



Joaquin Leonel Sanchez Salas

**Modelo para Instabilidade e Vibrações
de Placas Circulares**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro
Junho de 2015



Joaquin Leonel Sanchez Salas

**Modelo para Instabilidade e Vibrações
de Placas Circulares**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Raul Rosas e Silva

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Carlos Alberto de Almeida

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Glauco Jose de Oliveira Rodrigues

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Sebastiao Arthur Lopes de Andrade

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 25 de junho de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, da orientadora e da universidade.

Joaquin Leonel Sanchez Salas

Graduou-se em Engenharia Civil pela UPB (Universidade Privada Boliviana) em Cochabamba, Bolívia em maio de 2012. Ingressou no mestrado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em março de 2013, desenvolvendo dissertação na linha de pesquisa de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas.

Ficha Catalográfica

Sanchez Salas, Joaquin Leonel

Modelo para instabilidade e vibrações de placas circulares / Joaquin Leonel Sanchez Salas ; orientador: Raul Rosas e Silva. – 2012.

117 f. il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Placa circulares e anulares. 3. Placa de espessura variável. 4. Carga conservativa e não conservativa. 5. Estabilidade de placas circulares. 6. Cargas seguidoras tangenciais não conservativas. 7. Método de Rayleigh-Ritz. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

Aos meus pais e minhas irmãs.

Agradecimentos

Para o meu orientador Raul Rosas e Silva, que me apoiou, me guiou e transmitiu muito conhecimento com todos os ensinamentos que foram passados em aulas cursadas no mestrado da PUC-Rio e pela orientação para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor Glauco Jose de O. Rodrigues, pela contribuição do enfoque do tema da dissertação e pela disponibilidade em ajudar para o desenvolvimento deste.

Ao meu professor e amigo íntimo Juan Ángel Ronda Vásquez, que foi o que despertou em mim a vontade de fazer o mestrado.

A minha família brasileira que souberam me acolher e me fazer parte da família. Obrigado, porque hoje posso falar que minha família cresceu até o Brasil e que ganhei pais e irmãos brasileiros.

A PUC-Rio por dar-me a oportunidade de poder cursar o mestrado nesta interinstituição muito reconhecida no Brasil.

A todos os meus companheiros do mestrado, que me ajudaram a crescer como pessoa e a conhecer a diversidade de costumes e culturas do mundo (América Latina, Europa e África).

Obviamente, agradeço à minha família Boliviana, que sempre estiveram e estão no meu coração. Sem eles não teria feito nada do que consegui atualmente. Obrigado a minha mãe Magaly e meu pai Luis por me apoiarem neste sonho e obrigado as minhas irmãs Carola, Gabriela, Mariela, Cecilia (desde o céu) e Brenda por estarem presentes nos momentos que mais precisei.

A todos os professores e funcionários da PUC-Rio.

A CAPES por incentivar-me com uma bolsa de estudos, que me ajudou a realizar esta pesquisa.

Resumo

Salas, Joaquin Leonel Sanchez; Silva, Raul Rosas e. **Modelo para Instabilidade e Vibrações de placas Circulares**. Rio de Janeiro, 2015. 117 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho mostra uma versão do método Rayleigh-Ritz com funções especializadas para a análise de placas circulares e anulares finas e espessas sujeitas a cargas fora do plano e em plano. As funções de aproximação para deslocamentos são polinômios em direção radial combinada com funções trigonométricas na direção circunferencial. Um recurso conveniente é o uso de funções nodais lineares, que permitem a fácil consideração de cargas nodais e condições de contorno (incluindo forças seguidoras), enriquecidos por polinômios de ordem superior, sem inclusão de nós adicionais. O modelo permite a variação da espessura e é aplicado em MAPLE18, possibilitando o cálculo de deslocamentos e tensões sob carregamento constante e de variação linear, as frequências de vibração, cargas de flambagem com alguns efeitos do nível de carga conservativa e não conservativa. Os exemplos mostram a eficácia desta abordagem na análise de tal estrutura e leva um novo enfoque a este problema clássico, que apresenta comparações interessantes e originais que descrevem o efeito de deformação de cisalhamento, no caso de vibrações o efeito das rotações inerciais e variação de espessura em placas circulares e anulares, incluindo deslocamentos, momentos e forças de cisalhamento, frequências de vibração, cargas de flambagem e uma análise de cargas seguidoras tangenciais não conservativas na estabilidade, utilizando o critério dinâmico é executada.

Palavras-chave

Placa circulares e anulares; placa de espessura variável; frequências naturais; carga conservativa e não conservativa; estabilidade de placas circulares; cargas seguidoras tangenciais não conservativas; método de Rayleigh -Ritz .

Abstract

Salas, Joaquin Leonel Sanchez; Silva, Raul Rosas e (Advisor). **A Model for Instability and Vibration of Circular Plates**. Rio de Janeiro, 2015. 117 p. Msc. Dissertation. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present work shows a version of the Rayleigh-Ritz method with specialized functions for the analysis of thin and thick circular and annular plates subjected to out-of-plane and in-plane loads. The approximation functions for displacements are polynomials in the radial direction combined with trigonometric functions in the circumferential direction. A convenient feature is the use of linear nodal functions, which allows for easy consideration of nodal loads and boundary conditions (including follower forces), enriched by higher order polynomials without inclusion of additional nodes. The model allows for thickness variation and was implemented in MAPLE18, enabling the calculation of displacements and stresses under constant and linearly varying load, frequencies of vibration, buckling loads with a few commands and the effect of the level of conservative and non-conservative on load the stability. The examples show the effectiveness of this approach in the analysis of such structures and bring new light to this classical problem, presenting interesting and novel comparisons illustrating the effect of shear deformation, in case of vibrations of the inertial rotations analysis and thickness variation in circular and annular plates, including displacements, moments and shear forces, vibration frequencies, buckling loads and a stability analysis of non-conservative tangential follower loads, using the dynamic criterion is performed.

Keywords

Circular and annular plate ; Variable plate thickness ; Natural frequencies; conservative and non-conservative load; Stability circular plates ; Non-conservative follower tangential loads ; Rayleigh -Ritz method.

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Relevância e Justificativa da Pesquisa	19
1.2	Objetivos	20
1.3	Estrutura da Dissertação	20
2	Desenvolvimento de Teorias de Placas	22
2.1	Considerações Iniciais	24
2.2	Placa Fina	26
2.3	Placa Espessa	27
2.4	Formulação do problema	28
3	Aplicação da Metodologia	37
3.1	Placa fina	37
3.1.1	Campo de deslocamentos	37
3.1.2	Campo de deformações	37
3.1.3	Funções descritivas dos deslocamentos e graus de liberdade	38
3.1.4	Funções Nodais	39
3.1.5	Funções adicionais	40
3.1.6	Energia de deformação da placa fina	40
3.1.7	Matriz de rigidez da placa fina	41
3.1.8	Vetor de forças	42
3.1.9	Matriz de massa	42
3.1.10	Matriz geométrica	43
3.2	Placa espessa	43
3.2.1	Campo de deformações	43
3.2.2	Campo de deslocamentos	44

3.2.3	Funções nodais	46
3.2.4	Funções adicionais	46
3.2.5	Graus de liberdade	47
3.2.6	Relação tensão deformação	48
3.2.7	Energia de deformação da placa espessa	48
3.2.8	Matriz de rigidez da placa espessa	49
3.2.9	Vetor de forças	50
3.2.10	Matriz de massa	50
3.2.11	Matriz geométrica	50
3.3	Matriz de rigidez dos apoios	51
3.4	Frequências naturais	51
3.5	Carga crítica	52
3.6	Matriz de carga seguidora	52
3.7	Carga crítica dinâmica	52
3.8	Variação de espessura da placa	53
4	Exemplos	54
4.1	Análise Estática	55
4.1.1	Placa circular	55
4.1.2	Placa circular anular	57
4.2	Análise de Vibrações	67
4.2.1	Placa Circular	67
4.2.2	Placa Circular Anular	67
4.3	Análise de Instabilidade	73
4.3.1	Carga Crítica	73
4.4	Análise comparativa da carga crítica e frequências	74
4.5	Carga crítica de <i>Flutter</i> (drapejamento)	78
5	Considerações finais	82
5.1	Conclusões	82
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	83

6	Referências Bibliográficas	85
	Anexo	87
	A. Modelo Computacional para a obtenção de esforços e deslocamentos placa fina.	87
	B. Modelo Computacional para a obtenção de esforços e deslocamentos placa espessa	99
	C. Modelo Computacional para a obtenção de frequências da placa espessa	109
	D. Modelo Computacional para a obtenção da carga crítica de flambagem da placa espessa.	114
	E. Modelo Computacional para a obtenção da carga crítica de flambagem dinâmica da placa espessa.	116

Lista de Figuras

Figura 2-1: Eixos Coordenados	24
Figura 2-2: (esquerda) Carregamento pontual, (direita) Tipo de carregamento axissimétrico, ambos os casos para uma placa circular.	25
Figura 2-3: (esquerda) Tipo de carregamento Axissimétrico, (direita) tipo de carregamento não axissimétrico, ambos os casos para uma placa circular anular.	25
Figura 2-4: Geometria de uma porção da placa com superfície media.	28
Figura 2-5: Características geométricas de uma seção da placa circular	28
Figura 2-6. Gráfica do estado de tensões em um elemento infinitesimal da placa.	30
Figura 2-7: Momentos e esforços cortantes do elemento infinitesimal.	32
Figura 2-8: Pressão axial uniformemente distribuída interna e externa da placa circular.	36
Figura 3-1: Graus de liberdade de a placa circular.	39
Figura 3-2. Relação de coordenadas normalizadas e coordenadas globais	46
Figura 4-1: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular com bordo engastado.	75
Figura 4-2: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular com bordo simplesmente apoiado.	76
Figura 4-3: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular anular com o bordo interno engastado e o externo simplesmente apoiado.	76
Figura 4-4: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular anular com o bordo interno e externo engastados.	77

Figura 4-5: Coalescência das duas primeiras frequências da placa circular fina.	78
Figura 4-6: Coalescência das duas primeiras frequências da placa circular espessa.	79
Figura 4-7: Coalescência das duas primeiras frequências da placa fina circular anular.	79
Figura 4-8: Coalescência das duas primeiras frequências da placa espessa circular anular.	80
Figura 4-9: Variação da carga de flutter com relação da variação da espessura da placa circular.	81
Figura 4-10: Variação da carga de flutter com relação da variação da espessura da placa circular anular.	81

Lista de Tabelas

Tabela 4-1: Comparação de resultados da placa circular com espessura constante e carregamento uniforme	55
Tabela 4-2: Comparação de momentos e deslocamentos da placa fina circular de espessura constante sujeita a uma carga pontual no centro da placa	55
Tabela 4-3: Comparação de deformação de uma placa fina de espessura variável ($h_0 / h_1=1.50$, $\alpha = 1.26$, $\beta = 0.176$, $\beta_1=0,173$ e coeficiente de $\nu = 0,25$) medidos no centro da placa.	56
Tabela 4-4: Comparação de esforços e deformação da placa circular de espessura constante sujeita a um carregamento não axissimétrico (em $r = 6m$, $\theta = 0$).	57
Tabela 4-5: Comparação de esforços e deformações da placa anular de espessura constante sujeita a um carregamento uniforme.	58
Tabela 4-6: Comparação de deformação de uma placa anular de espessura variável ($a/b=3$, $h_0=0,2$, $h_1=0,6$) sujeita a um carregamento distribuído, $\nu = 0,3$	59
Tabela 4-7: Comparação das frequências da placa circular de espessura constante	67
Tabela 4-8: Comparação das frequências da placa circular anular de espessura constante	68
Tabela 4-9: Carga crítica de flambagem de placa circular de espessura constante	73
Tabela 4-10: Carga crítica de flambagem da placa circular anular de espessura constante	74
Tabela 4-11: Carga crítica de flambagem de placa circular anular de espessura constante	74

Lista de Quadros

Quadro 4-1. Placa circular com bordo engastado sujeita a um carregamento pontual	60
Quadro 4-2. Placa circular com bordo simplesmente apoiado sujeita a um carregamento pontual	61
Quadro 4-3. Placa circular de espessura variável com bordo engastado sujeita a um carregamento distribuído	62
Quadro 4-4. Placa circular de espessura variável com bordo simplesmente apoiado sujeita a um carregamento pontual	63
Quadro 4-5. Placa circular de espessura constante engastado no bordo e sujeita a um carregamento não axissimétrico (linear)	64
Quadro 4-6. Placa circular de espessura constante simplesmente apoiado no bordo e sujeita a um carregamento não axissimétrico (linear)	65
Quadro 4-7. Placa circular anular de espessura constante com bordo interno engastado e externo livre sujeita a um carregamento constante	66
Quadro 4-8. Placa circular de espessura constante com bordo engastado	69
Quadro 4-9. Placa circular de espessura constante com bordo simplesmente apoiado	70
Quadro 4-10. Placa circular anular de espessura constante com bordo interno engastado e livre no bordo externo	71
Quadro 4-12. Placa circular anular de espessura constante com bordo interno e externo engastados	72

Lista de Abreviaturas

cos	Cosseno
sen	Seno
tan	Tangente
int.	Interno
ext.	Externo
PF	Placa Fina
PE	Placa espessa
Pcr	Carga crítica
In	Logaritmo neperiano

Lista de Símbolos

Letras Latinas

a	Radio externo da placa
b	Radio interno da placa
r	Radio variável entre a-b da placa
h	Espessura da placa
h_0	Espessura do raio interno
h_1	Espessura do raio externo
k_s	Fator de correção do cortante
E	Modulo de elasticidade normal
G	Modulo de elasticidade transversal
T	Energia cinética
V	Energia total de deformação
D_0	Rigidez a Flexão da placa
r, z	Coordenadas Polares
w	Função de deslocamento vertical
q_z	Carregamento distribuído na direção z
u_r	Deslocamento na direção r
u_θ	Deslocamento na direção θ
u_z	Deslocamento na direção z
x	Coordenada (na direção r do eixo neutro)
L	Longitude
L	Apoio livre
E	Apoio engastado
S	Apoio simples
R	Rígido à rotação
N_{pb}	Numero de funções polinomiais básicas

N_r	Numero de funções adicionais radiais
M_r	Momento em r
M_θ	Momento em theta
$[K_E]$	Matriz de rigidez
$[K_G]$	Matriz geométrica
$[K_{ap}]$	Matriz de rigidez dos apoios
$[K_L]$	Matriz de carga seguidora
$[M]$	Matriz de massa
$\{\lambda\}$	Vetor de carga critica

Letras Gregas

ν	Coeficiente de Poisson
θ	Coordenadas polares
Ω	Energia potencial das cargas externas
$\sigma_{\theta\theta}$	Tensão normal circunferencial
σ_{rr}	Tensão normal radial
$\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$	Tensão de cisalhamento
ρ	Densidade do material
$\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_\theta$	Deformações
$\gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$	Deformação de cisalhamento
$\frac{\partial}{\partial}$	Derivada parcial
φ_r	Giro sobre o eixo r
$\{\delta\}$	vector de deslocamentos

“Sin principio ni final solo energía variable con el tiempo”

Joaquin Leonel Sanchez Salas