}{a} \right) \sin \theta \quad (1)$$

O valor de θ sempre dependerá da variação não axissimétrica.

2.2

Placa Fina

Para análise da placa fina consideram-se as seguintes hipóteses:

- A deflexão do plano médio da placa é pequena em comparação à espessura, portanto a inclinação da superfície deformada é muito pequena e o quadrado da inclinação é uma quantidade desprezível.
- As linhas retas inicialmente normais ao plano médio permanecem retas e perpendiculares à superfície média, e durante a deformação o comprimento de tais elementos não é alterado. Isto significa que as deformações de cisalhamento γ_{rz} e $\gamma_{\theta z}$ são desprezíveis e a deformação normal ε_z pode também ser omitida. A tensão normal ao plano médio σ_z é pequena em comparação com os outros componentes de tensão e pode ser desprezada nas relações tensão-deformação.
- Assumindo que os deslocamentos de uma placa são pequenos, assume-se que a superfície média permanece sem tensão depois da flexão da placa.

Muitas dessas suposições conhecidas como hipóteses de Kirchhoff, são análogas as da teoria de flexão simples de vigas. Estes pressupostos resultam na redução de um problema de placa tridimensional para um bidimensional. Conseqüentemente, a equação que rege a placa pode ser derivada de uma forma para frente de forma concisa e direta. A teoria de

placas com base nas premissas acima é referida como a teoria clássica de Kirchhoff. Salvo disposição em contrário, a validade da teoria de Kirchhoff é assumida para placas finas.

2.3

Placa Espessa

Para placas espessas as hipóteses de Kirchhoff deixam de ser adequadas. Neste caso, a Teoria de Reissner-Mindlin permite considerar efeitos significativos das deformações de cisalhamento.

O sistema de eixos coordenados a ser considerado é o sistema $r\theta z$ representado na figura 2.4, o qual é definido de tal modo que o plano $r\theta$ seja coincidente com o plano médio da placa antes da deformação e o eixo z seja normal ao plano médio da placa.

As hipóteses de Reissner-Mindlin que são consideradas válidas para placas espessas, utilizadas para efeitos de representação do campo de descolamentos e das tensões em placas com isotropias totais submetidas a ações normais ao plano médio, são:

- A superfície média é plana e indeformável, ou seja, as deformações no plano $r\theta$ são nulas.
- As linhas retas inicialmente normais ao plano médio permanecem retas, mas não necessariamente normal à superfície média fletida. Tendo em conta isto, os deslocamentos u_r e u_θ de um ponto P da placa situado a uma distância z do plano médio podem ser calculados a partir dos valores das rotações φ_θ e φ_r da normal que após deformação se admitiu ser linear, mas não necessariamente normal à superfície média fletida.

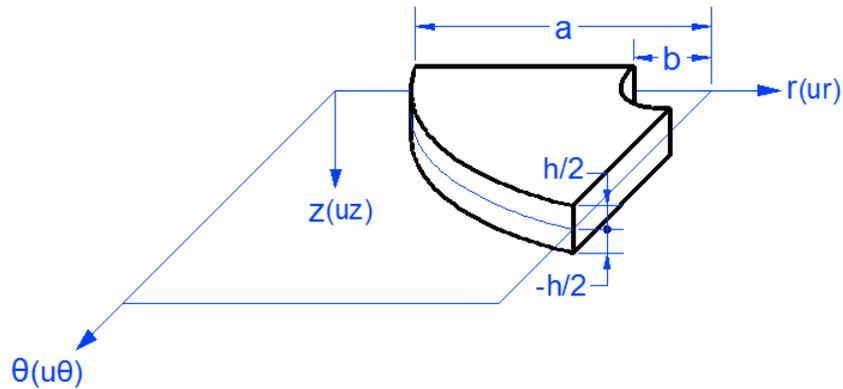


Figura 2-4: Geometria de uma porção da placa com superfície média.

2.4 Formulação do problema

Para a descrição da espessura de uma placa circular anular mostrado na figura 2.5, são considerados os seguintes parâmetros:

h_0 = Altura do raio interno

h_1 = Altura do raio externo

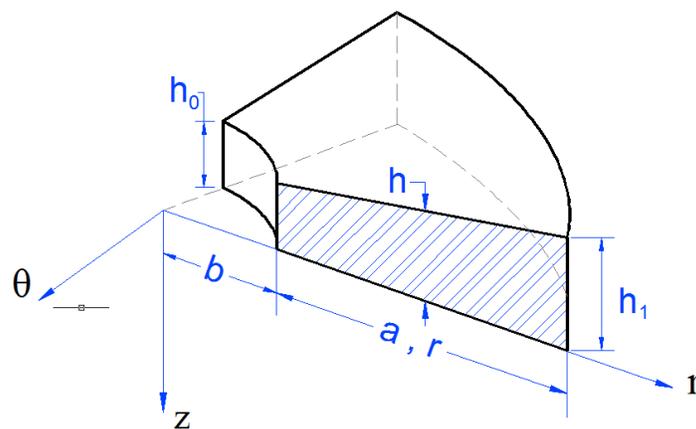


Figura 2-5: Características geométricas de uma seção da placa circular

Para uma forma conveniente de representar a relação entre deformações e características do material é preciso escolher um campo de deslocamento.

Campo de deslocamentos

Sabe-se que o campo de deslocamentos tem a seguinte forma:

$$u_r(r, \theta, z) = z \varphi_\theta \quad (2)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = -z \varphi_r \quad (3)$$

$$u_z(r, \theta, z) = w \quad (4)$$

Onde u_r e u_θ são os deslocamentos radial e angular da superfície média da placa; u_z é o deslocamento transversal; φ_r e φ_θ são as rotações em o plano r-z e o plano θ -z.

Relações de deslocamentos e deformações.

As deformações associadas com os deslocamentos são dadas pelas seguintes relações:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \quad (8)$$

$$\gamma_{\theta z} = 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (9)$$

$$\gamma_{rz} = 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (10)$$

Onde $\frac{\partial(\bullet)}{\partial}$ ($\bullet = u_r, u_\theta, u_z$) é a derivada respeito de (r, θ, z) .

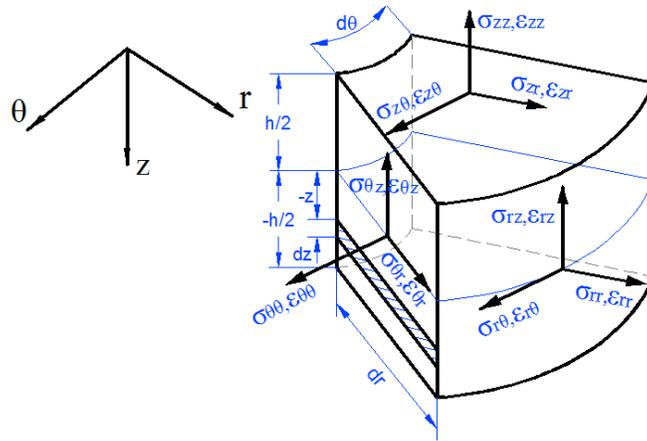


Figura 2-6. Gráfica do estado de tensões em um elemento infinitesimal da placa.

Relação tensão deformação

A relação tensão deformação para uma placa elástica pode ser descrita pela seguinte forma:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{\theta\theta}) \tag{11}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{\theta\theta} + \nu \epsilon_{rr}) \tag{12}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \tag{13}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta} \tag{14}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz} \tag{15}$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\theta z} \tag{16}$$

Nas expressões acima, E é o Modulo de Young e ν e o coeficiente de Poisson. Na teoria das placas finas as tensões $\sigma_{\theta z}$, σ_{rz} são desprezadas.

As tensões são proporcionais à distância z do elemento diferencial, pode-se analisar na figura 2-7, que a distribuição destas tensões nas faces do elemento pode ser reduzida pela representação dos momentos atuantes. Para uma placa fina obtêm-se os esforços, com as seguintes fórmulas.

$$M_{rr} = -Do \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (17)$$

$$M_{\theta\theta} = -Do \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right] \quad (18)$$

$$M_{r\theta} = (1-\nu) Do \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (19)$$

Da mesma forma podemos representar os cortantes

$$Q_{rr} = -Do \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (20)$$

$$Q_{\theta\theta} = -Do \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (21)$$

Para uma placa espessa obtêm-se os esforços por médio de uma integração através da espessura, sendo cada um deles calculado num comprimento unitário, com as seguintes fórmulas.

$$M_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} z dz \quad (22)$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz \quad (23)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} z dz \quad (24)$$

As forças cortantes podem-se obter da mesma forma.

$$Q_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} z^2 dz \quad (25)$$

$$Q_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z} z^2 dz \quad (26)$$

Onde M_{rr} e $M_{\theta\theta}$ são os momentos fletores; $M_{r\theta}$ é o momento de torção que atua no plano da placa, como pode se mostrar na figura 2-7.

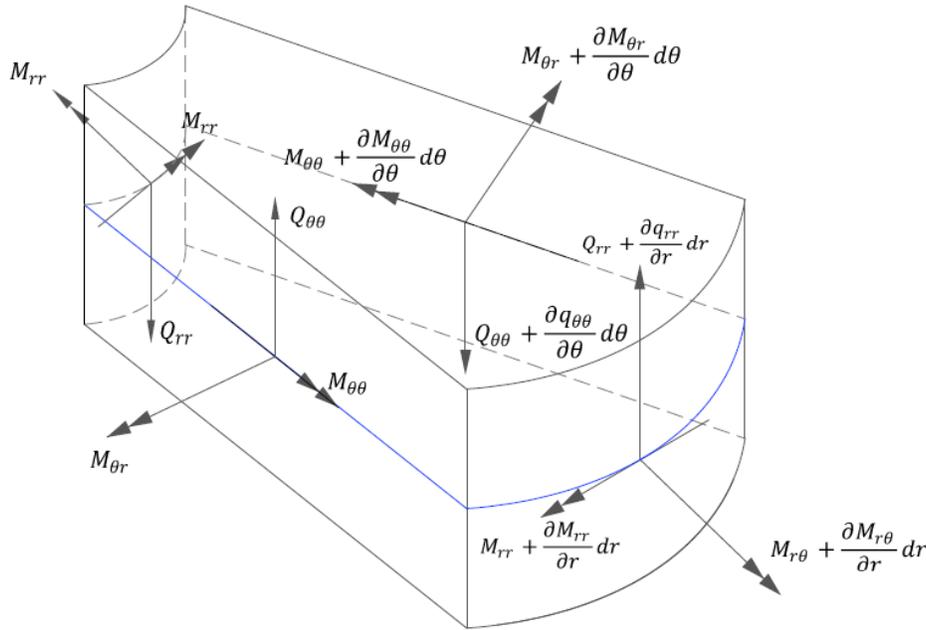


Figura 2-7: Momentos e esforços cortantes do elemento infinitesimal.

Equação para o deslocamento vertical da placa

Se a placa estiver sob um carregamento uniforme o deslocamento vertical w será independente de θ , o que leva a uma solução geral da seguinte forma:

$$w = C_1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 C_2 + \ln\left(\frac{r}{a}\right) C_3 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) C_4 + \frac{q r^4}{64 D_0} \quad (27)$$

Onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes de integração, que podem se encontrar para diferentes condições de contorno.

No caso de um bordo engastado, as condições de contorno serão

$$(w)_r = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_r = 0 \quad (28)$$

No caso de um bordo simplesmente apoiado

$$(w)_r = 0 \quad (M_{rr})_r = 0 \quad (29)$$

No caso de um bordo livre

$$(M_{rr})_r = 0 \quad V = \left(Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \quad (30)$$

Se a placa estiver sob um carregamento variável linearmente o deslocamento vertical w terá a solução geral da seguinte forma:

$$w = \frac{1}{192} \frac{p a^4}{D_o} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^5 + \left(\frac{r}{a} \right) C_1 + \left(\frac{r}{a} \right)^3 C_2 + \left(\frac{a}{r} \right) C_3 + \left(\frac{r}{a} \right) \ln \left(\frac{r}{a} \right) C_4 \right] \cos \theta \quad (31)$$

Da mesma forma C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes de integração, que podem se encontrar para diferentes condições de contorno. As soluções acima estão disponíveis nos textos clássicos sobre placas (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Método Rayleigh-Ritz

A energia de deformação total do sistema V é igual à soma da energia de deformação por flexão U de uma placa circular e a energia potencial das cargas externas Ω (sujeita a um carregamento transversal q_z):

$$V = U + \Omega \quad (32)$$

A energia de deformação por flexão de uma placa fina sujeita a uma base elástica, desprezando-se o efeito das tensões no eixo z como menciona a teoria clássica de placas, é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \sigma_{rz} \gamma_{rz} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z}) r dr d\theta dz \quad (33)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} k w^2 r dr d\theta$$

A primeira integral acima representa a energia de deformação por flexão e a segunda representa a energia potencial armazenada nas molas que representam o apoio elástico da placa.

A energia potencial das cargas externas Ω , para um sistema conservativo, é igual ao trabalho realizado pelas cargas aplicadas quando a estrutura está deformada, e é dada pela seguinte equação:

$$\Omega = - \int_b^a \int_0^{2\pi} q_z w r dr d\theta \quad (34)$$

Onde q_z é a componente do carregamento externo transversal aplicado sobre a superfície da placa, e w é a função de deformação do elemento.

Análise dinâmico

Para o problema de dinâmica de placas pelo método das energias é preciso ter a expressão da energia cinética T que é dada pela seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) r dr d\theta dz \quad (35)$$

Onde ρ é a densidade da placa; e o ponto acima dos campos de deslocamentos representa a diferenciação com respeito ao tempo.

Frequências Naturais

O cálculo das frequências naturais e os modos de vibração conduzem a um problema linear de autovalor e autovetor generalizado da seguinte forma.

$$([K_E] - \omega^2 [M]) \{\delta\} = 0 \quad (36)$$

Onde os autovalores representam o quadrado das frequências naturais e os autovalores os modos de vibração.

Cálculo da Carga crítica de Flambagem

Para o cálculo da carga crítica aproximada de flambagem, utiliza-se o método variacional Rayleigt-Ritz, a determinação da carga crítica de flambagem pode ser obtida através da minimização do quociente de Rayleigh começando da igualdade da energia de deformação e o trabalho das forças externas.

$$([K_E] - \lambda[K_G]) = 0 \quad (37)$$

$$\lambda = [K_G]^{-1}[K_E] \quad (38)$$

A magnitude de carga crítica é representada pelo fator λ ; portanto, o valor da carga crítica resulta da relação entre a matriz da energia de deformação geométrica $[K_G]$ pela matriz da rigidez da energia de deformação elástica $[K_E]$.

No qual a energia de deformação elástica e dada pela seguinte forma:

$$[K_G] = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} \varphi_{\theta}^2 r dr d\theta dz + \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} \varphi_r^2 r dr d\theta dz \quad (39)$$

Para este caso da placa circular anular, as tensões distribuídas nas faces são $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{rr} .

Para obter os valores das cargas críticas axiais P_{cr} é preciso conhecer a solução do problema de Lamé, cuja solução representa tensões de um cilindro oco submetido a uma pressão uniforme nos bordos externos e internos, para isso têm-se as seguintes expressões:

$$\sigma_{rr} = \frac{b^2 a^2 (P_{ext} - P_{int})}{a^2 - b^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_{int} b^2 - P_{ext} a^2}{a^2 - b^2} \quad (40)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{b^2 a^2 (P_{int} - P_{ext})}{a^2 - b^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_{int} b^2 - P_{ext} a^2}{a^2 - b^2} \quad (41)$$

Nas expressões acima, P_{ext} é a pressão externa P_{int} é a pressão externa uniformemente distribuída como pode se ver na figura 2.8. Para a obtenção de P_{cr} teremos que tomar em conta a seguinte igualdade:

$$P_{ext} = P_{int} = \frac{P_{cr}}{h} \quad (42)$$

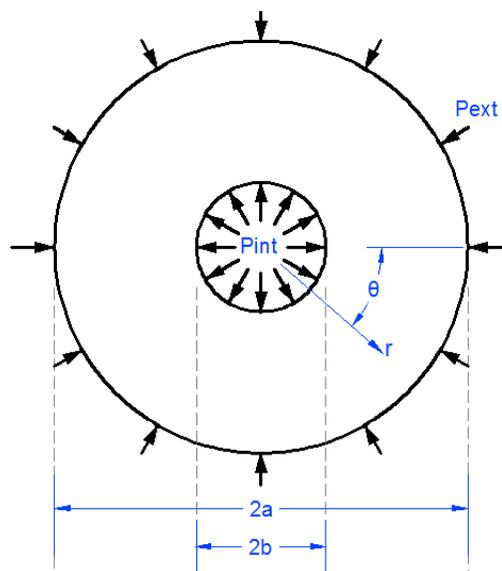


Figura 2-8: Pressão axial uniformemente distribuída interna e externa da placa circular.