PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Kelisson Ferreira de Lima

Polígonos construtíveis por régua e compasso:
Uma apresentação para professores da Educação Básica

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Nicolau Saldanha

Rio de Janeiro
Setembro de 2015

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Kelisson Ferreira de Lima

Polígonos construtíveis por régua e compasso:
Uma apresentação para professores da Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Saldanha
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Renata Martins da Rosa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Daniel Neves Martins
Colégio Pedro II

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de Setembro de 2015

Kelisson Ferreira de Lima

Graduou-se em Matemática pela Universidade Castelo Branco em 2001. Fez iniciação cientifica pelo IMPA em 2005. Atualmente é professor efetivo da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e da rede privada de ensino.

Ficha Catalográfica

Lima, Kelisson Ferreira de

Polígonos Construtíveis por régua e compasso: Uma apresentação para professores da Educação Básica / Kelisson Ferreira de lima; Orientador: Nicolau Saldanha. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Matemática, 2015.

54 f.: il. (color.); 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Geometria. 3. Desenho geométrico. 4. Polígonos construtíveis por régua e compasso. 5. Aplicação da extensão de corpos. I. Saldanha, Nicolau. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico esta dissertação a minha família em especial a minha esposa, Renata, pelo incentivo diário e força para que eu não desistisse nos momentos difíceis e aos meus filhos Lívia e Kelisson Junior por entenderem minha ausência em alguns momentos.

Agradecimentos

Ao meu irmão Michel Lima, pela paciência, incentivo e principalmente inspiração para a conclusão desse trabalho;

Ao meu orientador, professor Nicolau Saldanha pelas orientações e paciência que teve comigo;

Ao professor Daniel Martins pela preocupação com a forma e linguagem usadas nesse trabalho;

Aos meus colegas de trabalho que contribuíram, de alguma forma, na melhoria deste trabalho;

A PUC por me proporcionar, nestes dois anos, conhecimento e material suficiente para que eu pudesse fazer este trabalho.

Agradeço ao CAPES pela bolsa oferecida da qual proporcionou manter os estudos.

Resumo

Lima, Kelisson Ferreira de; Saldanha, Nicolau. **Polígonos construtíveis por régua e compasso: uma apresentação para professores da educação básica.** Rio de Janeiro, 2015. p.54. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo deste trabalho é trazer à tona conceitos importantes da geometria no plano euclidiano sob o título de construções geométricas, cada vez mais esquecidos nos currículos escolares brasileiros. Nossa primeira ideia é mostrar a dificuldade que professores do ensino médio poderão encontrar ao tentar descobrir quais conceitos validam suas práticas já que os argumentos que validam a possibilidade ou a impossibilidade de algumas construções geométricas residem numa álgebra abstrata de difícil compreensão e domínio por parte dos professores, sobretudo aqueles que não cursaram disciplinas mais avançadas em matemática. Vamos comentar sobre os principais problemas da antiguidade que motivaram os matemáticos às descobertas de novas propriedades, apresentar tais construções geométricas e apresentar uma descrição algébrica das construções geométricas. A ideia é que através da álgebra abstrata podemos obter argumentos que validem a possibilidade e impossibilidade de tais construções e assim aumentar a cultura matemática do professor do ensino médio e não transformá-lo num expert no assunto.

Palavras-chave

Geometria; desenho geométrico; polígonos construtíveis por régua e compasso; aplicações da extensão de corpos.

Abstract

Lima, Kelisson Ferreira de; Saldanha, Nicolau (Advisor). **Constructible polygons in ruler and compass: A presentation for middle and high school teachers**. Rio de Janeiro, 2015. p.54. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main purpose of this work is to rescue the important concepts in geometric constructions. Concepts that are being progressively forgotten by Brazilian curriculums in schools. First, we want to present the difficulties that high school teachers might face when they will try to formalize concepts like the possibility or not to construct some figures in the Euclidean plane, especially those who have not studied advanced math courses at undergraduation. We comment on the main problems of antiquity that led mathematicians to new discoveries properties, we present geometric constructions as well as an algebraic description of these geometric constructions. The idea is that through abstract algebra we can present arguments about the possibility or impossibility of such constructions. In this work, we will comment that abstract algebra will help teachers to validate some arguments that involves the possibility or not to construct some figures as well as to enlarge high schools teachers' culture, not trying to make them experts in the subject.

Keywords

Geometry; geometric design; constructible polygons by ruler and compass; bodies of extension applications.

Sumário

Lista de figuras

1. Introdução

É muito importante esclarecer o que significa a expressão “construir por régua e compasso” no que tange a linguagens matemáticas, para que um marco conceitual seja estabelecido, norteando todo o trabalho. Nessas construções são permitidas apenas:

. Traçar uma reta conhecendo seus dois pontos;

. Traçar um círculo conhecendo seu centro e um ponto arbitrário do círculo;

Determinar intersecção de retas, reta e círculo ou círculos e de pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: intersecções de retas (veja figura 1.1), intersecções de retas com circunferências (veja figura 1.2) e intersecções entre circunferências (veja figura 1.3).

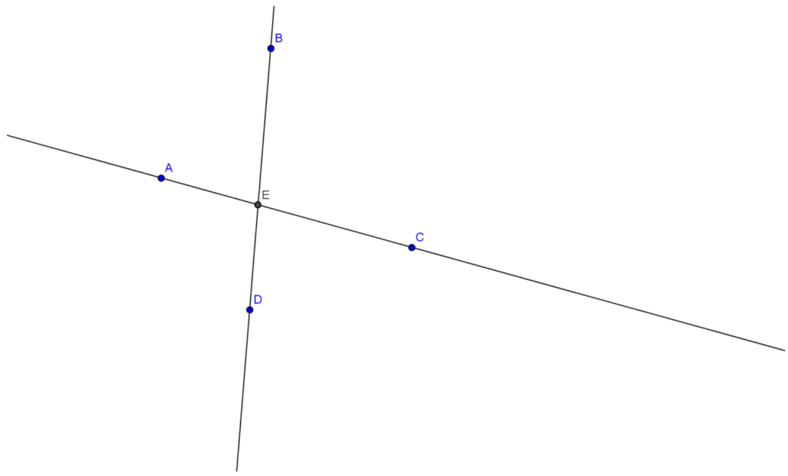

Figura 1.1 - Interseção entre retas

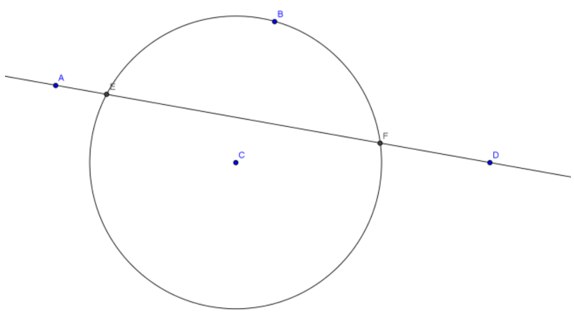

Figura 1.2 - Interseção entre reta e círculo

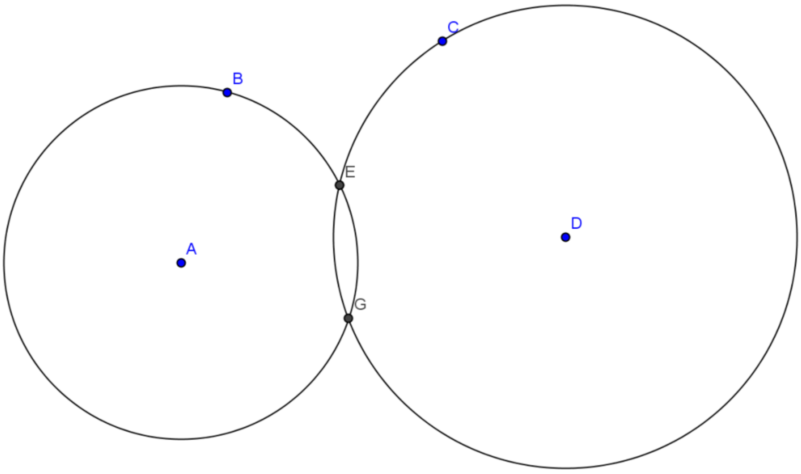

Figura 1.3 - Interseção entre círculo

Professores de matemática do ensino médio e professores graduados em desenho geométrico reconhecem de maneira instintiva tais verdades e quase sempre as justificam pelo fato de que “a régua é capaz apenas de traçar uma reta conhecidos dois de seus pontos e o compasso capaz apenas de traçar um círculo quando conhecidos o centro e o raio”.

Muitos professores justificam que de base dessas regras pode-se traçar retas perpendiculares e retas paralelas apenas com régua e compasso e que estas construções são de extrema importância no desenvolvimento dos diversos conteúdos subsequentes.

1.1. Retas Perpendiculares

Dada uma reta r e um ponto P pertencente a r. Queremos traçar uma reta perpendicular à reta r passando pelo ponto P (veja figura 1.4).

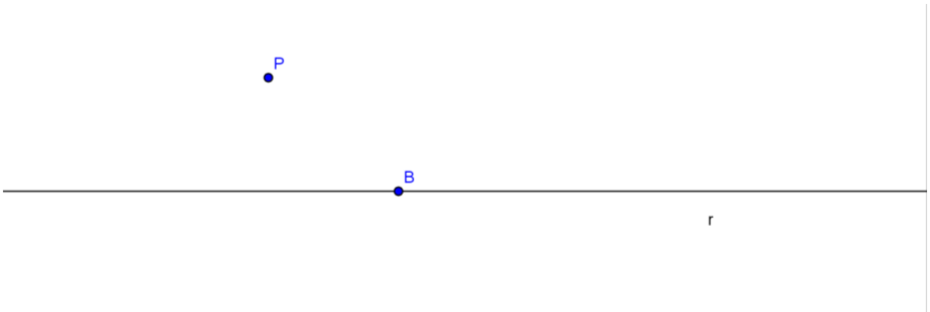

Figura 1.4 - Reta r e um ponto P não pertencente a r

Com o compasso centrado em P traçamos uma circunferência passando por B (veja figura 1.5).

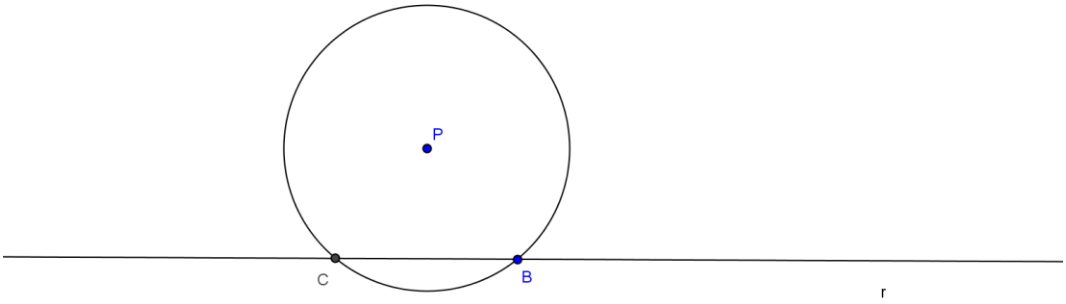

Figura 1.5 - Interseção entre o círculo de centro P e a reta r

Da mesma forma, traçamos uma circunferência de centro em B passando pelo ponto P e uma de centro em C passando pelo ponto P. A intersecção dessas últimas duas circunferências determina o ponto G. A reta que passa, por P e por G é perpendicular à reta r (veja figura 1.6).

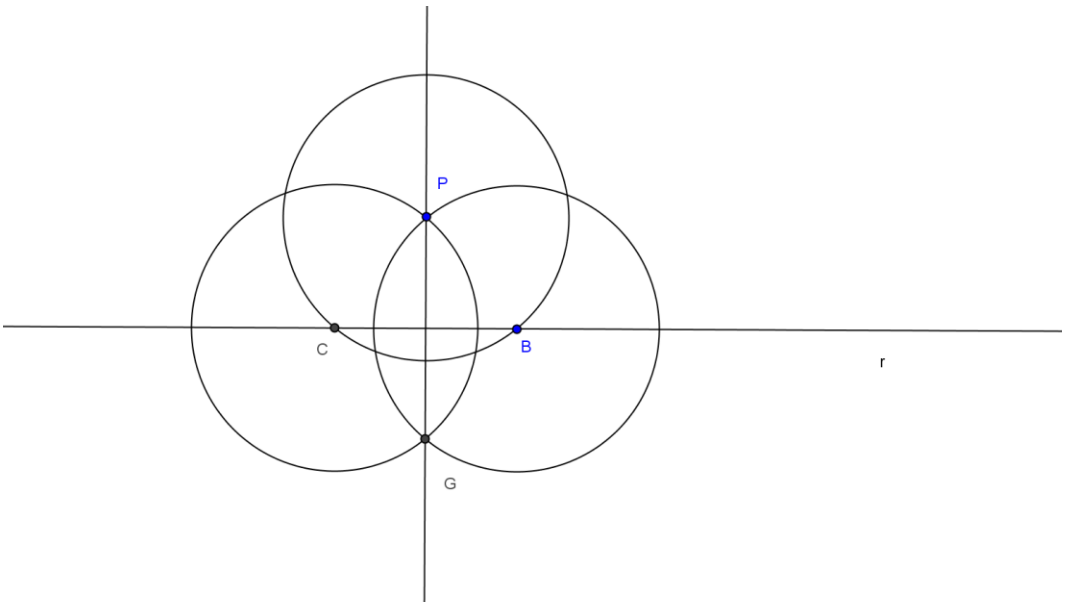

Figura 1.6 - Reta s perpendicular a reta r passando pelo ponto P

JUSTIFICATIVA: Como PB = PC e GB = GC, a reta que passa pelos pontos P e G é mediatriz de BC e portanto é perpendicular à reta r.

Veja que cada etapa da construção os pontos foram obtidos pela interseção entre retas e circunferências, que obedecem as regras descritas acima.

1.1. Retas paralelas

Dados a reta r e um ponto P não pertencente a r. Queremos traçar uma reta paralela a r passando por P (veja figura 1.7).

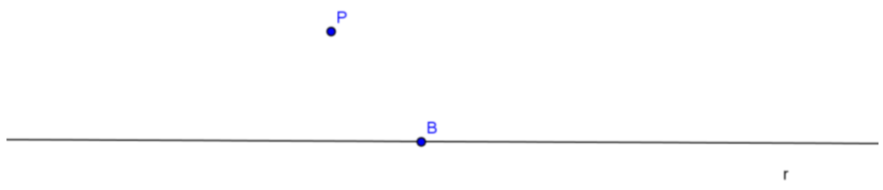

Figura 1.7 - Reta r e um ponto P

Com o centro do compasso em P traçamos uma circunferência passando pelo ponto B (veja figura 1.8).

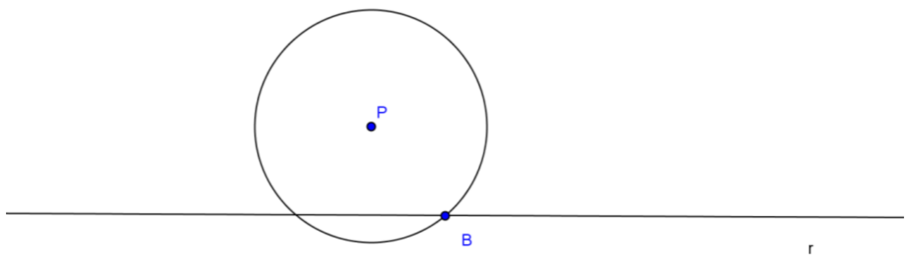

Figura 1.8 - Interseção entre o círculo de centro P e a reta r

Agora com o compasso centrado em B traçamos uma circunferência passando por P encontrando o ponto C na reta r (veja figura 1.9).

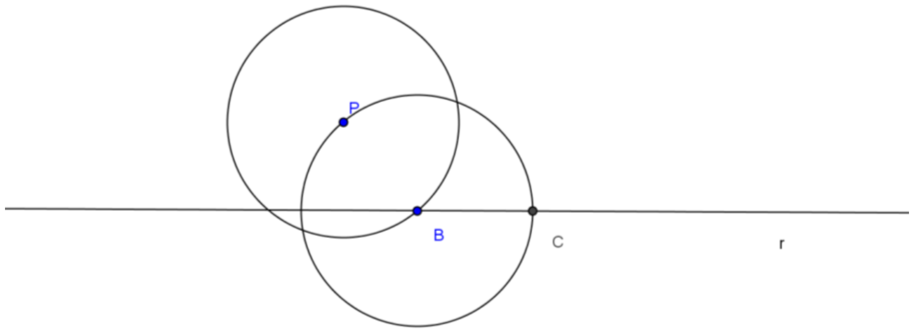

Figura 1.9 - Interseção entre o círculo de centro P e a reta r

Agora com o compasso centrado em C traçamos uma circunferência passando por B. A interseção destas duas últimas circunferências determina o ponto D. A reta que passa pelos pontos P e D é paralela à reta r (veja figura 1.10).

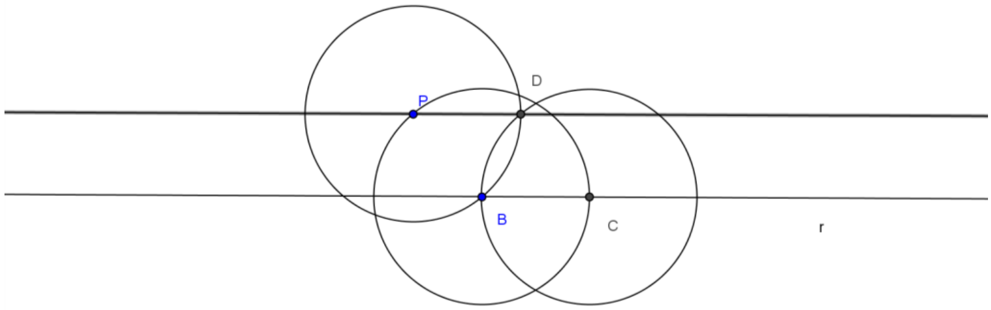

Figura 1.10 - Interseção entre o círculo de centro em B e o círculo de centro

JUSTIFICATIVA: Como os segmentos PB, BC, CD e DP são de mesma medida então o quadrilátero PBCD é um losango. Com isso a reta que passa pelos pontos P e D é paralela à reta r.

Veja que cada etapa da construção os pontos foram obtidos pela interseção entre retas e circunferências, que obedecem as regras descritas acima.

Com base nessas construções vemos claramente que as regras não foram descumpridas em nenhum momento e com isso podemos usar paralelas e perpendiculares sempre que formos fazer uma construção com régua e compasso.

Uma observação importante a se fazer é que alguns métodos usados em aulas de desenho geométrico não são tão rigorosos como os critérios apresentados nesse trabalho. Métodos usados para traçar paralelas com o par de esquadros, ângulos de 30º, 45º e 60º contidos nos esquadros, traçar uma circunferência conhecendo o centro e uma medida qualquer, não são utilizados nesse trabalho pois não atendem necessariamente as regras descritas acima.

1.2. Problemas famosos em Geometria – Um apanhado histórico

Três problemas ficaram famosos ao longo dos séculos por serem conhecidos como impossíveis de serem construídos usando somente régua e compasso

São eles:

1) A duplicação do cubo que consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um cubo original. Esse problema também conhecido como problema de Delos serve para mostrar que dado um cubo de aresta a, construir um cubo com o dobro do volume seria construir um cubo de aresta $a\sqrt[3]{2}$ (veja figura 1.11)

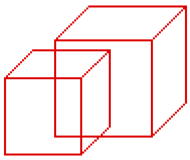

Figura 1.11 - Duplicação do cubo

2) A quadratura do círculo que consiste em construir um quadrado com área igual à de um círculo dado. Esse problema nos leva a construção de um número igual $x\sqrt{\pi}$ onde x é o lado do quadrado (veja figura 1.12).

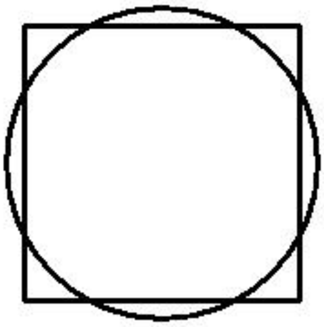

Figura 1.12 - Quadratura do círculo

3) A trissecção do ângulo que consiste em dividir em três partes iguais um ângulo dado. Veremos que isso é impossível até mesmo para um ângulo de 60º (veja figura 1.13).

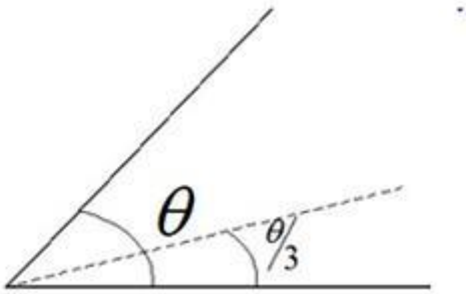

Figura 1.13 - Trissecção do ângulo

Esses problemas ficaram sem solução cerca de dois mil anos, mas somente nos séculos XVIII e XIX foi demonstrado que tais problemas eram impossíveis de serem resolvidos com régua e compasso. Alguns dos matemáticos que contribuíram para isto foram: Gauss (1777 – 1855) e Galois (1811 – 1832). Muitos geômetras acharam ter resolvido algumas destas questões, porém todas as soluções apresentadas são resoluções aproximadas e só puderam ser formalmente justificadas com o avanço da álgebra e da análise.

Como consequência das soluções para esses problemas estão às impossibilidades de construção de certos polígonos regulares com os vértices em uma circunferência no qual veremos mais adiante.

2. Da Geometria para Álgebra

A parte da matemática que dá conta da formalização deste conteúdo é a álgebra, em especial a Teoria da Extensão de Corpos.

Corpo: Um corpo é uma estrutura composta por conjunto K, munido de duas operações, uma chamada adição, que faz corresponder a cada par de elementos x, y ϵ K sua soma x + y ϵ K e multiplicação que associa esses elementos ao seu produto x. y ϵ K. Este conjunto K munido de tais operações devem satisfazer a certas condições abaixo, chamadas axiomas de corpo.

I. Axiomas da adição:

i. Associatividade: (x + y) + z = x + (y + z) quaisquer que sejam x, y e z ϵ K.

ii. Comutatividade: x + y = y + x quaisquer que sejam x e y ϵ K.

iii. Elemento neutro: existe 0 ϵ K tal que x + 0 = x qualquer que seja x ϵ K.

iv. Simétrico: ∀ x ϵ K ∃ z ϵ K tal que x + z = 0

II. Axiomas da multiplicação:

i. Associatividade: (x.y). z = x. (y.z) quaisquer que sejam x, y e z ϵ K.

ii. Comutatividade: x.y = y.z quaisquer que sejam x e y ϵ K.

iii. Elemento neutro: existe 1 (um) ϵ K tal que 1 ≠ o e x. 1 = x qualquer que seja x ϵ K.

iv. Inverso multiplicativo: ∀ x ϵ K, tal que x ≠ 0, existe um inverso z ϵ K tal que x. z = 1.

v. Chamamos de “-x” o simétrico de x e de “$\frac{1}{x}$” o inverso de x. Com isso a operação a – b = a + (-b) e a operação $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$.

Dada uma reta r construída a partir de dois pontos A e B. Assumindo o valor 0 para o ponto A e 1 para o ponto B dizemos que o segmento AB é um segmento unitário e cada ponto marcado sobre r representará um único número real. Assim diremos que um ponto P é construtível se seu número real α for construtível a partir do segmento AB.

Vamos mostrar que o conjunto dos números construtíveis é um corpo. Observe que trivialmente 0 e 1 pertencem a ele (veja figura 2.1).

Figura 2.1 - Representação do segmento unitário AB e o número α

Isto implica que se α é construtível então – α também será (veja figura 2.2).

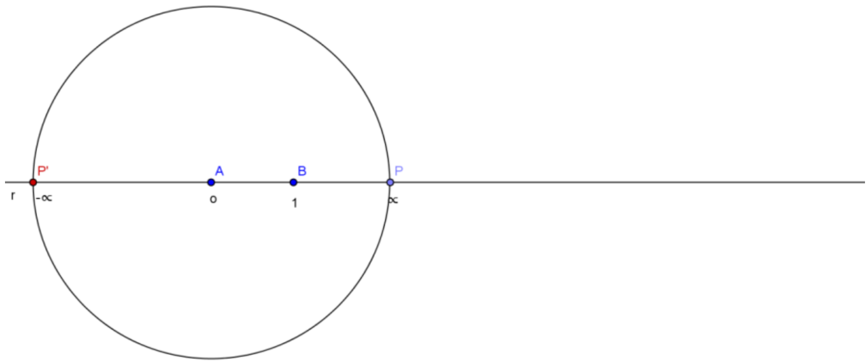

Figura 2.2 - Simétrico de α

E $\frac{1}{\propto}$ também será (veja figura 2.3).

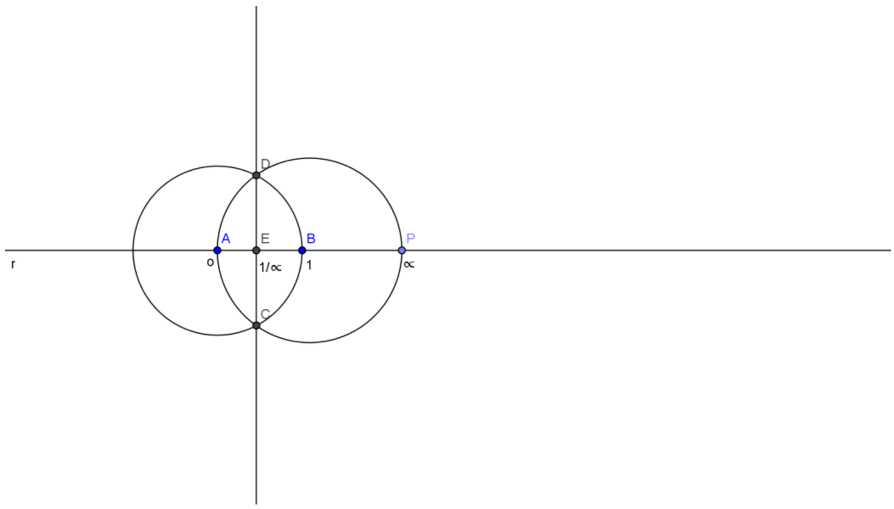

Figura 2.3 - Inverso de α

E agora, se podemos construir um número real α e um número real β então poderemos construir as seguintes operações com α e β (veja figura 2.4).

Figura 2.4 - Representações de α e β

I. α + β: Basta centrar o compasso em P e com uma abertura igual a β, medida de AQ, traçar um arco a direita do ponto P.

II. α – β: Da mesma forma basta centrar o compasso em P e com uma abertura igual a β, medida de AQ, traçar um arco a esquerda do ponto P.

Para traçar esses arcos, usamos uma reta paralela à reta que contém os segmentos e com isso fazemos as construções das operações (veja figura 2.5).

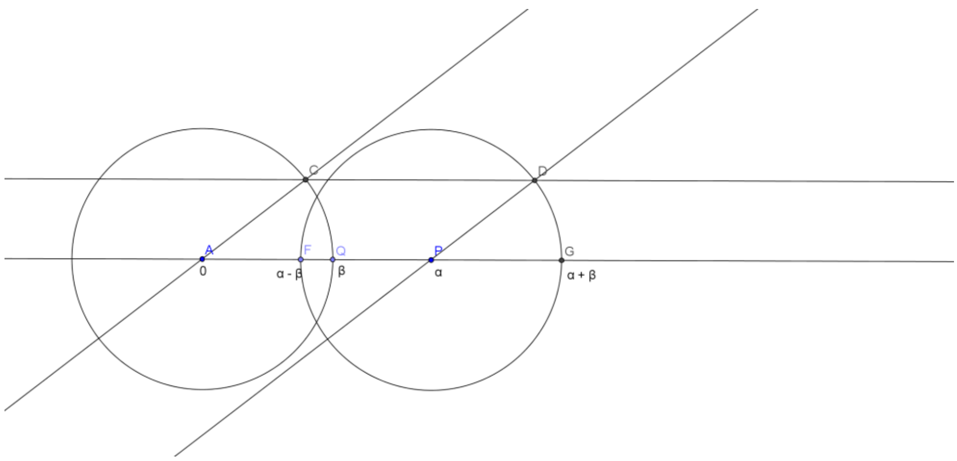

Figura 2.5 - Operação α+β e α-β

III. α.β

Usamos a quarta proporcional (veja figura 2.5).

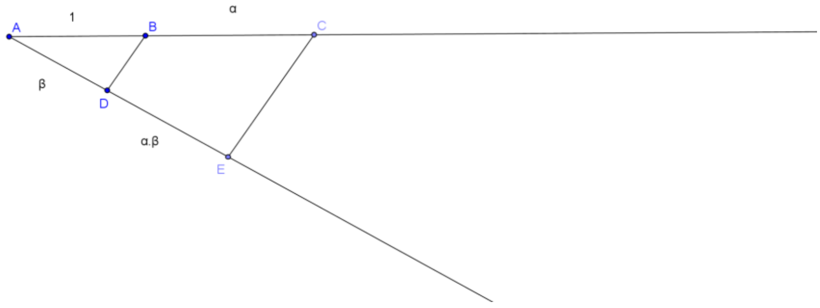

Figura 2.5 - Operação α.β

IV. α/β

Usamos a quarta proporcional (veja figura 2.6).

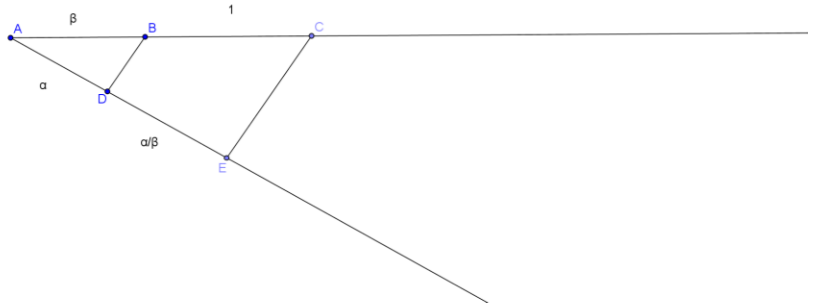

Figura 2.6 - Operação α/β

Essas operações obtidas nas figuras 2.5 e 2.6 construídas a partir do segmento unitário são chamadas de quarta proporcional. Esse processo também serve para determinar o segmento $\frac{1}{\alpha}$ (veja figura 2.7).

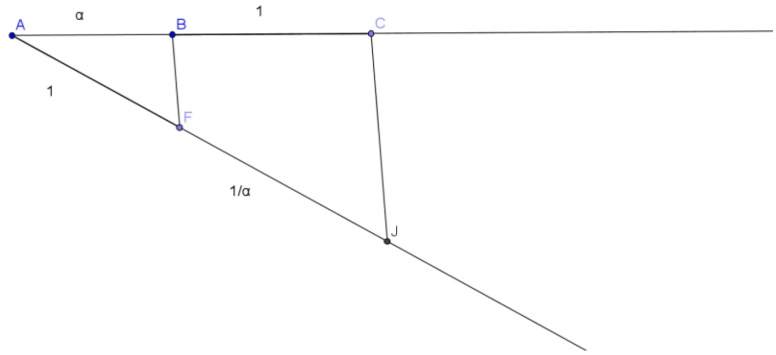

Figura 2.7 – operação $\frac{1}{\alpha}$

Isto constata que o conjunto dos números construtíveis forma um corpo. Observe que todos os números racionais são construtíveis.

Estas construções são demasiadamente elementares e de domínio dos professores de ensino fundamental e médio, sejam estes com formação específica em desenho geométrico sejam eles professores de matemática. Notem que o que está sendo feito é uma simples contextualização geométrica (associação de números racionais às medidas no plano euclidiano)

Mas podemos ver também que não só os números racionais são construtíveis.

Lema 1: Se α é um número construtível e positivo então $\sqrt{\alpha}$ também é construtível.

Demonstração: Com o compasso fixado em $\frac{\alpha}{2}$ traçamos uma semicircunferência de raio $\frac{\alpha}{2}$. Traçamos uma perpendicular à reta r passando por C encontrando o ponto D. Como o triangulo ADB é retângulo em D, $AD^2 = AC.\ AB$. Logo AD = $\sqrt{\alpha}$ (veja figura 2.7).

Figura 2.7 - Raiz quadrada de a

Observe Por exemplo que $\sqrt{2}$ é irracional e é construtível.

Veremos mais adiante números irracionais que não são construtíveis.

Nesse momento o leitor pode estar pensando na relação entre um ponto ser construtível e um número ser construtível. Iremos então enunciar duas definições, uma geométrica e uma algébrica.

Definição geométrica: Um ponto (x, y) ϵ R é geometricamente construtível se existe uma sequência de operações finitas com régua e compasso a partir de P_0 = (0, 0) e P_1 =(1, 0) que se obtém P

Lema 2: (x, y) é geometricamente construtível se, e somente se (x, 0) e (y, 0) são construtíveis.

Demonstração:

1. (x, y) é geometricamente construtível se (x, 0) e (y, 0) são geometricamente construtíveis.

Dados os pontos (x, 0) e (y, 0) marcados sobre o eixo das abscissas (veja figura 2.8).

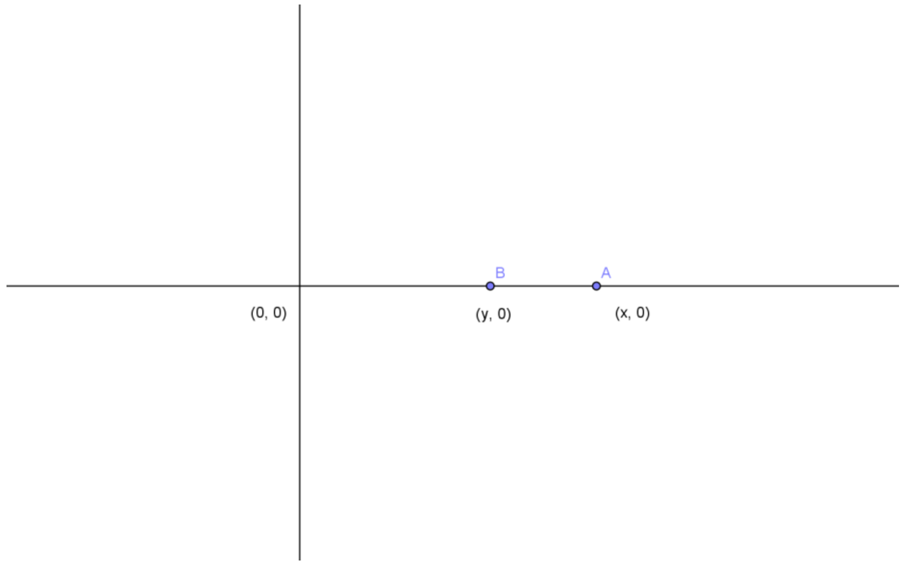

Figura 2.8 - Representação cartesiana dos pontos A (x, 0) e B (y, 0)

Com o compasso centrado no ponto (0, 0) e com abertura até o ponto (y, 0) traçamos um arco até encontrar o eixo das ordenadas marcando o ponto (0, y) (veja figura 2.9).

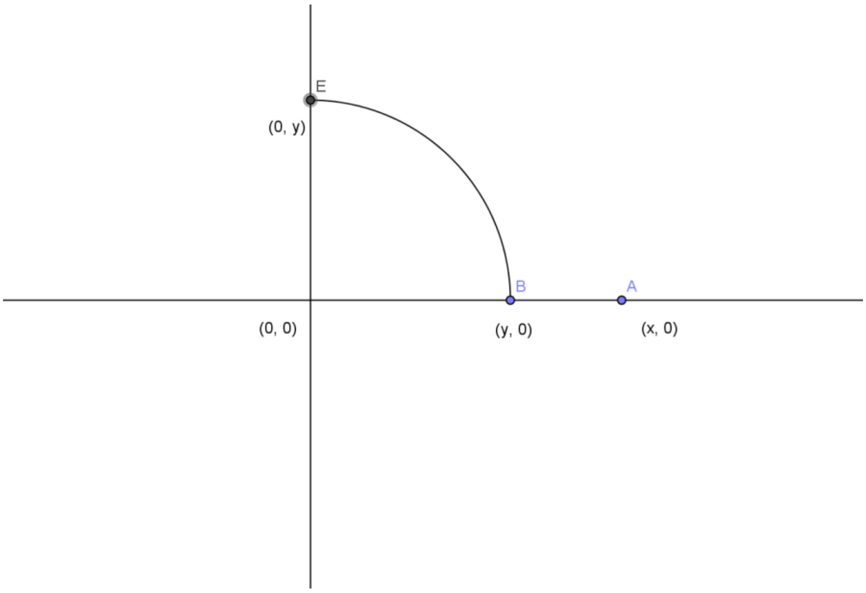

Figura 2.9 - Representação cartesiana do ponto E (0, y)

A interseção de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas no ponto (x, 0) com uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas no ponto (0, y) marca o ponto (x, y) (veja figura 2.10).

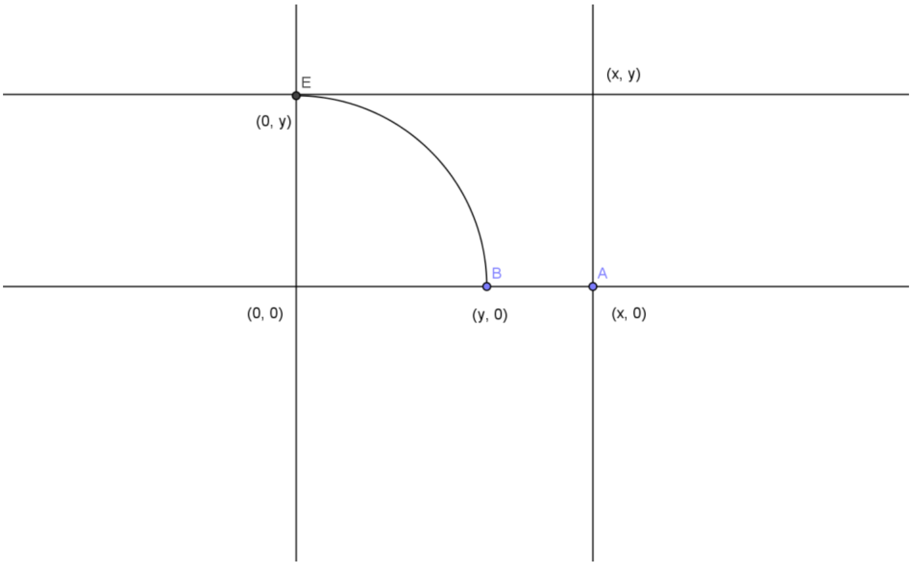

Figura 2.10 - Representação cartesiana do ponto (x, y)

Agora vamos demonstrar a volta.

2. (x, 0) e (y, 0) são geometricamente construtíveis se (x, y) é geometricamente construtível.

Dado o ponto (x, y) marcado no plano (veja figura 2.11).

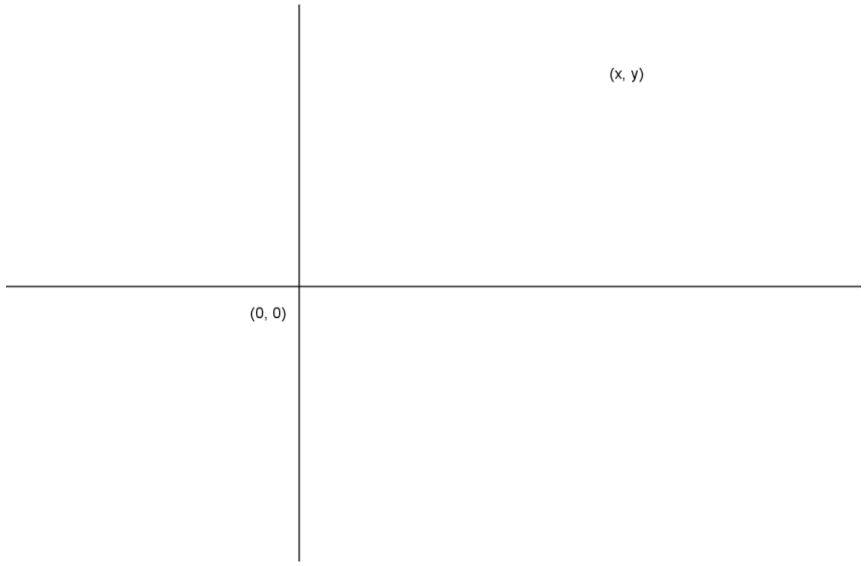

Figura 2.11 - Representação cartesiana do ponto E (x, y)

A partir do ponto (x, y) traçamos uma reta perpendicular ao eixo das abscissas marcando o ponto (x, 0) e uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas marcando o ponto (0, y).

Com o compasso centrado em (0, 0) e com abertura até o ponto (0, y) traçamos um arco até encontrar o eixo das abscissas marcando o ponto (y, 0) (veja figura 2.12).

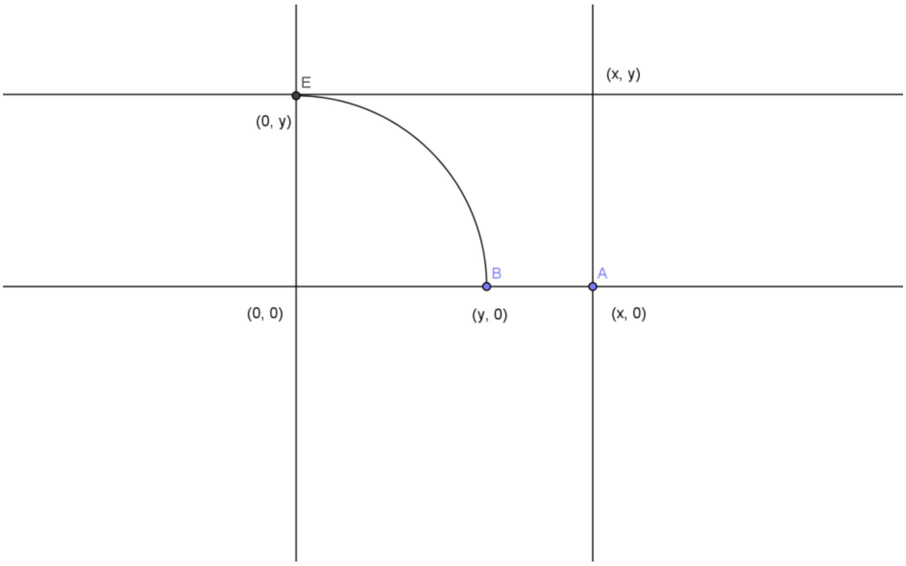

Figura 2.12 - Chegando ao ponto E, ponto B e ponto A a partir de (x, y)

Definição algébrica: $\alpha \in R$ é construtível com régua e compasso e com raízes se existe $n \in N$ e existem corpos $Q = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$ com $K_{j+1} = K_j [\sqrt{B_j}]$, $B_j \in K_j$, $\sqrt{B_j}$ não pertencente a K_j e $\alpha \in K_n$.

Essa notação usada $K_j [\sqrt{B_j}]$ representa uma extensão do corpo K. Por exemplo, $Q[a + b\sqrt{\Delta}]$ é uma extensão do conjunto Q.

Com essas duas definições, podemos enunciar um teorema que permite associar as duas definições.

Teorema 1: (x, y) é geometricamente construtível se, e somente se x e y são algebricamente construtíveis.

Demonstração: Se (x, y) é geometricamente construtível então x e y são algebricamente construtíveis.

Considere todos os pontos (x, y) do plano em que x e y são números pertencentes a Q, sendo Q o corpo dos números racionais. Toda reta que une dois desses pontos tem equação do tipo $ax + by + c = 0$ com a, b e c pertencentes a Q.

Se duas retas de Q se tocam no plano então seu ponto de intersecção é um ponto de Q logo é construtível.

Sejam $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (1) e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (2) duas retas do plano. Fazendo $x = \frac{-b_1y - c_1}{a_1}$ de (1) e substituindo em (2) encontramos para

$y = \frac{a_2c_1 - a_{1c_2}}{a_{1b_2} - a_{2b_1}}$

Como a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 pertencem a Q e com isso y e x também estão em Q. O que implica dizer que x e y são números construtíveis.

Agora considere uma reta de equação $a_1x + b_1y + k_1 = 0$ (1) e uma circunferência de equação $x^2 + y^2 + cx + dy + k_2 = 0$ (2). Fazendo $x = \frac{-b_1y - c_1}{a_1}$ de (1) e substituindo em (2) teremos uma equação do 2º grau.

Lembrando que Sendo $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação do 2º grau, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, nossa preocupação fica apenas no fato de que $\sqrt{\Delta}$ é ou não é construtível. Como Δ é um número racional então Δ é construtível e pelo Lema 1 $\sqrt{\Delta}$ é construtível por um número finito de construções a partir de construções de números racionais. Com isso x e y são algebricamente construtíveis.

É fácil perceber agora que se $\sqrt{\Delta}$ é construtível então $a + b\sqrt{\Delta}$ com a e b racionais também é pois podemos construir tais operações como vimos acima.

O mesmo serve para mostrar que se duas circunferências de equação $x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + k_1 = 0$ (1) e $x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + k_2 = 0$ (2), todas com coeficiente racionais, se tocam teremos um ponto ou dois pontos de intersecção e esse(s) ponto(s) é(são) da forma $a + b\sqrt{\Delta}$ que também é construtível.

Demonstração: Se x e y são algebricamente construtiveis então (x, y) é geometricamente construtível.

Pela definição x e y são construtíveis se x e y são racionais ou estão em alguma extensão quadrática dos racionais. Com isso podemos escrever x e y como soluções de equações de retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (1) e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (2) que estão no plano logo sua interseção é um ponto do plano logo é construtível. Se x e y são soluções das equações $a_1x + b_1y + k_1 = 0$ (1) e $x^2 + y^2 + cx + dy + k_2 = 0$ (2) ou soluções das equações $x^2 + y^2 + c_1x + d_1y + k_1 = 0$ (1) e $x^2 + y^2 + c_2x + d_2y + k_2 = 0$ (2) são pontos construtíveis.

Então quando se diz número contrutível, estamos dizendo que ele é gerado por um número finito de pontos construtíveis e quando dizemos que um ponto é construtível é por que ele é gerado a partir de números construtíveis.

Observe que podemos chegar a construir um número se, através da construção anterior, usarmos as operações já definidas e raiz quadrada. Isto quer dizer que o número α é construtível se puder colocá-lo dentro de um corpo obtido a partir de Q por um número finito de extensões quadráticas.

Podemos propor alguns exercícios para que o leitor possa verificar as possibilidades das construções de segmentos com as medidas dadas e a possibilidade de localizar tais números na reta numerada. Estas atividades são de suma importância para que o professor compreenda a teoria e repasse o que foi exposto neste trabalho, a cada passo de sua construção. Por exemplo: Traçar um segmento que mede 1,3 pode ter o mesmo método que utilizado para traçar 1,333... Contudo, representam segmentos com medidas completamente distintas, mas que em ambos os métodos acrescentaremos à unidade ou 9/30 da unidade ou 10/30 da unidade.

2.1. Atividades

1) Construa usando somente régua e compasso os números reais abaixo. A seguir explique oralmente a validade de suas construções geométricas.

a) 2,6666....

b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$

c) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

d) $\sqrt[4]{2}$

Os professores têm neste momento uma grande ferramenta para discutir a teoria sem a necessidade de formalismos maiores com alunos dos últimos anos do ensino fundamental e do ensino médio, o papel milimetrado e o auxílio da régua graduada e do compasso desmistificam a inexistência de segmentos de retas com comprimentos inimagináveis por eles.

Neste momento, por mais que a tecnologia ajude ao aluno no traçado ou que deixa o resultado visual do trabalho mais bonito, a necessidade de interagir com a construção através do papel, lápis, régua, compasso e borracha é que dão sentido cognitivo ao aluno para o conceito de número associado à medida em geometria, mesmo que estes números sejam incomensuráveis, como o $\sqrt{2}$.

Nesse momento surgem alguns questionamentos:

Esses números reais possuem algo em comum? Vocês poderiam dizer o que é? Será que poderíamos escrever esses números com sendo resultado de alguma equação?

Essas perguntas criam um novo capitulo que iremos enunciar agora.

3. Polinômios e Números Algébricos

Neste capitulo não entraremos a fundo na teoria dos polinômios, faremos apenas algumas considerações a fim de fixar alguns conceitos e associar a ideia de números construtíveis aos polinômios ditos irredutíveis.

3.1. Polinômios

Chamamos de polinômios, toda expressão algébrica racional inteira.

Por exemplo, $X^2 + 5X - 2$ é um polinômio, mas $\frac{X^2+5X+2}{X}$ e $\sqrt{X+2}$ não são.

Seja K um corpo qualquer, chamamos de polinômio sobre K em uma variável X, a expressão $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ onde $a_i \in$ K, para todo i e n pertencente aos naturais.

Denotando com Gr P(X) o grau do polinômio P(X). Dizemos que o polinômio $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ tem grau n se $a_n \neq 0$.

Chamamos de K[X] o conjunto de todos os polinômios sobre K em uma variável X.

Entende-se neste ponto que o leitor esteja familiarizado com as quatro operações usuais com polinômios: P(X) + Q(X) , P(X) – Q(X) , P(X) . Q(X) e P(X) / Q(X) para P(X) e Q(X) $\in$ K[X] sendo que na operação de divisão P(X) / Q(X), Q(X) ≠ 0 não havendo então, necessidade de defini-las.

Dado um polinômio $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ não nulo em K[X] e um número $\alpha \in$ K, se $P(\alpha) = a_n. \alpha^n +.... + a_1.\alpha + a_0 = 0 \in$ K então dizemos que α é uma raiz de P(X) em K.

Como Gr P(X) = n podemos dizer que o número de raízes de P(X) em K é igual a n.

Esta proposição leva a um corolário interessante.

Corolário 1: Seja $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ um polinômio não nulo de grau n em K[X], então P(X) possui no máximo n raízes em qualquer extensão L de K.

Demonstração: Basta ver que se P(X) є K[X] e K C L então P(X) є L[X]. Com isso agora é só ver a proposição acima descrita como sendo P(X) em L.

Então por exemplo: o polinômio $x^2 - 2$ possui duas raízes reais, já o polinômio $x^3 - 2$ possui uma raiz real e três raízes complexas. Assim podemos encontrar as raízes de um polinômio, mas elas serão sempre limitadas pelo grau do polinômio.

3.2. Polinômios Irredutíveis

Chamamos de *polinômio irredutível sobre K[X]***.** Um polinômio P(X) de grau maior ou igual a 1 é irredutível sobre K[X] se não puder ser escrito como produto de dois ou mais polinômios não constantes em K[X] onde o grau de cada polinômio é menor que o grau de P(X). Em outras palavras, P(X) é irredutível em K[X] se não existem Q(X) e R(X) em K[X] tais que P(X) = Q(X). R(X).

Por exemplo, o polinômio P(X) = 2x – 3 é irredutível em Z[X], porém o polinômio Q(X) =x^2- 4 é redutível em Z[X], pois Q(X) = (x + 2). (x- 2).

Dizer que um polinômio é irredutível ou não só tem um aspecto interessante e verdadeiro se for mencionado o corpo em que ele pertence. Por exemplo, o polinômio P(X) = $x^2 - 2$ é irredutível em Z[X], mas é redutível em R[X].

Para nós é importante saber alguns aspectos de polinômios irredutíveis em Z[X] e em Q[x] e alguns critérios que vamos usar no trabalho.

3.3. Critérios para verificação se um polinômio é ou não irredutível em Z[X]:

I. Todo polinômio de grau 1 em Z[X] é irredutível.
II. Todo polinômio de grau menor ou igual a 3 é irredutível em Z[X] ou possui raiz em Z[x].

Uma ferramenta muito importante para verificar se um polinômio é ou não irredutível em Q[x] é verificar se ele tem ou não raízes em Q. existe um teorema importante para verificar a existência de raízes racionais:

Teoremas das Raízes Racionais: Dado um polinômio $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$. Se $\frac{a}{b}$ é raiz de P(X) com a e b primos entre si, então a é um divisor de a_0 e b é um divisor de a_n.

Demonstração: Basta substituir $\frac{a}{b}$ em P(X). Como $\frac{a}{b}$ é raiz então $P(\frac{a}{b}) = a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_0 = 0$. Multiplicando tudo por b^n teremos a equação $a_n.a^n + a_{n-1}.a^{n-1}.b + ... + a_1.a.b^{n-1} + a_0.b^n = 0$. Agora escrevemos essa equação de duas maneiras:

$$a_n.a^n = -a_{n-1}.a^{n-1}.b - .... - a_1.a.b^{n-1} - a_0.b^n \qquad (1)$$

$$a_0.b^n = -a_n.a^n - a_{n-1}.a^{n-1}.b - .... - a_1.a.b^{n-1} \qquad (2)$$

Em (1) botamos b em evidencia e em (2) botamos o a em evidencia.

$$a_n.a^n = b(-a_{n-1}.a^{n-1} - .... - a_1.a.b^{n-2} - a_0.b^{n-1}) \qquad (1)$$

$$a_0.b^n = a(-a_n.a^{n-1} - a_{n-1}.a^{n-2}.b - .... - a_1..b^{n-1}) \qquad (2)$$

Chamando $-a_{n-1}.a^{n-1} - .... - a_1.a.b^{n-2} - a_0.b^{n-1}$ de R e chamando $-a_n.a^{n-1} - a_{n-1}.a^{n-2}.b - .... - a_1..b^{n-1}$ de K teremos:

$a_n.a^n = b.R$,isto é b é um divisor de a_n (1)

$a_0.b^n = a.K$, isto é a é um divisor de a_0 (2)

Por exemplo, o polinômio $P(X) = x^3 + x^2 + x - 1$ se possuísse raiz racional deveria ser +1 ou – 1 e como P(1) = 2 e P(-1) = -2 esse polinômio não é redutível em Z[x].

Por curiosidade, existe um critério chamado de Critério de Eisenstein que diz: Se $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ é um polinômio irredutível em Z[x] então existe um número primo p tal que a_0 é divisível por p, a_n não é divisível por p e a_0 não é divisível por p^2. Não vamos demonstrar esse teorema por que não vamos usar esse critério em nosso trabalho porém é um critério muito poderoso e vale o leitor interessado pesquisar. Assim como existe um lema importante conhecido por LEMA DE GAUSS que diz que se um polinômio é irredutível sobre Z[X] então ele é irredutível sobre Q[X]. Este lema serve para dizer que se um polinômio de coeficientes inteiros não pode ser fatorado como produto de polinômios de coeficientes inteiros, então esse mesmo polinômio não pode ser fatorado como produto de polinômios com coeficientes racionais.

Veja que no exercício proposto no capítulo anterior cada número daquele dito construtível pode ser raiz de um polinômio. Por exemplo $\sqrt{2}$, se fizermos x = $\sqrt{2}$ e elevarmos os dois lados ao quadrado chegarão a uma equação polinomial $x^2 - 2 = 0$.

Esses números que são soluções de polinômios de coeficientes inteiros são chamados de números algébricos.

3.4. Atividades

Verifique se os números abaixo são raízes de polinômios com coeficientes inteiros

a) 2,6666....
b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$
c) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$
d) $\sqrt[4]{2}$

3.5. Números Algébricos

Se α é solução de uma equação polinomial do tipo $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros e irredutível em Q[x] então α é um número algébrico.

Todos aqueles números propostos na atividade anterior são algébricos, isto é, cada um é solução de uma equação polinomial de coeficientes inteiros.

Um número que não é algébrico é dito **transcendente.**

A pergunta que nós fazemos é, será que existe algum número transcendente?

Para responder essa pergunta vamos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1: O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.

Demonstração: Dado o polinômio $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ de coeficientes inteiros de grau n em K[X]. Pelo corolário 1 o polinômio possui no máximo n raízes em qualquer extensão L de K. Definimos como altura de P(X) como sendo o número natural $|P| = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0| + n$ agora o número de polinômios com uma determinada altura é um número finito e portanto as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito. Como a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável, segue que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável.

Agora podemos responder a pergunta:

Existe algum número transcendente?

E a resposta é sim.

Teorema 2: Existem números transcendentes.

A prova é que se o conjunto dos números algébricos reais é enumerável e o conjunto R dos números reais é não enumerável, então existem números transcendentes e esses números formam um conjunto não enumerável.

Esse teorema prova a existência de números transcendente mas não nos mostra quais são esses números. Foi em 1851 que o matemático francês Joseph Liouville (1809 – 1882) a dar um critério para um número real seja transcendente. Logo depois em 1873 o matemático francês Charles Hermite (1822- 1901) mostrou a transcendência de e.

É importante ressaltar que**:**

i. A soma de dois números algébricos é algébrico
ii. O produto de dois números algébricos é algébrico
iii. O simétrico de um numero algébrico é algébrico
iv. O inverso de um numero algébrico é algébrico

Teorema 3: O conjunto dos números algébricos é um corpo.

A demonstração deste teorema consiste em demonstrar cada item descrito acima. Vamos pular essa demonstração pois foge um pouco do objetivo deste trabalho.

Teorema 4: Todo número construtível é algébrico.

A demonstração deste teorema é simples por que já vimos que um número construtível pode ser escrito como solução de um polinômio irredutível com coeficientes inteiros.

Mais a ideia agora é pensar que: será que todo número dito algébrico é construtível?

Para responder essa pergunta vamos enunciar o teorema mais importante do nosso trabalho que diz:

Teorema 5: Se um número α é construtível então α é um número algébrico de grau igual a uma potência de 2.

Este teorema é fundamental e suficiente para demonstrar dois dos problemas clássicos aqui abordados.

Com base nesse teorema podemos usar a seguinte negação:

Corolário 2: Se um número real α é raiz de um polinômio irredutível de grau n sobre Q[x] e se n não é uma potência de 2, então α não é construtível.

Uma observação muito importante a se fazer aqui é que o teorema não é reciproco, isto é, se um número é algébrico de grau igual a uma potência de 2 então ele é construtível. Como exemplo deixo aqui o polinômio irredutível $x^4 - 5x - 1$ para o leitor verificar.

Usaremos o corolário para demonstrar alguns dos problemas clássicos.

Demonstrações dos problemas clássicos da antiguidade.

Duplicação do cubo: Dado um cubo de aresta a seu volume será de a^3. Construir um novo cubo de volume $2.a^3$ seria construir então um cubo de aresta x tal que $x^3 = 2.a^3$ isto é $x = a.\sqrt[3]{2}$.

Tomemos a = 1 temos que construir um segmento x = $\sqrt[3]{2}$ então x é solução da equação $x^3 - 2 = 0$.Logo x é algébrico de um polinômio cujo grau não é uma potencia de 2 e pelo corolário descrito acima x não é construtível.

Quadratura do círculo: Não iremos aqui demonstrar de fato a impossibilidade de construir com régua e compasso um quadrado de área igual à de um círculo dado mas mostraremos fatos importantes no que foi visto nesse trabalho que impossibilita tal construção.

Dado um circulo de raio 1 sua área será igual a $S= \pi.\ R^2 = \pi.1^2 = \pi$. Então queremos construir um quadrado de área π para isto seu lado x é tal que $x^2 = \pi$ logo x deve ser um número igual a $\sqrt{\pi}$. Para tal fato acontecer π deveria ser algébrico o que é impossível pelo fato de que π é um numero transcendente

Teorema 5: π é transcendente.

A transcendência de π foi demonstrado pelo matemático Ferdinand Von Lindemann (1852 – 1939). A demonstração de que π é transcendente pode ser encontrado na referencia [6].

Trissecção do ângulo: Para provar que nem todo ângulo pode ser dividido em três partes iguais usando apenas régua e compasso. Vamos pegar um caso e provar que não pode dividir tal ângulo em três partes iguais usando apenas régua e compasso.

Para facilitar o entendimento dessa demonstração e ajudar a entender o que ainda há por vir, vamos desenhar um círculo de raio 1 centrado em A no plano cartesiano *X0Y* (veja figura 3.1).

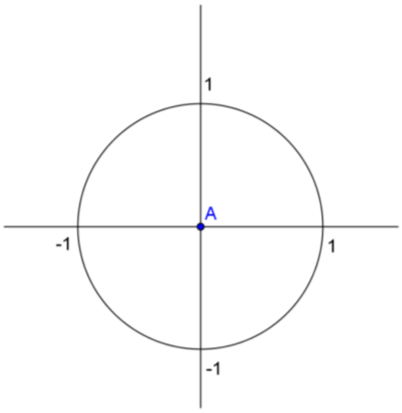

Figura 3.1 - Círculo de raio unitário

Isto servirá para mostrar que construir um ângulo central α ou dividir o ângulo central 3.α em três partes iguais é o mesmo que construir o segmento de tamanho igual a cosseno de α (cos α).

Na figura abaixo construir o cos α é o mesmo que encontrar o ponto K, ou seja, se o número K é construtível então o cos α será construtível (veja figura 3.2).

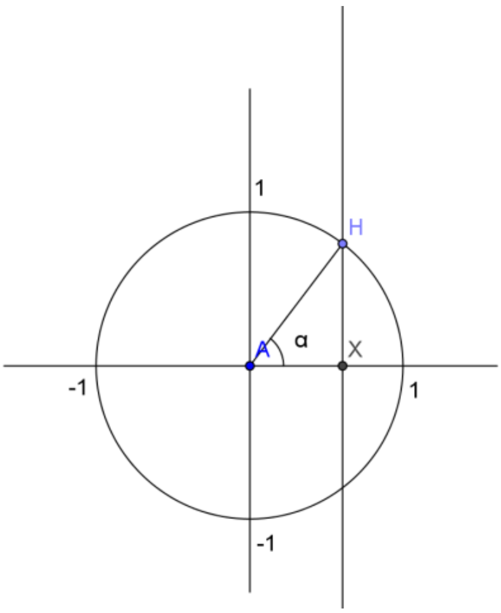

Figura 3.2 - Cosseno de α

Vamos usar então o cos 60º para encontrar o cos 20º e para isso iremos usar uma relação trigonométrica que diz cos 3.α =4. Cos^3 α – 3. Cos α. Então para α= 20º temos: Cos 60º = 4. Cos^3 20º - 3.cos 20º.

Fazendo cos 20º = x e lembrando que cos 60º = 0,5 tem-se a seguinte equação:

0,5 = $4x^3 - 3x$, então $8x^3 - 6x - 1 = 0$ substituindo 2x por y podemos escrever essa mesma equação como $y^3 - 3y - 1 = 0$ que pelo teorema das raízes racionais é um polinômio irredutível em Z[X]. Logo y é algébrico de um polinômio cujo grau não é uma potência de 2 e pelo teorema descrito acima não é construtível. Se y não é construtível então x = $\frac{Y}{2}$ também não é. A conclusão é que não podemos construir um segmento igual ao cos 20º logo não poderemos dividir o ângulo de 60º em três partes iguais. Então não é possível trisseccionar qualquer ângulo.

4. Construções de Polígonos Regulares por Régua e Compasso

Este capítulo tem como objetivo principal mostrar, através dos conceitos vistos neste trabalho, quais os polígonos regulares que podem ser construídos com seus vértices numa circunferência, quais aqueles que não podem e os respectivos motivos.

Vale lembrar que um polígono é regular quando todos os seus lados são iguais e todos os seus ângulos internos tem mesma medida. Isto implica que construir um polígono regular de n lados consiste em dividir uma circunferência em n partes iguais ou construir um ângulo central (A_c) de medida igual a $\frac{360°}{n}$ e como vimos na demonstração no III do capitulo anterior seria o mesmo que poder construir o cos($\frac{360°}{n}$) . Este é um dos assuntos mais trabalhados nas classes de desenho geométrico e geometria e no 9º ano do ensino fundamental recebem uma atenção especial, principalmente quando os professores os utilizam para a fixação do conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo ao determinar as relações existentes entre a medida do lado de um polígono, de seu apótema e da medida do raio da circunferência que o circunscreve. De maneira antagônica, são desconhecidos dos professores tópicos de álgebra a que vêm contribuir para o esclarecimento das construções.

Muitos professores acreditam que os métodos apresentados nos manuais de desenho geométrico são métodos que nos fornecem medidas exatas dos lados de alguns polígonos inscritos numa circunferência, e a desmistificação desta espécie de lenda é muito difícil de ser feita devido à dureza e quase inacessibilidade do tema para a maioria dos professores. Há métodos que garantem a obtenção do comprimento real de uma circunferência, conhecidos como métodos de retificação da circunferência, métodos que permitem trissectar ângulos e ainda métodos como o de Rinaldini_Bion que garantem o traçado de quaisquer polígonos regulares, estrelados ou não, inscritos na circunferência.

As construções de certos polígonos regulares já eram vistas com bastante atenção. Euclides em “os elementos” por volta de 300 A.C já havia publicado em seu livro IV a construção de polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 15 lados. Mas foi o matemático Gauss que mostrou a impossibilidade de alguns polígonos que não estavam nessa lista.

4.1. Construções de certos polígonos regulares

Triângulo Equilátero: Traçamos uma circunferência de diâmetro CD e centro O. Traçamos a mediatriz do raio OD e marcamos os pontos A e B. Como o ângulo AOD é de 60° então o ângulo AOC é de 120°. Agora ligamos os pontos ABC (veja figura 4.1).

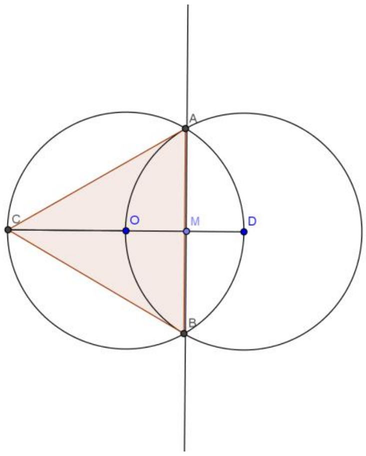

Figura 4.1 - Triângulo equilátero

Hexágono Regular: Como sabemos podemos dividir um arco em duas partes iguais sempre que quisermos então basta pegar cada arco do triangulo equilátero e dividir em duas partes iguais (veja figura 4.2).

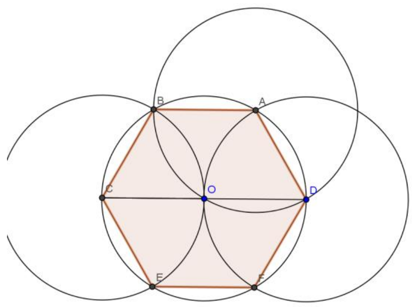

Figura 4.2 - Hexágono regular

Dodecágono Regular: Procedemos da mesma forma. A partir de um hexágono regular dividimos cada arco em duas partes iguais obtendo um dodecágono regular (veja figura 4.3).

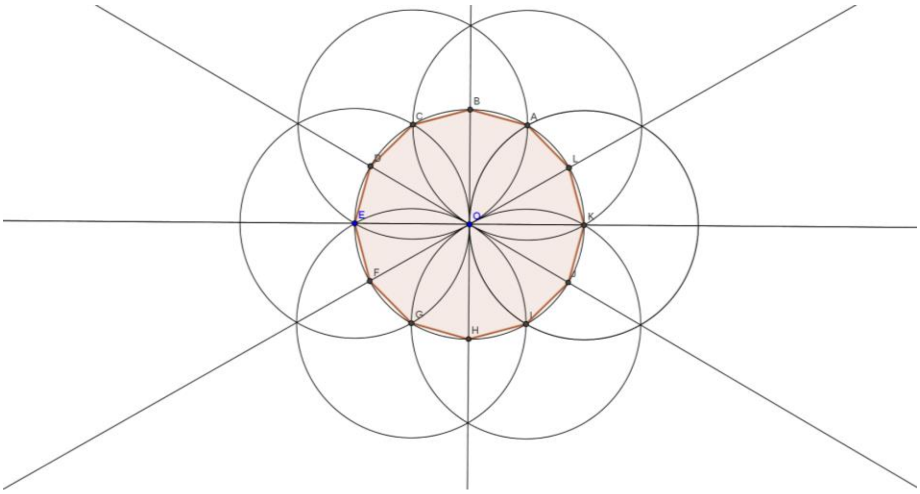

Figura 4.3 - Dodecágono regular

Isto mostra que seriamos capazes de construir um polígono de 24 lados ou 48 e assim por diante. Dizemos então que se um polígono de n lados puder ser construído por régua e compasso então o polígono de 2.n lados também será.

Quadrado: Traçamos uma circunferência de diâmetro BD e centro O. Traçamos uma perpendicular ao diâmetro BD passando pelo centro O (veja figura 4.4).

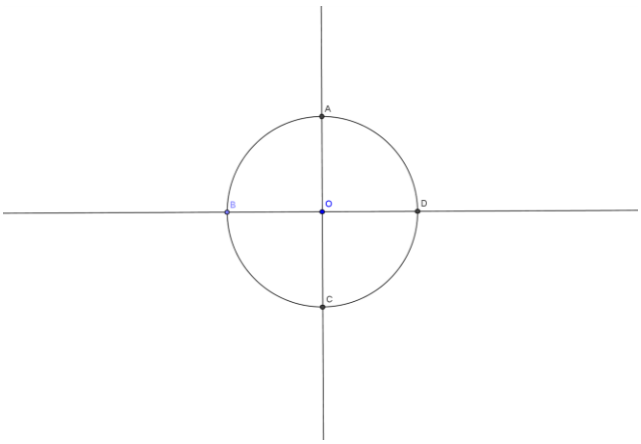

Figura 4.4 - Círculo de diâmetro AE

Agora é só ligar os pontos ABCD (veja figura 4.5).

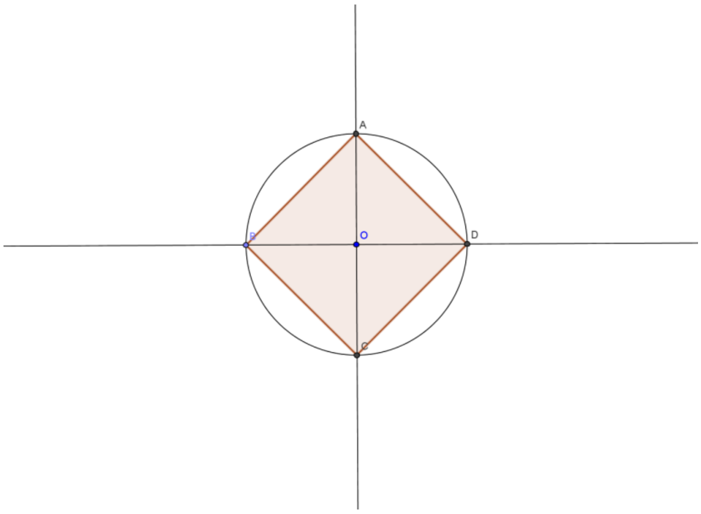

Figura 4.5 - Quadrado

E agora pelo mesmo critério podemos construir o octógono regular.

Octógono Regular: Basta dividir cada arco em duas partes iguais (veja figura 4.6).

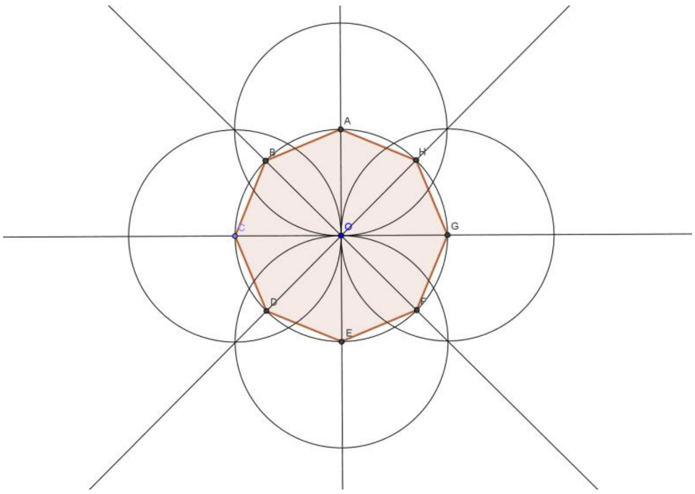

Figura 4.6 - Octógno regular

Poderíamos construir o de 16, 32, e assim por diante.

Pentágono Regular: Traçamos uma circunferência de diâmetro AK e centro O. Traçamos uma perpendicular a AK passando pelo centro O marcando o ponto J e uma perpendicular a OK passando pelo ponto médio M (veja figura 4.7).

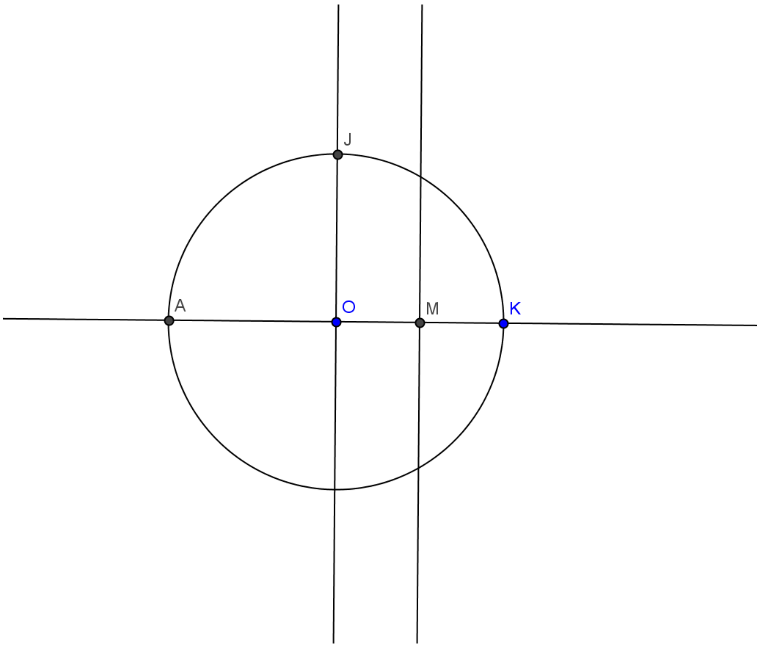

Figura 4.7 - Círculo de diâmetro AK e ponto médio M

Traçamos uma circunferência de centro em M e raio MJ marcando o ponto L. Em seguida traçamos uma perpendicular ao segmento LO passando pelo ponto N (N ponto médio de LO). Essa perpendicular marca sobre a circunferência os pontos B e E (veja figura 4.8).

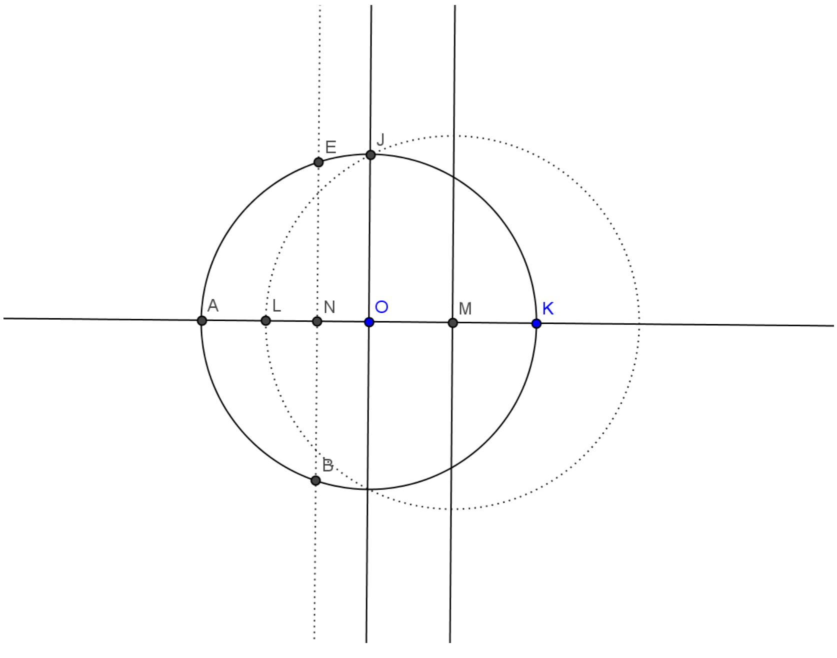

Figura 4.8 - Círculo de centro M e ponto médio N

O Lado AB é o lado do pentágono regular. Agora transferimos essa medida para a circunferência marcando os pontos C e D e aí é só ligar (veja figura 4.9).

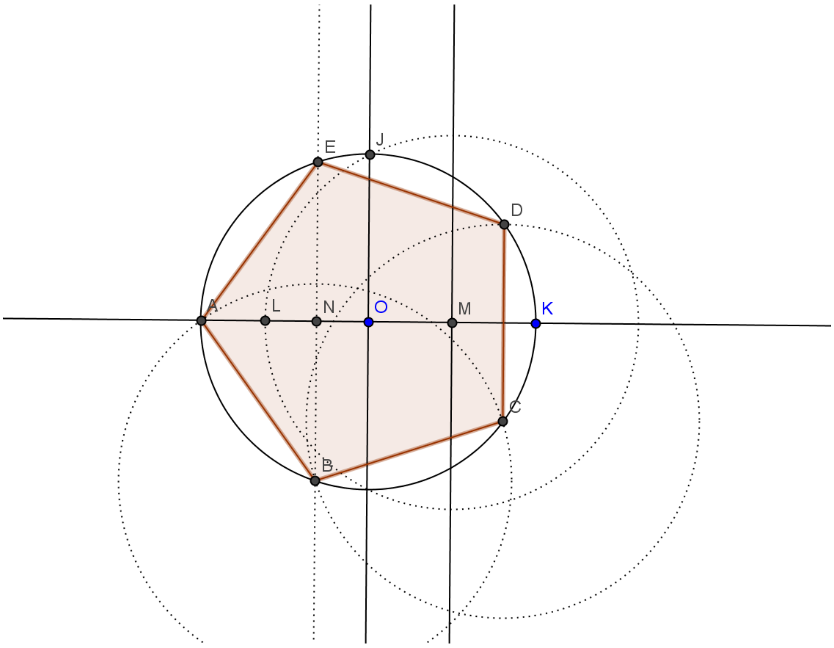

Figura 4.9 - Pentágono regular

E pelo mesmo critério usado até aqui, construir o decágono regular seria o mesmo princípio, dividimos em duas partes iguais cada arco do pentágono regular.

Um fato curioso e que o leitor pode verificar, é que Podemos construir o decágono regular também usando o mesmo processo do pentágono regular porém pegamos o segmento OL.

Decágono Regular: Traçamos uma circunferência de diâmetro KJ e centro O. Traçamos uma perpendicular a KN passando pelo centro O e uma perpendicular a ON passando pelo ponto médio M. Traçamos uma circunferência de centro M e raio AM marcando o ponto L. O segmento OL é o lado do decágono regular (veja figura 4.10).

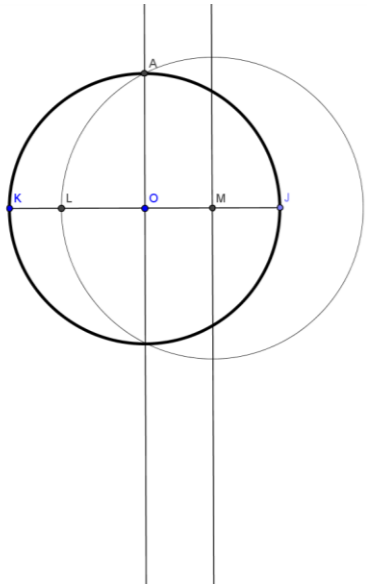

Figura 4.10 - Círculo de centro O e círculo de centro M

Agora transferimos o segmento OL para circunferência e ligamos os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J formando um decágono regular (veja figura 4.11).

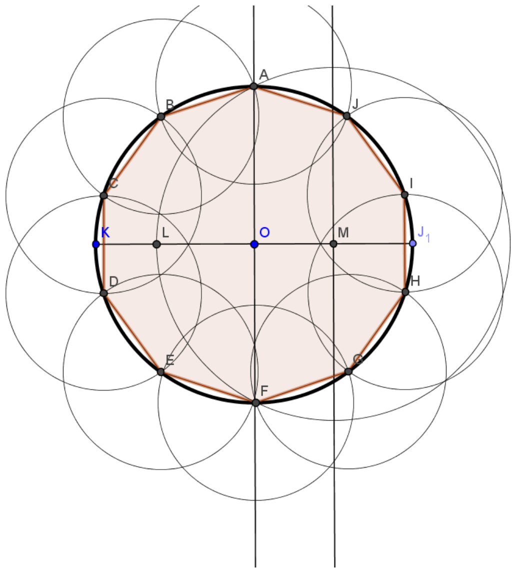

Figura 4.11 - Decágono regular

Teorema: Se for possível construir um polígono de n lados e é possível construir um polígono de m lados, sendo m e n primos entre si, então é possível construir um polígono de n.m lados.

Demonstração: Se um polígono de n lados pode ser construído então podemos construir um arco de $\frac{360°}{n}$ e se um polígono de m lados pode ser construído então podemos construir um arco de $\frac{360°}{m}$. Como m e n são primes entre si então mdc (m, n) = 1. Logo existem x e y inteiros tais que x.($\frac{360°}{n}$) – y.($\frac{360°}{m}$) = $\frac{360°}{m.n}$.

Por exemplo, poderíamos construir um dodecágono regular cujo ângulo central é $\frac{360°}{12}$ = 30° usando o arco do triangulo que é igual a $\frac{360°}{3}$ = 120° e usando o arco do quadrado que é igual a $\frac{360°}{4}$ = 90° e fazendo 1. $\frac{360°}{3}$ – 1. $\frac{360°}{4}$ = $\frac{360°}{3.4}$

Com isso podemos construir polígonos de 15, 20, 24 e assim por diante.

Alguns polígonos regulares não foram citados e é logico que por um motivo especial. Será que podemos construir um polígono de 7 lados? E de 9 lados? E de 11 lados? As perguntas não param.

Para melhor entender o que foi usado para provar se é possível ou não um polígono regular de n lados, vamos enunciar a primeira relação atribuída a De Moivre.

Fórmula de De Moivre: Se n é inteiro, $[r. (\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)]^n = r^n . [\cos (n.\alpha) + \text{sem } n.\alpha)]$

A demonstração desta formula é para n = 0 e n = 1 e para n positivo que é o tema do nosso trabalho é uma aplicação direta da multiplicação.

Como aplicação direta, se Z^n = r. (cos α + i.sen α) então (ρ[(cos θ + i.sen θ)]^n = r . (cosα + i.senα) sendo Z = ρ.(cos θ + i.sen θ) , então ρ^n [cos(n. θ) + i.sen(n. θ)] = r . (cosα + i.senα) e pela igualdade de números complexos temos ρ^n = r logo ρ = $\sqrt[n]{r}$ e nθ = α + 2Kπ, sendo K inteiro, portanto θ = $\frac{\alpha+2K\pi}{n}$.

Então Se $Z^n = r \,.\, (\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha)$, $Z = \sqrt[n]{r}\ .\ [\cos(\frac{\alpha+2K\pi}{n}) + i\ \text{sen}\ (\frac{\alpha+2K\pi}{n})]$. Como todas as raízes tem o mesmo módulo $\sqrt[n]{r}$ e dando valores inteiros para K, os argumentos crescem de maneira constante isto é, as raízes estão igualmente espaçadas na circunferência e esse espaço é igual a $\frac{2\pi}{n}$ ou $\frac{360°}{n}$ (veja figura 4.12).

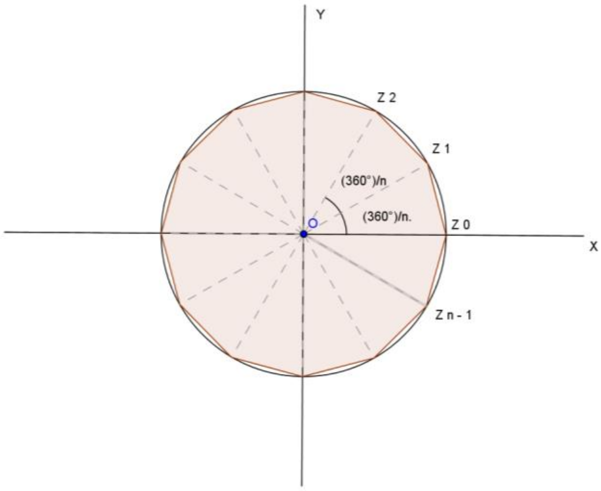

Figura 4.12 - Raízes da unidade

O matemático Carl Friedrich Gauss o primeiro a associar polígonos regulares construtíveis as raízes da unidade, com o estudo das equações ciclotômicas.

A partir da solução 1 da equação $x^n - 1 = 0$, as soluções Z_1 , Z_2, ..., Z_{n-1}, Onde $Z = \cos\alpha + i.\text{sen}\alpha$, com $\alpha = \frac{360°}{n}$ marcam os vértices do polígono regular de n lados. A possibilidade de tal construção é equivalente à de cosα e por uma jogada algébrica, à de 2.cosα que é igual a $Z + \frac{1}{Z}$.

Vejamos então por que é possível construir alguns polígonos e por que não é possível construir outros.

4.2. Usando o critério de construtibilidade para provar que certos polígonos são ou não construtíveis.

Vamos omitir aqui o triangulo e quadrado que são imediatos na sua construção e vamos para os casos menos triviais.

Pentágono Regular: Para verificar se é possível construir um pentágono regular vamos usar a equação $x^5 - 1 = 0$.

$X^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ então $x-1 = 0$ o que nos leva a $x = 1$ e $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Queremos então encontrar Z que satisfaz a equação $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ tal que $Z + \frac{1}{Z} = 2.\cos\frac{2\pi}{5}$. Dividindo a equação por Z^2 encontramos $Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} = 0$. Chamando de $Z + \frac{1}{Z} = a$ temos $Z^2 + \frac{1}{Z^2} = a^2 - 2$. A equação organizada fica $(Z^2 + \frac{1}{Z^2}) + (Z + \frac{1}{Z}) + 1 = 0$ e mudando a variável teremos $a^2 - 2 + a + 1 = 0$ que dá $a^2 + a - 1 = 0$. Essa equação é irredutível em Q[x] então a é raiz de um polinômio irredutível de grau igual a uma potencia de 2 e seu valor é igual a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que é construtível. Logo $Z + \frac{1}{Z} = 2.\cos(\frac{2\pi}{5})$ é construtível

Heptágono Regular: Com o raciocínio análogo vamos usar a equação $x^7 - 1 = 0$. Então $(x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ e descartando 1 como raiz, precisamos encontrar Z que satisfaz a equação

$Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ tal que $Z + \frac{1}{Z} = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$. Dividindo a equação por Z^3 temos

$Z^3 + Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} = 0$. Organizando a equação temos $(Z^3 + \frac{1}{Z^3}) + (Z^2 + \frac{1}{Z^2}) + (Z + \frac{1}{Z}) + 1 = 0$ e agora chamando $Z + \frac{1}{Z} = a$ teremos $Z^2 + \frac{1}{Z^2} = a^2 - 2$ e $Z^3 + \frac{1}{Z^3} = a^3 - 3.a$, mudando a variável encontramos $a^3 + a^2 - 3a - 1 = 0$. Pelo teorema das raízes racionais o polinômio é irredutível em Q[X] logo a é raiz de um polinômio irredutível de grau 3 que não é uma potencia de 2. Com isso, Pelo corolário 2, a não é construtível então $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ não é contrutivel o que prova que não podemos construir o heptágono regular.

Eneágono Regular: Usaremos a equação x^9-1=0, então (x-1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) =0. Descartando x =1, queremos encontrar um Z tal que $Z^8 + Z^7 + Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ e com $Z + \frac{1}{Z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$.

Dividindo a equação por Z^4 encontramos $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{Z^4} = 0$. Organizando a equação temos $\left(Z^4 + \frac{1}{Z^4}\right) + \left(Z^3 + \frac{1}{Z^3}\right) + \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right) + \left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 1 = 0$. Trocando $Z + \frac{1}{Z} = a$ temos:

$Z^2 + \frac{1}{Z^2} = a^2 - 2$

$Z^3 + \frac{1}{Z^3} = a^3 - 3a$

$Z^4 + \frac{1}{Z^4} = a^4 - 4a^2 + 2$

A equação fica $a^4 + a^3 - 3a^2 - 2a + 1 = 0$ que pelo teorema das raízes racionais pode ser decomposto $(a + 1)(a^3 - 3a + 1) = 0$.

Veja que o polinômio $a^3 - 3a + 1$ é irredutível em Q[x] e por esse motivo a deve ser solução de um polinômio irredutível cujo grau não é uma potência de 2. Logo o número $a = Z + \frac{1}{Z} = 2.\ \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ não é construtível.

Veja que para esses casos o corolário 2 é muito eficiente. Mas em alguns casos não.

Heptadecágono Regular: Usaremos a equação $x^{17} - 1 = (x - 1)(x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ e descartando x = 1 ficamos com o polinômio $x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Queremos encontrar um Z tal que $Z^{16} + Z^{15} + Z^{14} + Z^{13} + Z^{12} + Z^{11} + Z^{10} + Z^9 + Z^8 + Z^7 + Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

Dividindo tudo Z^8 e organizando a equação, temos:

$\left(Z^8 + \frac{1}{Z^8}\right) + \left(Z^7 + \frac{1}{Z^7}\right) + \left(Z^6 + \frac{1}{Z^6}\right) + \left(Z^5 + \frac{1}{5}\right) + \left(Z^4 + \frac{1}{Z^4}\right) + \left(Z^3 + \frac{1}{Z^3}\right) + \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right) + \left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 1 = 0$

Agora substituindo $Z + \frac{1}{Z} = a$, $Z^2 + \frac{1}{Z^2} = a^2 - 2$, $Z^3 + \frac{1}{Z^3} = a^3 - 3a$, $Z^4 + \frac{1}{Z^4} = a^4 - 4a + 2$, $Z^5 + \frac{1}{Z^5} = a^5 - 5.a^3 + 5.a$, $Z^6 + \frac{1}{Z^6} = a^6 - 6.a^4 + 9.a^2 - 2$, Z^7

$+ \frac{1}{Z^7} = a^7 - 7.a^5 + 14.a^3 - 7.a$ e por fim $Z^8 + \frac{1}{Z^8} = a^8 - 8.a^6 + 20.a^4 - 16.a^2 + 2$ teremos uma equação que organizando seus termos fica $a^8 + a^7 - 7.a^6 - 6.a^5 + 15.a^4 + 10.a^3 - 10.a^2 + 4.a + 1 = 0$ e como +1 e – 1 não são raízes dessa equação o polinômio é irredutível em Q[x]. Logo *a* é raiz de um polinômio irredutível cujo grau é uma potência de 2. Pelo teorema não podemos afirmar se ele é ou não construtível. Mas foi Gauss que provou juntamente com toda a teoria que o polígono de 17 lados é construtível.

Um importante resultado observado aqui, observado por Gauss, foi o grau do polinômio usado para chegar ao número 2.cos $(\frac{2\pi}{n})$ sendo n um número primo. Primeiro passamos por um polinômio de grau n -1 e usando a substituição $Z + \frac{1}{Z} = a$ chegamos a um polinômio de grau $\frac{n-1}{2}$. Pelo teorema do nosso trabalho, se a é construtível então $\frac{n-1}{2}$ é uma potência de 2 o que acarreta que n – 1 também é. Então $n - 1 = 2^m$ logo $n = 2^m + 1$. Porém observa-se que para:

m= 1 , n = 3 que é primo;

m= 2, n = 5 que é primo;

m= 3, n = 9 que não é primo;

m= 4, n = 17 que é primo;

m = 5, n = 33 que não é primo;

m = 6, n = 65 que não é primo;

m = 7, n = 129 que não é primo;

m = 8, n = 257 que é primo.

Então n é primo se m for da forma 2^k. Isto nos leva a seguinte conclusão:

Se n é primo, então um polígono regular de n lados só será construtível se, e somente se n for da forma $2^{2^k} + 1$ sendo k um número inteiro não negativo.

Esses números ficaram conhecidos como números de Fermat. São eles para k = 0, 1, 2, 3, 4 que dão n = 3, n = 5, n = 17, n = 257, n= 65537. Foi Euler o primeiro a descobrir que para k = 5 que dá n = 4294967297 não é primo pois é múltiplo de 641.

Com isso agora temos um critério importante que define quais polígonos podem ser construídos por régua e compasso e quais não podem.

Teorema: Um polígono de n lados é construtível se, e somente se $n = 2^k$ ou $n = 2^k.P_1.P_2....P_r$ onde $P_1.P_2....P_r$ são números primos de Fermat.

5. Considerações finais

Ao longo deste trabalho, em vários momentos me questionei sobre a percepção desta teoria na ótica dos professores que atuam no ensino fundamental e médio em matemática ou em desenho geométrico. Com isso, durante minha trajetória lecionando a disciplina nas escolas, e durante conversas informais com outros colegas, na maioria das vezes, as respostas dadas sobre construção de determinados polígonos, eram feitas sem critério de “possibilidade” apenas por aproximações.

Cada vez mais as teorias algébricas e as construções geométricas estão se distanciando no ensino básico. O uso de ferramentas informatizadas, não podem deturpar as verdades matemáticas que estão por trás de cada construção. Sendo assim, a ausência destes conteúdos nos manuais dos professores, não pode ser motivo para que não seja utilizada uma forma concreta e com uma justificativa matemática para a solução de determinados problemas ou mesmo para provar a impossibilidades de alguns. O professor precisa estabelecer uma interação com aluno e estimular o raciocínio para determinados questionamentos a fim de enriquecer a aula.

Em muitos momentos do ensino fundamental, professores de álgebra e o desenho geométrico podem trabalhar juntos a fim de proporcionar aos alunos um melhor entendimento sobre números comensuráveis e incomensuráveis, assunto que traz muitas dificuldades, dentre outros assuntos. No ensino médio que professores possam fazer alusões de construções já vistas associadas a uma álgebra um pouco mais esclarecedora.

Este trabalho vem para contribuir, através de uma linguagem de fácil entendimento, com essa teoria para que o professor possa, não só apresentar as construções geométricas, mas também justifica-las quando forem ou não forem possíveis.

Como autor, acredito que a teoria de extensões de corpos deva estar na literatura de maneira mais informal, da mesma maneira que assuntos difíceis e específicos da área científica são tratados em revistas de divulgação científica para que não se tornem mitos. Acredito também que esse trabalho sirva para que professores de desenho geométrico possam ter uma maior interação com assuntos algébricos mantendo uma relação mais estreita com os alunos e com a matemática.

6. Referências bibliográficas

1 HERSTEIN, I. N. Tópicos de Álgebra. São Paulo: Editora Polígono. 1970

2 LIMA, E. L. Curso de Análise. Volume 1, 7ª edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1976

3 WAGNER, E. Construções Geométricas. Coleção do Professor de Matemática. 6ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2007

4 LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 1998

5 MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; M. JORGE, Geometria II. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves. 1988

6 FIGUEREDO, D. G. Números irracionais e transcendentes. Coleção Iniciação Científica. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2002

7 PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. O problema da construção de polígonos regulares de Euclides e Gauss. Revista Famat, v.1, n. 1, 2013.