

### 3 Cálculo da Variação de Volume dos Anulares

Para efetuar o cálculo de mudança de volume nos anulares dividiu-se o poço em seções axiais  $s$  com semelhança na geometria e condições de contorno. Posteriormente, dividiram-se as seções verticais  $s$  em intervalos  $k$  de comprimento  $L_k$ , referenciando a profundidade do intervalo segundo nomenclatura apresentada na figura 3.1. O raio interno da coluna de revestimento  $i$ , no intervalo vertical  $k$  da seção  $s$ , é dado por  $a_{i,k}$  e o raio externo é dado por  $b_{i,k}$ . A temperatura é expressa pela notação  $T_{i,k}$  e  $T_{i,R,k}$  e a pressão por  $P_{i,k}$ ,  $P_{i,L,k}$  e  $P_{i,R,k}$ . O índice  $R$  indica referência à variável situada à direita da coluna de revestimento  $i$  e  $L$  à esquerda da coluna de revestimento  $i$ . A seção  $s$  é a extensão do poço com mesmo número de anulares e colunas de revestimentos e mesmas condições de contorno.

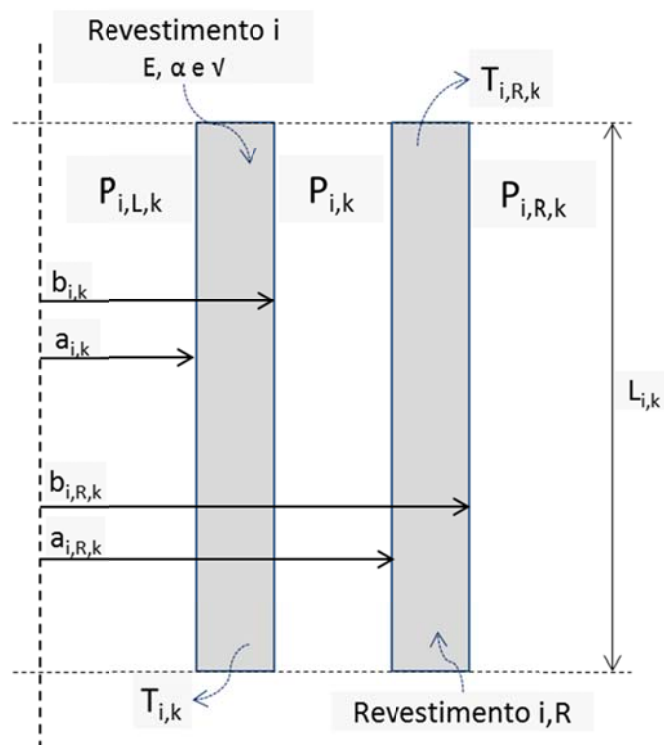


Figura 3.1: Notação utilizada para descrever as variáveis de um intervalo  $k$  de uma seção  $s$  em um poço com múltiplos anulares.

Logo, tem-se no cálculo do volume  $V_{a,i,k}$  do elemento  $k$  do anular  $i$  a partir da Figura 3.1):

$$V_{a,i,k} = \pi(a_{i,R,k}^2 - b_{i,k}^2)L_k \quad (3.1)$$

A variação de volume corresponde à diferença do volume na nova condição de equilíbrio, estabelecido pela variação nos perfis de temperatura e pressão, subtraída do volume na condição inicial dado pela eq. (3.1). A variação no perfil de temperatura é expresso pela notação  $\Delta T_{i,k}$  e  $\Delta T_{i,R,k}$  e a variação no perfil de pressão por  $\Delta P_{i,k}$ ,  $\Delta P_{i,L,k}$  e  $\Delta P_{i,R,k}$ .

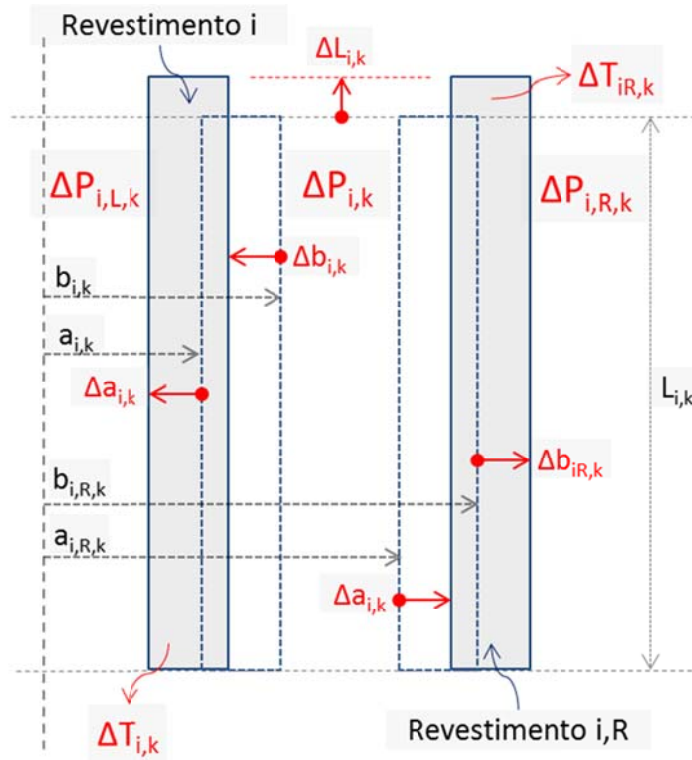


Figura 3.2: Ilustração da mudança de volume do anular no intervalo  $k$  em função dos deslocamentos dos revestimentos.

O volume na nova condição de equilíbrio pode ser calculado, conforme Figura 3.2), somando-se os deslocamentos  $\Delta a$  no raio interno da coluna à direita ( $iR$ ),  $\Delta b$  no raio externo da coluna  $i$  e  $\Delta L_k$  no termo de extensão do intervalo  $k$  no anular  $i$ :

$$\Delta V_{a,i,k} = \pi \left[ (a_{i,R,k} + \Delta a_{i,R,k})^2 - (b_{i,k} + \Delta b_{i,k})^2 \right] (L_k + \Delta L_k) - V_{a,i,k} \quad (3.2)$$

Substitui-se  $V_{a,i,k}$  e expande-se os termos da eq. (3.2) para analisar as ordens de grandeza.

$$\begin{aligned}
\Delta V_{a,i,k} = & \pi(a_{i,R,k}^2 - b_{i,k}^2)L_k + 2\pi(a_{i,R,k} \cdot \Delta a_{i,R,k} - b_{i,k} \cdot \Delta b_{i,k})L_k \\
& + \underbrace{\pi(\Delta a_{i,R,k}^2 - \Delta b_{i,k}^2)}_{\approx 0}L_k + \pi(a_{i,R,k}^2 - b_{i,k}^2)\Delta L_k \\
& + \underbrace{2\pi(a_{i,R,k} \cdot \Delta a_{i,R,k} - b_{i,k} \cdot \Delta b_{i,k})\Delta L_k}_{\approx 0} \\
& + \underbrace{\pi(\Delta a_{i,R,k}^2 - \Delta b_{i,k}^2)\Delta L_k}_{\approx 0} - \pi(a_{i,R,k}^2 - b_{i,k}^2)L_k
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Desprezando os termos com produtos de infinitesimais e rearranjando a eq. (3.3) chega-se à expressão para mudança de volume no intervalo  $k$  em função dos deslocamentos:

$$\Delta V_{a,i,k} = 2\pi[a_{i,R,k}\Delta a_{i,R,k} - b_{i,k}\Delta b_{i,k}] \cdot L_k + \pi(a_{i,R,k}^2 - b_{i,k}^2) \cdot \Delta L_k \tag{3.4}$$

A variação de extensão no intervalo  $k$  pode ser calculada como função da dilatação térmica da coluna de revestimento  $iR$ . Esta coluna de revestimento é menos aquecida por se tratar da coluna de revestimento mais externa da seção do anular  $i$ . Também possui extensão equivalente ao intervalo não cimentado da coluna de revestimento mais interna (coluna de revestimento  $i$ ) considerando que o anular  $i$  está cimentado até a sapata. Deste modo, tem-se a dilatação térmica longitudinal do anular  $i$  expressa por:

$$\Delta L_k = \alpha \cdot \Delta T_{i,R,k} \cdot L_k \tag{3.5}$$

Outra opção para calcular a dilatação térmica das colunas de revestimento é efetuar a média do perfil de temperatura da coluna de revestimento  $iR$  com a do revestimento  $i$ , porém esta é menos conservadora. Porém, a opção tecnicamente mais precisa passa por calcular a dilatação térmica longitudinal dos revestimentos dos anulares vizinhos e considerar a composição de esforços imposta na cabeça do poço. Este balanço de forças é mais complexo, pois deve considerar a memória de esforços no momento das operações de cimentação, cura do cimento e outros.

Substituindo a eq. (3.5) na eq. (3.4) tem-se a variação de volume do intervalo  $k$  em função da dilatação térmica, resultante da variação de temperatura da coluna de revestimento à direita do anular  $i$ , onde  $\Delta$  representa a mudança no estado inicial de cada variável e  $\alpha$  representa o coeficiente de dilatação térmica do material analisado.

$$\Delta V_{a,i,k} = 2\pi[a_{i,R,k}\Delta a_{i,R,k} - b_{i,k}\Delta b_{i,k}] \cdot L_k + \overbrace{\pi(a_{i,R,k}^2 - b_{i,k}^2)}^{V_{a,i,k}} L_k \cdot \alpha \Delta T_{i,R,k} \quad (3.6)$$

Para calcular o volume total e variação de volume total é necessário somar todos os intervalos  $L_k$  de cada anular  $i$ . Deste modo pode-se expressar matematicamente o volume total e variação de volume total dos anulares através das seguintes equações:

$$V_{a,i} = \sum_N V_{a,i,k} \quad (3.7)$$

$$\Delta V_{a,i} = \sum_N \Delta V_{a,i,k} \quad (3.8)$$

Onde  $N$  representa o número de intervalos  $k$  com extensão  $L_k$  de cada anular  $i$ .

Os deslocamentos das paredes dos revestimentos ocasionados pela variação do perfil de pressão no poço podem ser calculados com boa precisão utilizando a solução de Lamé (Timoshenko & Goodier, 1980) aplicada ao deslocamento.

$$u_r = \frac{1 - \nu}{E} \left( \frac{r_{in}^2 \cdot P_{in} - r_{out}^2 \cdot P_{out}}{r_{out}^2 - r_{in}^2} \right) r + \frac{1 + \nu}{E} \left[ \frac{r_{out}^2 \cdot r_{in}^2 \cdot (P_{in} - P_{out})}{r_{out}^2 - r_{in}^2} \right] \frac{1}{r} - \frac{\nu r}{E} \sigma_o \quad (3.9)$$

Onde  $u_r$  é o deslocamento,  $\sigma_o$  é a tensão longitudinal,  $\nu$  é o fator de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $P_{in}$  é a pressão interna,  $P_{out}$  a pressão externa,  $r_{in}$  o raio interno,  $r_{out}$  o raio externo e  $r$  é raio do ponto considerado para o deslocamento na análise do tubo onde  $r_{in} < r < r_{out}$ .

Para aplicação na análise de APB considera-se um cilindro de parede espessa com extremidade aberta. Em contrapartida considera-se a expansão da parede do revestimento causado pela dilatação térmica radial do aço, que é somada ao termo de deslocamento. Logo, aplicando a nomenclatura da Figura 3.2) na eq. (3.9) chega-se a seguinte expressão para variação do raio no intervalo  $k$  do anular  $i$ :

$$\Delta r = \left( \frac{1 - \nu}{E} \right) \left( \frac{a_{i,R,k}^2 \cdot \Delta P_{i,k} - b_{i,R,k}^2 \cdot \Delta P_{i,R,k}}{b_{i,R,k}^2 - a_{i,R,k}^2} \right) r + \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \left( \frac{b_{i,R,k}^2 a_{i,R,k}^2 \cdot (\Delta P_{i,k} - \Delta P_{i,R,k})}{b_{i,R,k}^2 - a_{i,R,k}^2} \right) \frac{1}{r} + \alpha r \Delta T \quad (3.10)$$

Aplicando  $r = a_{i,R,k}$  na eq. (3.10), em que o índice  $R$  refere-se às variáveis adjacentes à direita da coluna de revestimento  $i$ , tem-se a seguinte expressão:

$$\Delta a_{i,R,k} = \left[ \left( \frac{1 - \nu}{E} \right) \left( \frac{a_{i,R,k}^2 \cdot \Delta P_{i,k} - b_{i,R,k}^2 \cdot \Delta P_{i,R,k}}{b_{i,R,k}^2 - a_{i,R,k}^2} \right) a_{i,R,k} + \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \left( \frac{b_{i,R,k}^2 a_{i,R,k}^2 \cdot (\Delta P_{i,k} - \Delta P_{i,R,k})}{b_{i,R,k}^2 - a_{i,R,k}^2} \right) \frac{1}{a_{i,R,k}} \right] + \alpha \cdot a_{i,R,k} \cdot \Delta T_{i,R,k} \quad (3.11)$$

Aplicando  $r = b_{i,k}$  na eq. (3.10), em que o índice  $L$  refere-se às variáveis adjacentes à esquerda da coluna de revestimento  $i$ , tem-se a seguinte expressão:

$$\Delta b_{i,k} = \left[ \left( \frac{1 - \nu}{E} \right) \left( \frac{a_{i,k}^2 \cdot \Delta P_{i,L,k} - b_{i,k}^2 \cdot \Delta P_{i,k}}{b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2} \right) b_{i,k} + \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \left( \frac{b_{i,k}^2 a_{i,k}^2 (\Delta P_{i,L,k} - \Delta P_{i,k})}{b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2} \right) \frac{1}{b_{i,k}} \right] + \alpha \cdot b_{i,k} \cdot \Delta T_{i,k} \quad (3.12)$$

Onde  $\Delta P_{i,L,k}$  será o equivalente ao APB resultante no anular à esquerda da coluna  $i$ ,  $\Delta P_{i,k}$  ao APB resultante no anular da coluna  $i$ ,  $\Delta P_{i,R,k}$  ao APB resultante no anular adjacente à direita da coluna  $i$ ,  $\Delta T_{i,k}$  é a variação de temperatura no intervalo  $k$  da coluna de revestimento  $i$ ,  $\Delta T_{i,R,k}$  é a variação de temperatura no intervalo  $k$  da coluna de revestimento  $i_R$  e  $E$ ,  $\nu$  e  $\alpha$  são o módulo de Young, coeficiente de Poisson e coeficiente de expansão térmica do aço, respectivamente.

A partir da equação de Lamé para o deslocamento, e a inclusão dos termos de dilatação térmica, pode-se calcular a variação de volume no intervalo  $k$  do anular  $i$ , em função de variação do perfil térmico e variações das pressões dos anulares. A expressão é resultante da substituição das eq. (3.11) e (3.12) na eq. (3.6) para mudança de volume. O resultado é expresso em função das variáveis de temperatura e pressão, a fim de facilitar a manipulação algébrica e melhorar a visualização do mesmo:

$$\Delta V_{a,i,k} = A_{i,k} \cdot \Delta P_{i,L,k} + B_{i,k} \cdot \Delta P_{i,k} + C_{i,R,k} \cdot \Delta P_{i,R,k} + D_{i,k} \cdot \Delta T_{i,k} + E_{i,R,k} \cdot \Delta T_{i,R,k} \quad (3.13)$$

Onde,

$$A_{i,k} = -\frac{4\pi L_k}{E} \frac{a_{i,k}^2 b_{i,k}^2}{(b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2)} \quad (3.14)$$

$$B_{i,k} = \frac{2\pi L_k}{E} \left\{ \frac{a_{i,R,k}^2}{(b_{i,R,k}^2 - a_{i,R,k}^2)} \cdot [(1 - \nu) \cdot a_{i,R,k}^2 + (1 + \nu) \cdot b_{i,R,k}^2] + \frac{b_{i,k}^2}{(b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2)} \cdot [(1 - \nu) \cdot b_{i,k}^2 + (1 + \nu) \cdot a_{i,k}^2] \right\} \quad (3.15)$$

$$C_{i,R,k} = -\frac{4\pi L_k}{E} \frac{a_{i,R,k}^2 b_{i,R,k}^2}{(b_{i,R,k}^2 - a_{i,R,k}^2)} \quad (3.16)$$

$$D_{i,k} = -2\pi\alpha b_{i,k}^2 L_k \quad (3.17)$$

$$E_{i,R,k} = 2\pi\alpha a_{i,R,k}^2 L_k + \alpha V_{a,i,k} \quad (3.18)$$

Os termos  $A_{i,k}$ ,  $B_{i,k}$  e  $C_{i,R,k}$  são equivalentes a matriz  $[A]$  e os termos  $D_{i,k}$  e  $E_{i,R,k}$  são equivalentes a matriz  $[\Psi]$  da eq. (2.15).

### 3.1.

#### Aplicação das Condições de Contorno

As condições de contorno referem-se ao revestimento mais externo de cada seção  $s$ . Basicamente são encontradas duas situações: anular cimentado e anular não cimentado preenchido com fluido de perfuração. No anular não cimentado ainda se tem a particularidade da fluência do sal, que será explorada no cálculo do APB ao longo da dissertação.

#### 3.1.1.

##### Varição de Volume do Anular com Intervalo Cimentado

No cálculo da expansão dos anulares dos revestimentos deve-se ter cuidado ao tratar das condições de fronteira, pois tratar o intervalo revestimento x cimento x formação como rígido pode acrescentar erro considerável no cálculo do APB. A solução adotada foi tratar o conjunto como uma fundação elástica. Na modelagem do APB deste trabalho, por simplificação, considerou-se o cimento e a formação como um corpo único com módulo de Young de 10,9 GPa e coeficiente de

Poisson de 0,36. Do mesmo modo considerou-se módulo de Young de 10,9 GPa e coeficiente de Poisson de 0,36 para a formação no intervalo de poço aberto (intervalo de evaporito). Para um resultado mais preciso deve-se conhecer a litologia do poço junto às propriedades das rochas, o que pode resultar em alguma diferença no cálculo de APB, principalmente no anular mais externo da seção que está em contato com a formação.

Considerando a condição de fronteira como uma fundação elástica, há um decréscimo hiperbólico da tensão radial da formação a partir da parede do poço  $a_f$  até uma distância suficientemente grande ( $b_f$ ), onde a mudança de pressão na parede do poço não causa perturbação do estado inicial de tensão na formação. Deste modo, para a interface revestimento x formação, ocorre um APB nomeado de APB da formação ( $\Delta P_{i,k} = \Delta P_{f,k}$ ) e para um raio  $b_f$  muito grande ( $b_f / a_f \rightarrow \infty$ ), a partir da parede do poço, ocorre um APB praticamente nulo ( $\Delta P_{i,R,k} = \Delta P_{f,R,k} = 0$ ), pois o distúrbio de pressão não é significativo (Sathuvalli, et al., 2005).

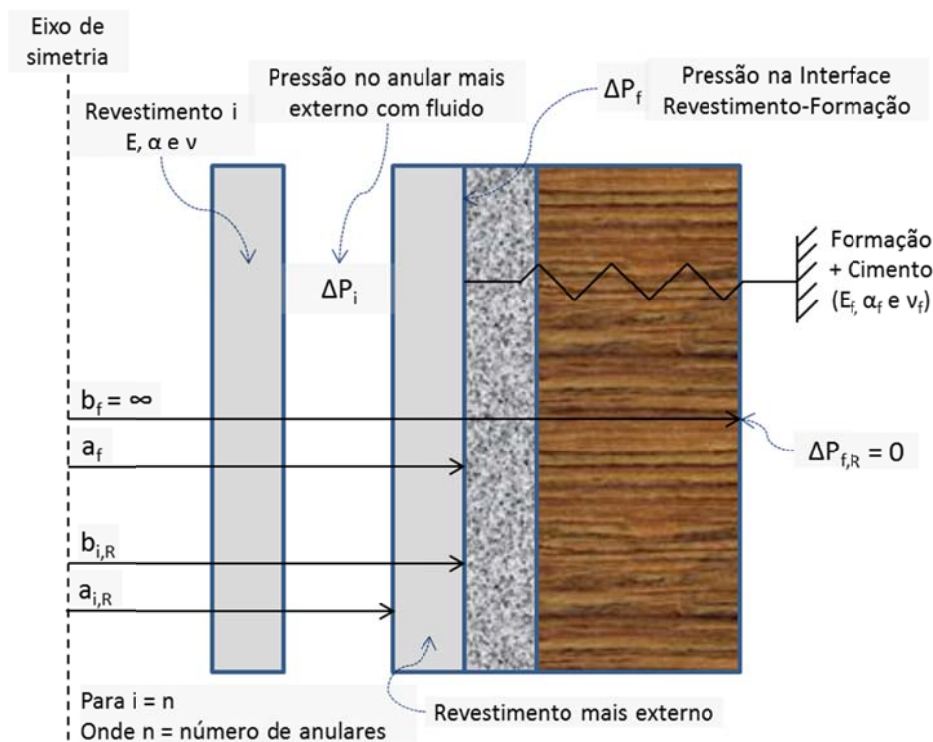


Figura 3.3: Aplicação das condições de contorno para anular cimentado.

Para calcular o deslocamento radial do raio interno do poço, que está em contato direto com a parede do revestimento mais externo da na seção  $s$ , utiliza-se a eq. (3.10). Na condição de fronteira faz-se a análise considerando a formação como um cilindro de raio infinito, em que se chama a parede interna da formação

de  $a_{f,k}$  e a parede externa da formação de  $b_{f,k}$ . Nomeia-se a pressão desconhecida na interface revestimento-formação por  $\Delta P_{f,k}$  e considera-se nula a perturbação de pressão em um raio muito distante de modo que  $\Delta P_{f,R,k} = 0$ . Também é necessário aplicar as propriedades da rocha no cálculo do deslocamento do raio interno da formação ( $\Delta a_f$ ), que está em contato com o revestimento na seção. Deste modo tem-se para a condição de fronteira as seguintes considerações:  $b_f / a_f \rightarrow \infty$ ,  $a_{i,R,k} = a_{f,k}$ ,  $b_{i,R,k} = b_{f,k}$ ,  $\Delta P_{i,k} = \Delta P_{f,k}$ ,  $\Delta P_{i,R,k} = \Delta P_{f,R,k} = 0$ ,  $E = E_f$ ,  $\nu = \nu_f$ ,  $\alpha = \alpha_f$  e  $\Delta T_{i,R,k} = \Delta T_{f,k}$  em que o índice  $f$  indica formação, conforme Figura 3.3).

$$\Delta a_{f,k} = a_{f,k} \left[ \left( \frac{1 - \nu_f}{E_f} \right) \left( \frac{a_{f,k}^2 \cdot \Delta P_{f,k} - \infty^2 \cdot 0}{\infty^2 - a_{f,k}^2} \right) + \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) \left( \frac{\infty^2 \cdot (\Delta P_{f,k} - 0)}{\infty^2 - a_{f,k}^2} \right) \right] + \alpha_f \cdot a_{f,k} \cdot \Delta T_{f,k} \quad (3.19)$$

Simplificando e rearranjando os termos da eq. (3.20) tem-se:

$$\Delta a_{f,k} = a_{f,k} \left[ \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) \Delta P_{f,k} + \alpha_f \cdot \Delta T_{f,k} \right] \quad (3.20)$$

Para calcular o deslocamento da parede externa, do revestimento mais externo da seção ( $\Delta b_{re,k}$ ), novamente utiliza-se a eq. (3.10). A pressão do anular a esquerda deste revestimento, que está em contato com a formação, é dada por  $\Delta P_{i,R,k}$  e é a última pressão calculada sem aplicação das condições de contorno. Já a pressão da interface revestimento-formação, que não é conhecida, é chamada de pressão da formação  $\Delta P_{f,k}$ . Deste modo, para aplicação das condições de contorno na eq. (3.10), tem-se o seguinte:  $\Delta P_{i,L,k} = \Delta P_{re,L,k}$ ,  $\Delta P_{i,k} = \Delta P_{re,k}$ ,  $\Delta P_{re,R,k} = \Delta P_{f,k}$  e  $\Delta T_{re,R,k} = \Delta T_{f,k}$ .

$$\Delta b_{re,k} = b_{re,k} \left[ \left( \frac{1 - \nu}{E} \right) \left( \frac{a_{re,k}^2 \cdot \Delta P_{i,k} - b_{re,k}^2 \cdot \Delta P_{f,k}}{b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2} \right) + \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \left( \frac{a_{re,k}^2 \cdot (\Delta P_{i,k} - \Delta P_{f,k})}{b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2} \right) \right] + \alpha_f \cdot b_{re,k} \Delta T_{f,k} \quad (3.21)$$

Onde  $a_{re,k}$  refere-se ao raio interno do revestimento mais externo da seção. Podem-se agrupar os termos de pressão e temperatura e expressar a eq. (3.21) semelhantemente:



$$\Delta b_{re,k} = \frac{b_{re,k}}{E(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2)} \left[ 2a_{re,k}^2 \Delta P_{i,k} - \Delta P_{f,k} (b_{re,k}^2(1 - \nu) + a_{re,k}^2(1 + \nu)) \right] + \alpha_f \cdot b_{re,k} \cdot \Delta T_{f,k} \quad (3.22)$$

Impondo a condição de continuidade, em que o deslocamento do raio externo do revestimento mais externo  $\Delta b_{re,k}$  é igual deslocamento do raio interno da formação  $\Delta a_f$ , pode-se reescrever a eq. (3.20):

$$\Delta b_{re,k} = b_{re,k} \left[ \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) \Delta P_{f,k} + \alpha_f \cdot \Delta T_{f,k} \right] \quad (3.23)$$

Igualando-se as eq. (3.22) e (3.23) para o termo  $\Delta b_{re,k}$  e isolando a pressão desconhecida  $\Delta P_{f,k}$  chega-se a:

$$\Delta P_{f,k} = \frac{2a_{re,k}^2}{E(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2) \frac{(1 + \nu_f)}{E_f} + [(b_{re,k}^2 + a_{re,k}^2) - \nu(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2)]} \Delta P_{i,k} \quad (3.24)$$

Logo, a eq. (3.24) descreve a pressão da interface revestimento-formação  $\Delta P_{f,k}$  em função da variação da pressão do anular situado à esquerda do revestimento mais externo da seção, que é uma pressão conhecida. Conhecidas as variáveis da condição de fronteira aplicam-se as mesmas na eq. (3.13), utilizada para calcular a variação de volume nos anulares internos. Dessa forma, a pressão à direita do anular mais externo do poço  $\Delta P_{i,R,k}$  será equivalente a  $\Delta P_{f,k}$  na matriz de rigidez e o produto  $C_{i,R,k} \cdot \Delta P_{i,R,k}$  da eq. (3.13) será o seguinte:

$$C_{i,R,k} \cdot \Delta P_{f,k} = - \left( \frac{4\pi L_k}{E} \frac{a_{re,k}^2 b_{re,k}^2}{(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2)} \right) \cdot \left( \frac{2a_{re,k}^2}{E(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2) \frac{(1 + \nu)}{E_f} + [(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2) - \nu(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2)]} \right) \Delta P_{i,k} \quad (3.25)$$

Para reescrever a eq. (3.13) na condição de contorno, em função da pressão da formação calculada na eq. (3.24), força-se a seguinte igualdade:

$$C_{i,R,k} \cdot \Delta P_{f,k} = C_{i,R,k}' \cdot \Delta P_{i,k} \quad (3.26)$$

Isolando-se o termo  $C_{i,R,k}'$  da eq. (3.26) tem-se:

$$C_{i,R,k}' = - \left( \frac{4\pi L_k}{E} \frac{a_{re,k} \cdot b_{re,k}^2}{(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2)} \right) \cdot \left( \frac{2 \cdot a_{re,k}^2}{E(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2) \cdot \frac{(1 + \nu)}{E_f} + [(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2) - \nu(b_{re,k}^2 - a_{re,k}^2)]} \right) \quad (3.27)$$

Logo, o cálculo da variação de volume do anular, na condição de fronteira, pode ser expresso utilizando a igualdade da eq. (3.26) na eq. (3.13). O termo  $C_{i,R,k}'$  torna-se uma função da pressão do anular  $i$ , adjacente à formação, que é uma pressão conhecida. Agrupando as pressões semelhantes, chega-se a formulação para a condição de fronteira com a seção cimentada:

$$\Delta V_{a,i,k} = A_{i,k} \cdot \Delta P_{i,L,k} + (B_{i,k} + C_{i,R,k}'). \Delta P_{i,k} + D_{i,k} \cdot \Delta T_{i,k} + E_{i,R,k} \cdot \Delta T_{i,R,k} \quad (3.28)$$

### 3.1.2.

#### Variação de Volume do Anular com Intervalo não Cimentado

Para calcular os termos da matriz de rigidez no intervalo não cimentado, e preenchido com fluido de perfuração, aplicam-se as condições de contorno na solução de Lamé para o deslocamento, de modo análogo ao realizado para o intervalo cimentado. Considera-se novamente a formação como um cilindro de raio infinito, em que o raio interno do cilindro é dado por  $a_{f,k}$  e o raio externo por  $b_{f,k}$ . Como o raio externo tende ao infinito, considera-se que a perturbação de pressão neste ponto não é significativa, logo  $\Delta P_{f,R,k} = 0$ . No deslocamento do raio interno da formação são utilizadas as propriedades da rocha. Deste modo, tem-se para as condições de fronteira do anular, localizado entre revestimento mais externo e a formação:  $b_f / a_f \rightarrow \infty$ ,  $a_{i,R,k} = a_{f,k}$ ,  $b_{i,R,k} = b_{f,k}$ ,  $\Delta P_{f,R,k} = 0$ ,  $E = E_f$ ,  $\nu = \nu_f$ ,  $\alpha = \alpha_f$  e  $\Delta T_{i,R,k} = \Delta T_{f,k}$ .

$$\Delta a_{f,k} = a_{f,k} \left[ \left( \frac{1 - \nu_f}{E_f} \right) \left( \frac{a_{f,k}^2 \cdot \Delta P_{i,k} - \infty^2 \cdot 0}{\infty^2 - a_{f,k}^2} \right) + \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) \left( \frac{\infty^2 \cdot (\Delta P_{i,k} - 0)}{\infty^2 - a_{f,k}^2} \right) \right] + \alpha_f \cdot a_{f,k} \cdot \Delta T_{f,k} \quad (3.29)$$

Da mesma forma, a simplificação da eq. (3.29) resulta em:

$$\Delta a_{f,k} = a_{f,k} \left[ \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) \Delta P_{i,k} + \alpha_f \cdot \Delta T_{f,k} \right] \quad (3.30)$$

Para o cálculo do deslocamento no revestimento mais externo da seção não cimentada aplicam-se as mesmas condições de contorno dos anulares internos. Basta adicionar o anular da condição de fronteira, preenchido com fluido, na rotina de cálculo da matriz de rigidez ( $i = i+1$ ). Deste modo, a coluna de revestimento mais externa da seção torna-se a parede interna deste anular ( $b_i$ ) e a formação a parede externa  $iR$ . Logo, a equação é expressa por:

$$\Delta b_{i,k} = \frac{b_{i,k}}{E(b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2)} \left[ 2a_{i,k}^2 \Delta P_{i,L,k} - \Delta P_{i,k} (b_{i,k}^2(1 - \nu) + a_{i,k}^2(1 + \nu)) \right] + \alpha b_{i,k} \Delta T_{i,k} \quad (3.31)$$

Com as condições de contorno definidas, para anular não cimentado, pode-se substituir a variável  $a_{i,R,k}$  pelo raio interno do poço  $a_{f,k}$  e variação de temperatura por  $\Delta T_{f,k}$  na eq. (3.6), o que resulta na seguinte expressão:

$$\Delta V_{a,i,k} = 2\pi L_k (a_{f,k} \cdot \Delta a_{f,k} - b_{i,k} \cdot \Delta b_{i,k}) + \pi L_k (a_{f,k}^2 - b_{i,k}^2) \alpha_f \Delta T_{f,k} \quad (3.32)$$

Em seguida, substituem-se as expressões (3.30) e (3.31), deduzidas para mudança de raio, na expressão para mudança de volume dada pela eq. (3.32).

$$\Delta V_{a,i,k} = 2\pi L_k \left\{ a_{f,k}^2 \left[ \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) \Delta P_{i,k} + \alpha_f \cdot \Delta T_{f,k} \right] - \frac{b_{i,k}^2}{E(b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2)} \left[ 2a_{i,k}^2 \Delta P_{i,L,k} - \Delta P_{i,k} (b_{i,k}^2(1 - \nu) + a_{i,k}^2(1 + \nu)) \right] - \alpha b_{i,k}^2 \Delta T_{i,k} \right\} + \pi L_k (a_{f,k}^2 - b_{i,k}^2) \alpha_f \Delta T_{f,k} \quad (3.33)$$

Reorganizando e agrupando os termos semelhantes da eq. (3.33) chega-se a expressão para o cálculo da variação de volume do anular não cimentado na condição de fronteira:

$$\Delta V_{a,f,k} = A_{i,k} \cdot \Delta P_{i,L,k} + B_{f,k} \cdot \Delta P_{i,k} + D_{i,k} \cdot \Delta T_{i,k} + E_{f,k} \cdot \Delta T_{f,k} \quad (3.34)$$

$$A_{i,k} = -4\pi L_k \frac{a_{i,k}^2 b_{i,k}^2}{E(b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2)} \quad (3.35)$$

$$B_{f,k} = 2\pi L_k \left\{ a_{f,k}^2 \left( \frac{1 + \nu_f}{E_f} \right) + \frac{b_{i,k}^2}{E(b_{i,k}^2 - a_{i,k}^2)} [b_{i,k}^2(1 - \nu) + a_{i,k}^2(1 + \nu)] \right\} \quad (3.36)$$

$$D_{i,k} = -2\pi b_{i,k}^2 L_k \alpha \quad (3.37)$$

$$E_{f,k} = 2\pi a_{f,k}^2 L_k \alpha_f + \pi(a_{f,k}^2 - b_{i,k}^2) L_k \alpha_f \quad (3.38)$$

A expressão é parecida com a obtida para os anulares internos apresentados na eq. (3.13) e seus termos. Porém, para esta condição de contorno, tem-se as propriedades da formação inclusas através das eq. (3.36) e (3.38), que são identificadas com a notação do subscrito  $f$  no lugar de  $i$ , e não se tem o termo  $C_{i,R,k}$ , devido à variação de pressão nula em um afastamento muito grande do poço.