

## 5

### Exemplos e Resultados

Neste capítulo, são apresentados exemplos numéricos com uso da implementação do XFEM feita nesse trabalho. Os resultados obtidos na avaliação dos fatores de intensidade de tensão são comparados a soluções teóricas clássicas encontradas na literatura. Para a análise da propagação de fratura, foram usados exemplos da literatura, assim como modelos físicos de estruturas de concreto. Os elementos utilizados nos modelos foram elementos quadrilaterais do tipo Q4, formando malhas estruturadas. As malhas apresentadas possuem elementos finitos convencionais e os elementos finitos do tipo XFEM.

#### 5.1.

#### Trinca de Aresta em Placa Submetida a Carregamento de Tração

Com a intenção de mostrar a capacidade do método XFEM e também testar a implementação realizada, foram analisados alguns exemplos com respostas já estabelecidas na literatura.

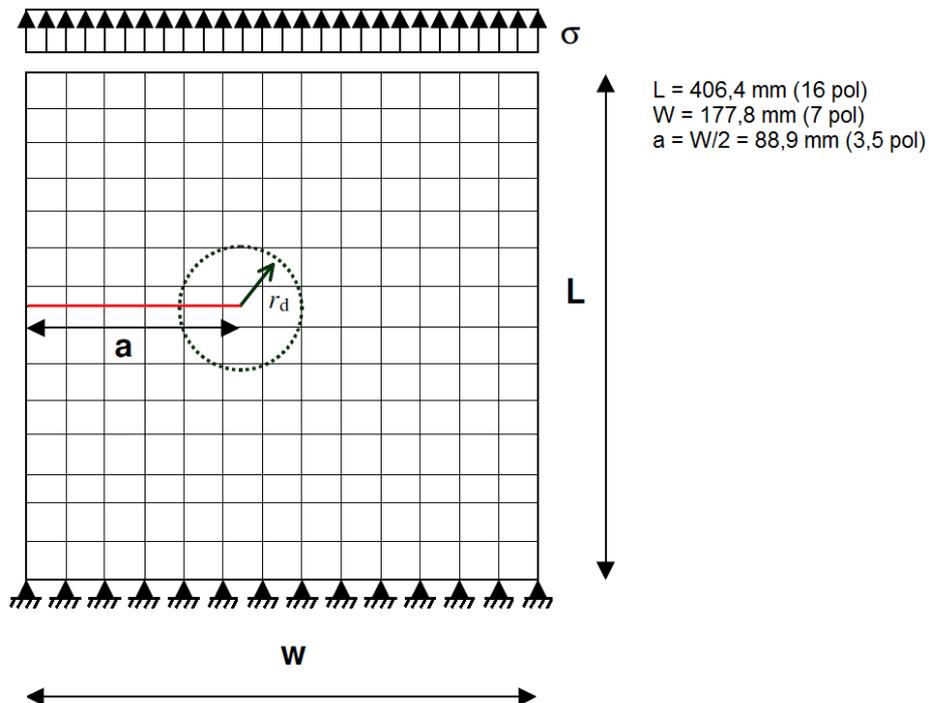
Este primeiro exemplo tem por objetivo avaliar o FIT em um caso de fratura em Modo I. Trata-se de uma placa retangular finita contendo uma trinca de aresta. As geometrias da peça e da trinca são ilustradas na Figura 5.1. A placa foi submetida a um carregamento de tração distribuído uniformemente no topo da peça com valor de  $\sigma = 6895$  Pa (1 psi) e foi restringida na base com as condições de contorno apresentadas na Figura 5.1. O problema foi avaliado na condição de EPD e as propriedades do material utilizadas foram  $E = 689,5$  MPa (100 ksi) e  $\nu = 0,3$ .

Neste caso, o valor do FIT é expresso por (Belytschko & Black, 1999):

$$K_I = C\sigma\sqrt{\pi a}, \quad (5.1)$$

onde

$$C = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 10.55\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{w}\right)^4. \quad (5.2)$$



**Figura 5.1 – Placa com trinca de aresta.**

Para a análise, foram utilizadas três malhas com elementos do mesmo tamanho. As malhas tiveram tamanhos de 12 x 24, 24 x 48 e 48 x 96 nós. Com essas malhas a fratura foi inserida cortando os elementos ao meio. A ponta da fratura localiza-se no interior de um elemento, conforme a Figura 5.1 ilustra. Com a disposição da fratura nas malhas utilizadas, é possível verificar a característica do XFEM de permitir a inserção da fratura no modelo de forma arbitrária, não havendo a necessidade de conformidade da mesma com os bordos dos elementos. A Tabela 5.1 mostra os resultados de  $K_I$  obtidos com as diferentes malhas e considerando diferentes domínios da integral de interação.

**Tabela 5.1 – Resultados de  $K_I$  ( $MPa\sqrt{mm}$ ) para diferentes domínios de avaliação da integral de interação.**

Malha	$r_d / h_{local}$				
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
12 x 24	0,3165	0,3165	0,3070	0,3064	0,3063
24 x 48	0,3271	0,3271	0,3175	0,3172	0,3168
48 x 96	0,3316	0,3316	0,3220	0,3217	0,3214

A partir da análise da tabela anterior, constata-se uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos e o valor analítico de referência igual a  $K_I = 0,3257 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ . Nota-se a convergência dos valores com o refinamento da malha. Foram computados erros em valores absolutos menores que 6% para a malha mais grosseira e menores que 2% para a malha mais refinada, conforme a Tabela 5.2. Os erros foram computados a partir da equação abaixo:

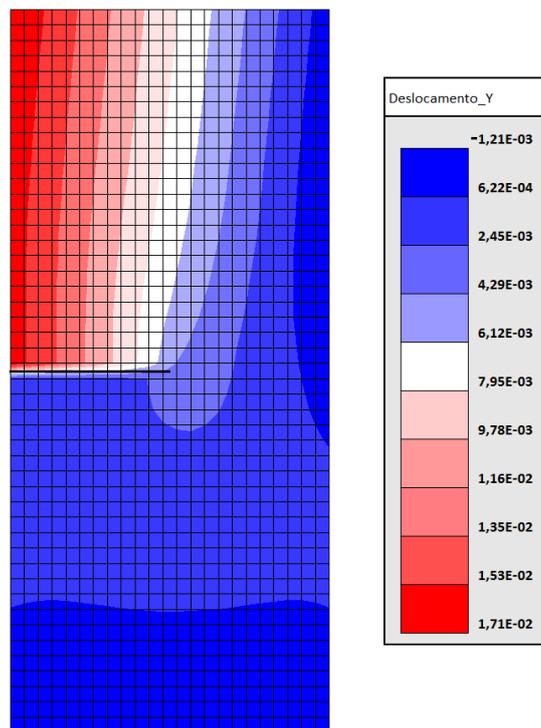
$$Erro = \frac{K_{I\_numérico} - K_{I\_analítico}}{K_{I\_analítico}} \quad (5.3)$$

**Tabela 5.2 – Erro no cálculo do FIT.**

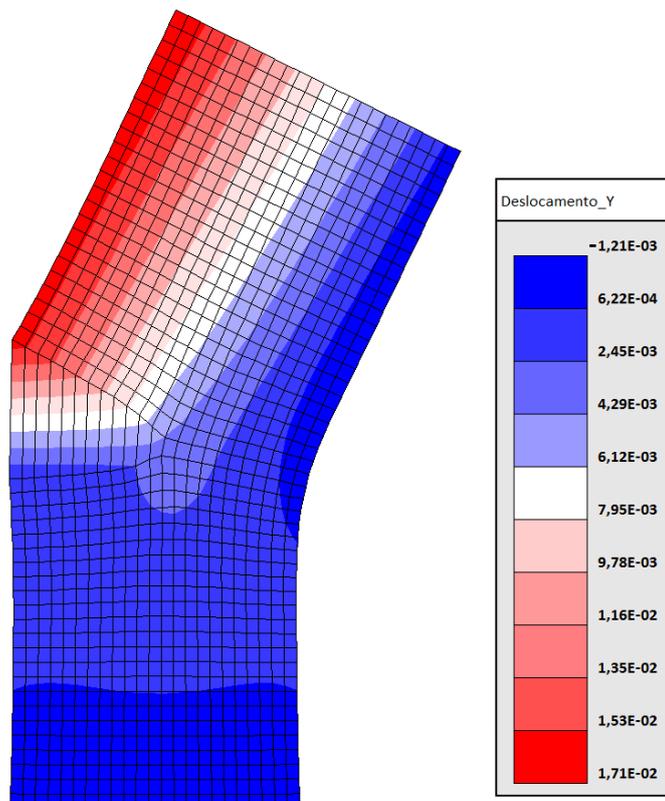
Malha	$r_d / h_{local}$				
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
12 x 24	-2,84%	-2,84%	-5,75%	-5,94%	-5,95%
24 x 48	0,43%	0,43%	-2,52%	-2,61%	-2,73%
48 x 96	1,81%	1,81%	-1,14%	-1,23%	-1,32%

Uma observação importante é que os resultados dos domínios menores não apresentam a mesma tendência dos resultados dos demais domínios. Isso se dá pelo fato do cálculo da integral de interação estar muito próximo à ponta da fratura. Os resultados obtidos para domínios mais afastados da ponta da trinca apresentam estabilidade e boa aproximação com relação à resposta analítica, por não serem afetados pela perturbação causada pela ponta da trinca. Ratifica-se que bons resultados são obtidos para valores de  $r_d / h_{local}$  entre 2 e 3.

A Figura 5.2 mostra o campo dos deslocamentos em  $y$  (direção vertical) no modelo em questão na configuração indeformada da estrutura. É evidenciada, em linha preta, a posição da trinca em relação à peça. Nesse processo de visualização, a representação da trinca é apenas ilustrativa. Já a Figura 5.3 mostra a estrutura na sua configuração deformada para o mesmo campo de deslocamentos. Observa-se na imagem da estrutura deformada, Figura 5.3, que a abertura da trinca ocorre no interior dos elementos cortados por ela. Não se tem a visualização da separação das faces da trinca, e, sim, apenas uma ideia do posicionamento e comportamento da abertura da mesma. Tal fato ocorre porque o programa Sigma2D não dá suporte a elementos do tipo XFEM.



**Figura 5.2 – Deslocamentos em  $y$  – estrutura indeformada.**  
(Deslocamentos expressos em milímetros)



**Figura 5.3 – Deslocamentos em  $y$  – estrutura deformada.**  
(Deslocamentos expressos em milímetros)

## 5.2.

### Trinca de Aresta em Placa Submetida a Carregamento de Cisalhamento

Neste exemplo, procura-se avaliar os fatores de intensidade de tensão na situação de trinca submetida a modo misto de carregamento. Para tal, foi realizada a análise de uma placa retangular finita com uma trinca de aresta, estando a placa submetida a um carregamento cisalhante uniformemente distribuído com valor de  $\tau = 6895 \text{ Pa}$  (1 psi) aplicado ao topo e tendo na base as condições de contorno essenciais ilustradas na Figura 5.1. A geometria e propriedades do material são as mesmas do exemplo anterior. Neste caso, a solução analítica para os fatores de intensidade de tensão são  $K_I = 1,1815 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  e  $K_{II} = 0,1581 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  (Yau et al., 1980).

Para a análise, foram adotadas três malhas com as mesmas configurações do exemplo anterior, assim como foram avaliados os mesmos domínios de integral de interação. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 5.3, para  $K_I$ , e na Tabela 5.4, para  $K_{II}$ .

**Tabela 5.3 - Valores de  $K_I$  ( $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ ) para diferentes domínios de avaliação da integral de interação.**

Malha	$r_d / h_{local}$				
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
12 x 24	1,1446	1,1446	1,1081	1,1047	1,1043
24 x 48	1,1886	1,1886	1,1528	1,1510	1,1497
48 x 96	1,2061	1,2061	1,1707	1,1692	1,1680

**Tabela 5.4 - Valores de  $K_{II}$  ( $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ ) para diferentes domínios de avaliação da integral de interação.**

Malha	$r_d / h_{local}$				
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
12 x 24	0,1599	0,1599	0,1548	0,1549	0,1550
24 x 48	0,1617	0,1617	0,1562	0,1563	0,1565
48 x 96	0,1624	0,1624	0,1568	0,1570	0,1571

Os resultados obtidos neste exemplo apresentam o mesmo perfil do exemplo anterior. Foram obtidos bons resultados para os dois fatores de intensidade de tensão avaliados. A convergência com o refinamento da malha também é evidenciada. Os resultados obtidos com um domínio pequeno para o cálculo da integral de interação e próximo à ponta da trinca não são próximos aos demais resultados. Nota-se a estabilidade aliada a uma boa precisão dos resultados para domínios maiores e afastados da ponta da trinca. A Tabela 5.5 e a Tabela 5.6 mostram os erros calculados de acordo com a Equação (5.3) para este exemplo. Os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos com a malha mais refinada para o domínio de relação  $r_d / h_{local} = 2$  apresentam uma excelente aproximação aos resultados analíticos, justificada por erros com valores em módulo abaixo de 1%.

**Tabela 5.5 – Erro no cálculo de  $K_I$ .**

Malha	$r_d / h_{local}$				
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
12 x 24	-3,12%	-3,12%	-6,21%	-6,50%	-6,54%
24 x 48	0,60%	0,60%	-2,43%	-2,58%	-2,69%
48 x 96	2,08%	2,08%	-0,91%	-1,04%	-1,14%

**Tabela 5.6 – Erro no cálculo de  $K_{II}$ .**

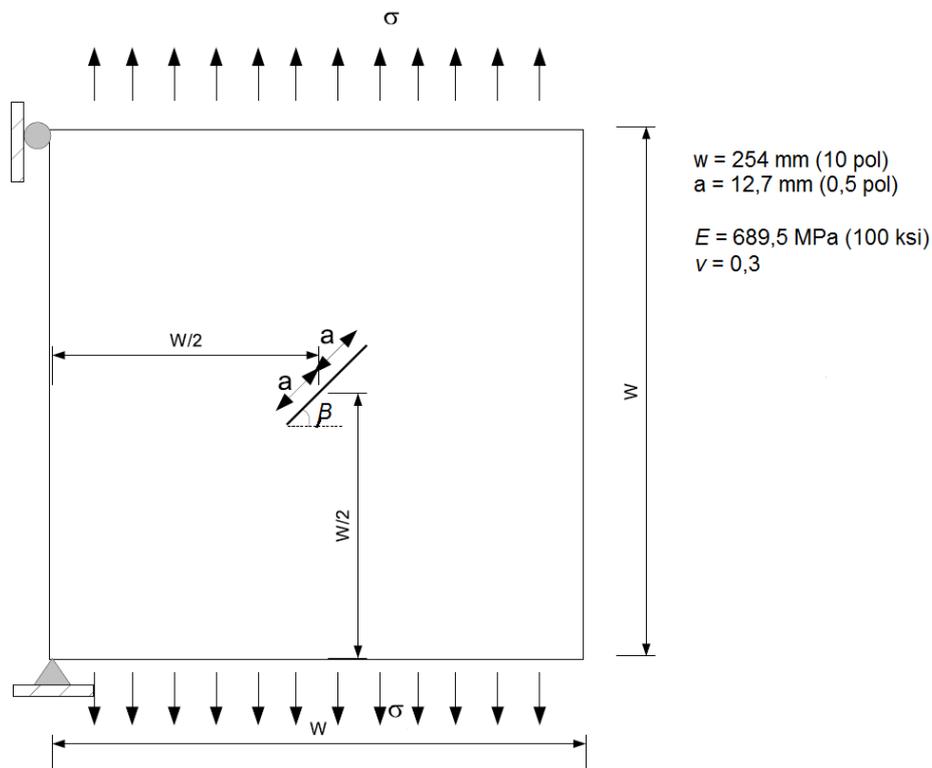
Malha	$r_d / h_{local}$				
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
12 x 24	1,11%	1,11%	-2,08%	-2,03%	-1,94%
24 x 48	2,28%	2,28%	-1,20%	-1,14%	-1,01%
48 x 96	2,72%	2,72%	-0,82%	-0,70%	-0,63%

Conclui-se que o modelo implementado fornece, também, bons resultados para problemas com avaliação dos dois fatores de intensidade de tensão.

### 5.3.

#### Trinca Centralizada em Placa Submetida a Carregamento de Tração

Este é mais um exemplo clássico encontrado na literatura, quando se fala da avaliação de fatores de intensidade de tensão. Trata-se de uma trinca centralizada em uma placa submetida a um carregamento uniaxial de tração com valor de  $\sigma = 6895 \text{ Pa}$  (1 psi). Foram feitas avaliações com a trinca posicionada em uma inclinação  $\beta$  variando de 0 a  $90^\circ$ . As geometrias da peça e da trinca, as condições de contorno e as propriedades do material utilizadas no modelo estão apresentadas na Figura 5.4. Todos os modelos possuem a mesma malha uniforme de  $41 \times 41$  elementos.



**Figura 5.4 – Trinca centralizada em placa “infinita”.**

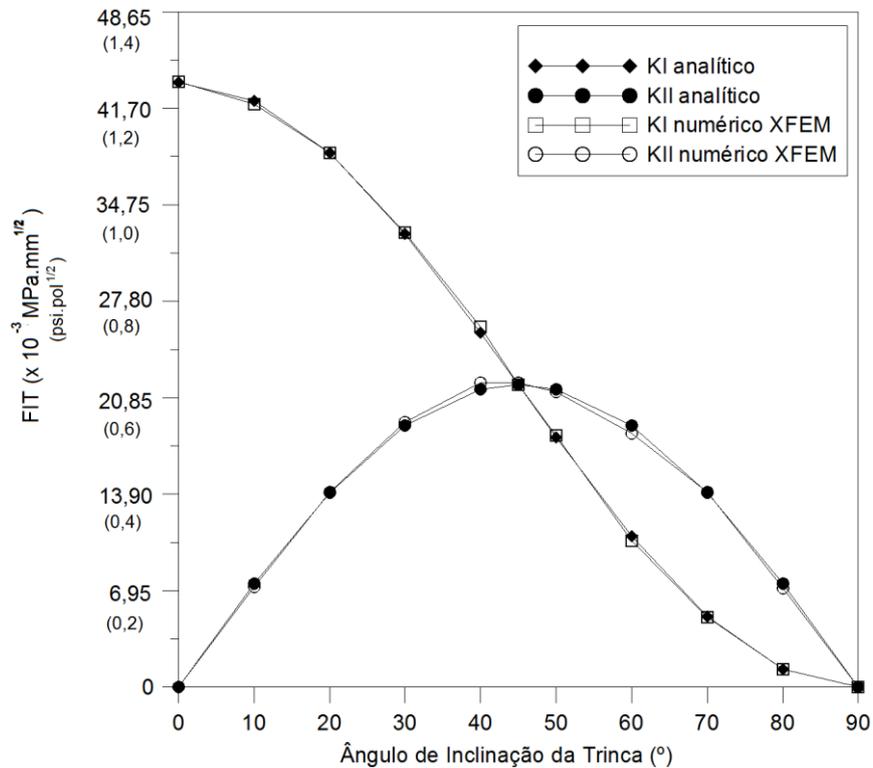
Os valores esperados para os fatores de intensidade de tensão são (Yau et al., 1980):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta \quad (5.4)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (5.5)$$

Estes resultados analíticos são para uma placa infinita. Considerando que a dimensão da trinca é bem pequena em comparação ao tamanho do modelo, essa aproximação é considerada válida para uma comparação com os valores

numéricos obtidos. A comparação dos resultados analíticos com resultados numéricos é vista na Figura 5.5.



**Figura 5.5 – Gráfico comparativo dos fatores de intensidade de tensão.**

As análises foram feitas com o domínio da integral de interação com a relação  $r_d / h_{local} = 2,0$ . As respostas deste exemplo, um típico caso de modo misto de carregamento, mostram uma boa concordância com as respostas analíticas.

## 5.4.

### Propagação de Fratura em Modo I

São apresentados dois exemplos de propagação de fratura em Modo I de carregamento. O primeiro exemplo é um caso típico da literatura e o segundo é a avaliação numérica de um modelo experimental. Para esta etapa de avaliação de propagação de fratura sob Modo I e para os demais exemplos de propagação em modo misto, adotou-se a relação  $r_d / h_{local} = 2,0$  para o cálculo do tamanho do domínio da integral de interação.

#### 5.4.1.

### Propagação de Trinca de Aresta em Placa submetida à Tração

Este é um exemplo de propagação de uma trinca de aresta em Modo I. A trinca de aresta está centrada em uma placa finita submetida à tração. As características do material e a geometria da peça são as mesmas utilizadas no item 5.1 (vide Figura 5.1). Para esta análise, foi considerada uma trinca inicial com tamanho de 50,8 mm (2 pol). No modelo, foi utilizada uma malha de 24 x 48 nós.

A fratura analisada seguiu uma trajetória reta, como era de se esperar, visto ser um exemplo de propagação em Modo I. Para a propagação da fratura foram adotados incrementos na extensão da fratura de 7,62 mm (0,3 pol). A Figura 5.6 mostra a evolução da fratura, nos passos finais da análise, antes da peça romper.

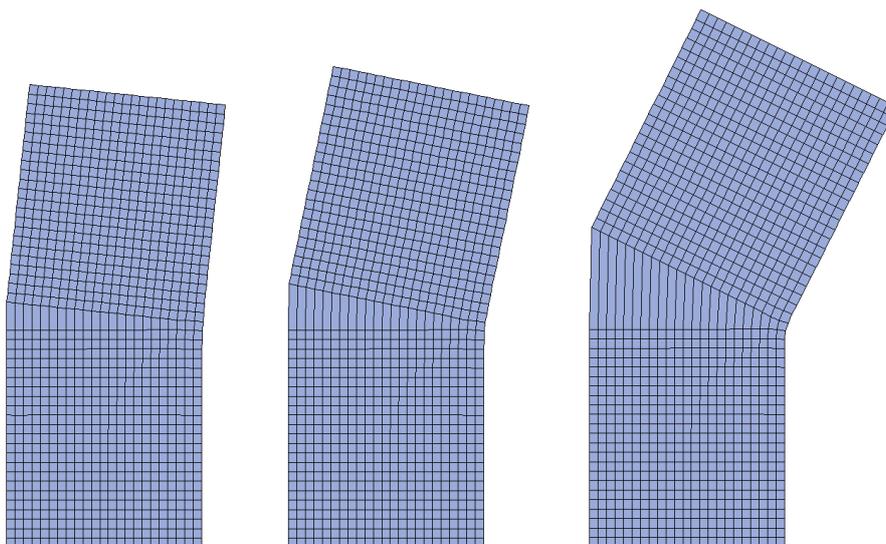
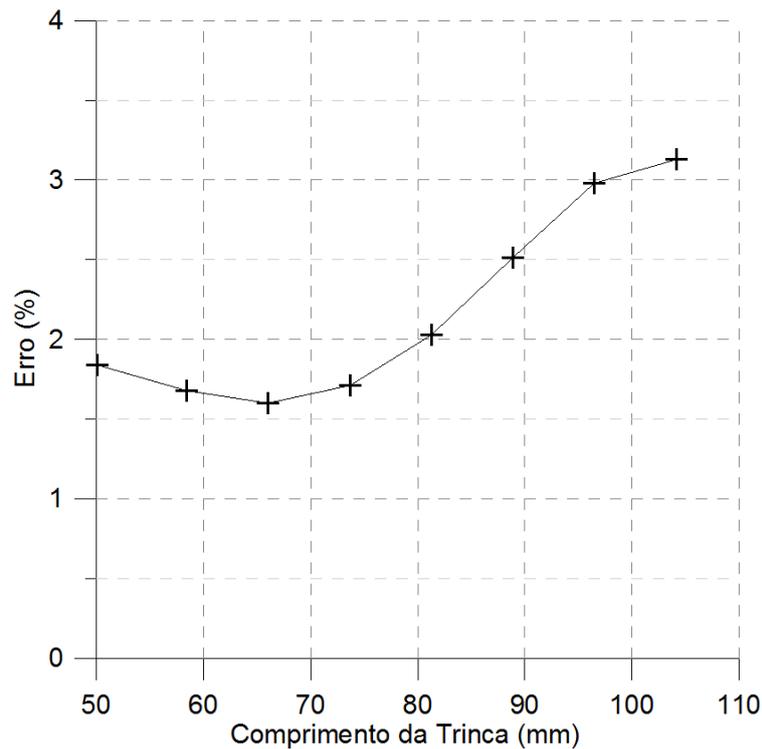


Figura 5.6 – Evolução da fratura nos passos finais.

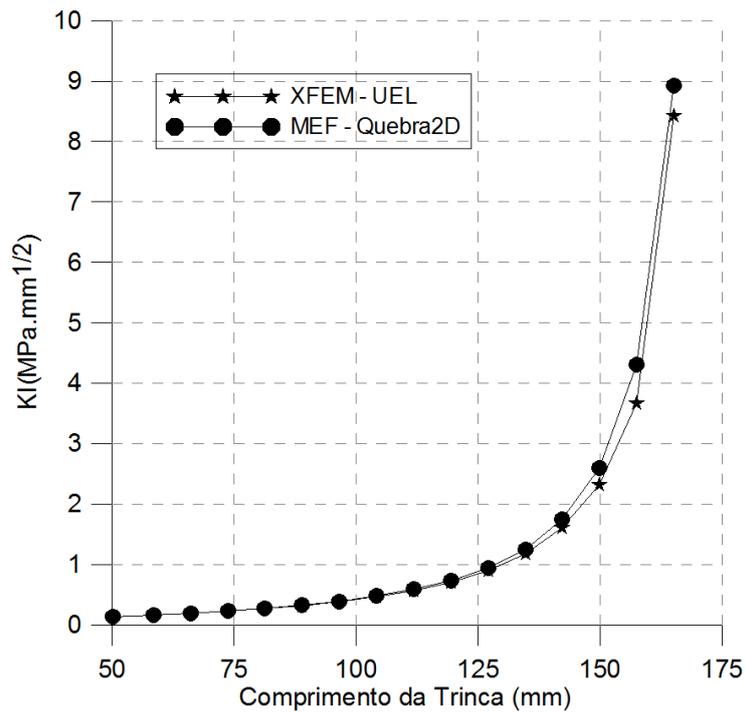
A propagação da fratura reproduziu o padrão esperado, como visto na figura anterior. Na Figura 5.7, tem-se a confirmação dos bons resultados com a ilustração de um gráfico de erro, sendo este o erro nos valores numéricos com respeito aos valores analíticos calculados através da Equação (5.1). O erro máximo com valor em módulo está abaixo dos 3,5%. O cálculo do erro, obtido através da Equação (5.3), foi realizado para casos com  $a/w < 0,6$ , limite de validade da Equação (5.1).



**Figura 5.7 – Erro no valor numérico de  $K_I$ .**

A variação do valor do  $K_I$  com o tamanho da fratura, até um comprimento de 165,1 mm (6,5 pol), pode ser vista na Figura 5.8, onde se tem também a variação de  $K_I$  com o tamanho da fratura obtida através do programa Quebra2D (Araújo, 1999; Carvalho et al., 1999), para efeito comparativo. O Quebra2D, que já foi utilizado na análise do fator de intensidade de tensão, como visto em Miranda et al. (2012), é um programa para simulação de processos de fraturas bidimensionais que adota uma estratégia de geração adaptativa de malha de elementos finitos (Miranda et al., 2002). O modelo em elementos finitos possui malha formada por elementos triangulares com subdivisão das arestas em 24x46 nós, de forma a gerar uma malha semelhante à malha estruturada formada por elementos quadrilaterais adotada na análise por XFEM. A malha em elementos

finitos requer um alto grau de refinamento em torno da trinca, como pode ser visto nas Figuras 5.9 e 5.10. O resultado das curvas mostra que o cálculo por XFEM alcança bons resultados, estando em concordância com a curva gerada pelo Quebra2D, mesmo não tendo uma malha com alto grau de refinamento (vide Figura 5.6). À medida que a fratura se aproxima da borda do modelo, o resultado obtido pelo modelo XFEM afasta-se do resultado encontrado pelo Quebra2D. Tal discrepância pode se justificar pelo fato da sub-rotina implementada não ter tratamento para o cálculo da integral de interação com domínios próximos à borda do modelo (Ahmed, 2009).



**Figura 5.8 – Variação de  $K_I$  com o comprimento da trinca.**

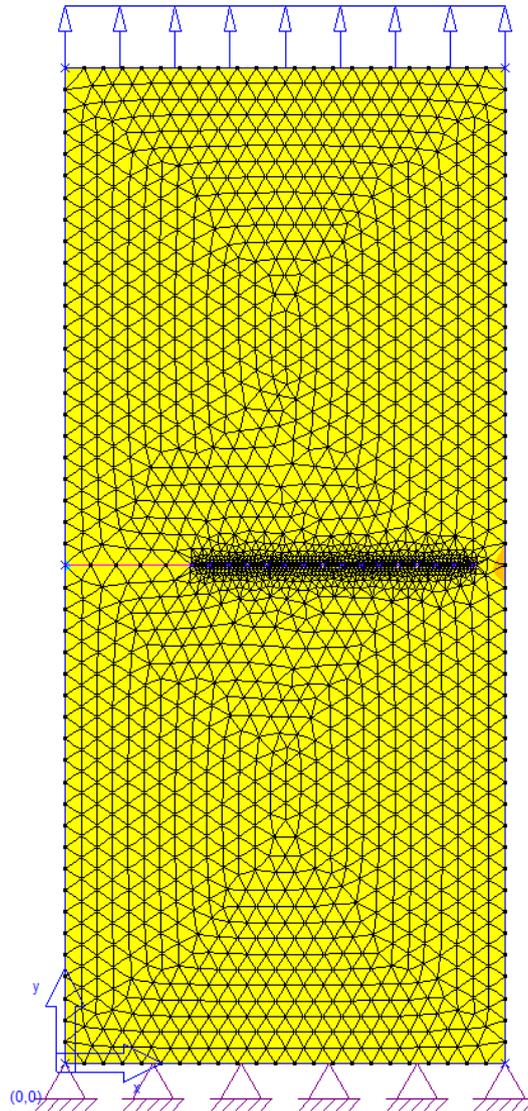


Figura 5.9 – Modelo em elementos finitos (Quebra2D).

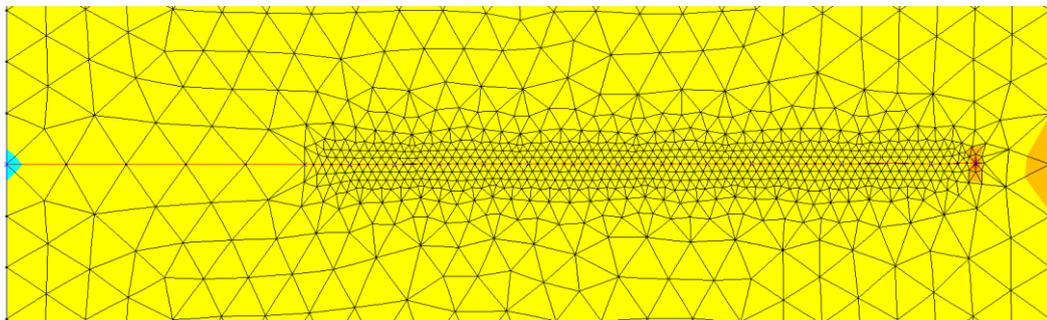


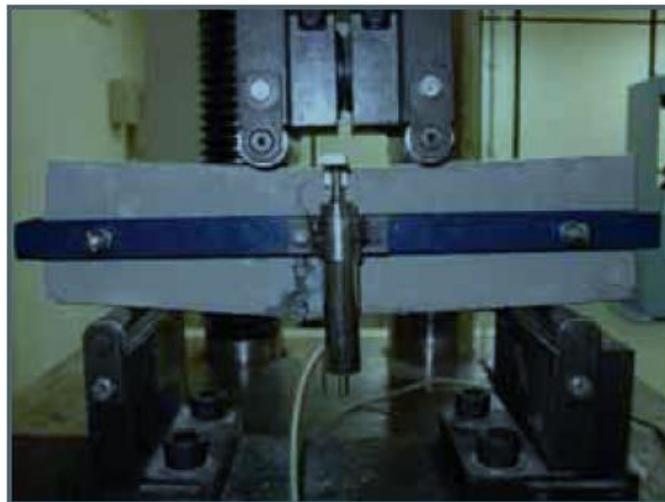
Figura 5.10 – Refinamento da malha em elementos finitos ao longo da fratura (Quebra2D).

#### 5.4.2.

### Ensaio Monotônico de Flexão de Corpo de Prova de Concreto

Neste exemplo, usou-se um ensaio monotônico de flexão de corpo de prova de concreto, para análise da propagação de fratura submetida a Modo I de carregamento. Como referência, usou-se o trabalho de Marangon (2011) sobre concretos autoadensáveis reforçados com fibras de aço. Em seu trabalho, o autor realizou ensaios de flexão em corpos de prova de concreto reforçado com fibras e em corpos de prova de concreto sem fibras, denominados de matrizes. Estes apresentam comportamento quase-frágil e serão o alvo do exemplo.

O ensaio monotônico de flexão foi aplicado a corpos de prova prismáticos com dimensões 100x100x400 mm. O esquema do ensaio segue o apresentado na Figura 5.11, onde se tem o prisma biapoiado com vão livre de 300 mm submetido a duas cargas concentradas posicionadas cada uma, em relação ao apoio mais próximo, a uma distância no valor de um terço do vão livre. O ensaio foi realizado sob controle do deslocamento do travessão da máquina de aplicação de força.



**Figura 5.11 – Aparato para ensaio de flexão (Marangon, 2011).**

Marangon avaliou duas misturas diferentes para os corpos de prova sem fibras: mistura C1, com agregado graúdo de diâmetro máximo igual a 9,5 mm, e mistura C2, com agregado graúdo de diâmetro máximo igual a 19 mm. Neste exemplo, utilizou-se os resultados dos corpos de prova com mistura do tipo C1, para comparação. As características do material seguem na Tabela 5.7, onde têm-se os valores da média e do coeficiente de variação do módulo de elasticidade aparente e o valor da tenacidade do material. Para os corpos de prova do tipo adotado, o módulo de elasticidade aparente foi medido através da reta que liga o

ponto de origem ao ponto de carga de primeira fissura no gráfico carga x deslocamento. A tenacidade foi calculada através da Equação (5.6), onde a área sob o gráfico carga x deslocamento (energia armazenada no processo de deformação) foi calculada através dos mesmos pontos utilizados no cálculo do módulo de elasticidade. A Figura 5.12 ilustra o gráfico carga x deslocamento para as matrizes C1 e C2.

$$T = \frac{A}{bh} \quad (5.6)$$

**Tabela 5.7 – Valores de módulo de elasticidade (média e coeficiente de variação) e tenacidade.**

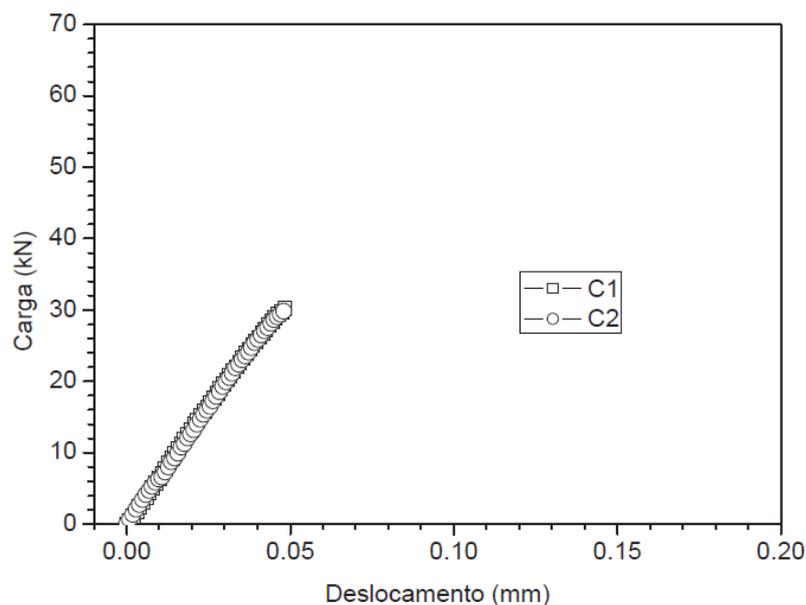
Mistura	$E$ (Mpa)	CV (%)	Tenacidade (kJ/m <sup>2</sup> )
C1	35,64	2,21	0,08

A Tabela 5.8 apresenta os valores de tensão de primeira fissura e tensão de ruptura, esta última sendo uma medida de resistência da peça à flexão, e seus respectivos coeficientes de variação. As tensões, que apresentam o mesmo valor, foram calculadas admitindo-se uma distribuição linear de tensões e deformações através da Equação (5.7), onde:  $M$  é o momento fletor na seção média do vão livre da amostra, relativo ao máximo valor de força registrado,  $b_t$  é a largura da seção transversal da amostra e  $h_t$  é a altura da seção transversal da amostra.

$$\sigma = \frac{6M}{b_t h_t^2} \quad (5.7)$$

**Tabela 5.8 – Valores (média e coeficiente de variação) das tensões de primeira fissura e de ruptura.**

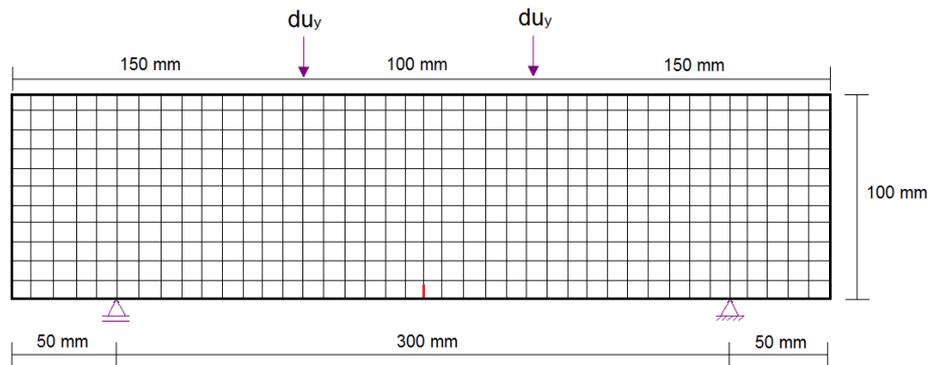
Mistura	Primeira Fissura		Pico (Ruptura)	
	$\sigma_{cr}$ (MPa)	CV (%)	$\sigma_u$ (MPa)	CV (%)
C1	9,15	3,14	9,15	3,14



**Figura 5.12 – Curvas Carga x Deslocamento dos concretos C1 e C2 (Marangon, 2011).**

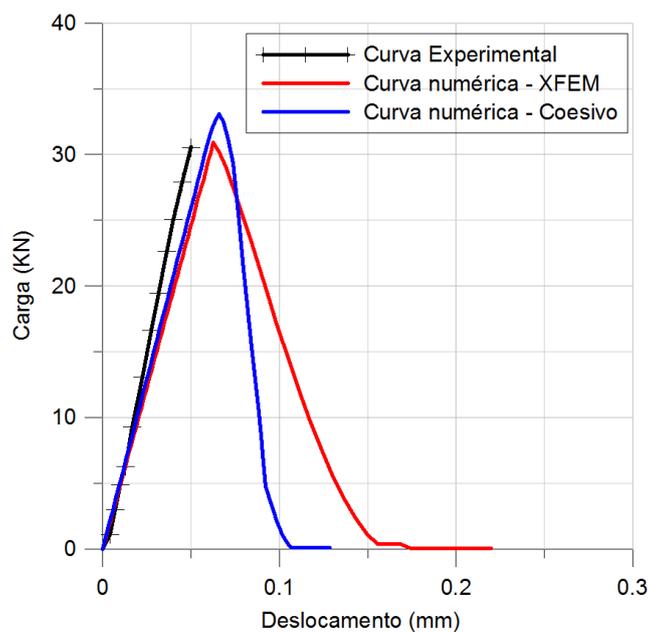
O deslocamento apresentado no gráfico da Figura 5.12 é o valor da deflexão vertical do ponto central no topo da amostra. A flecha, deflexão vertical, foi medida através de um dispositivo acoplado à peça posicionado na altura média da peça, conforme ilustrado na Figura 5.11. O valor do deslocamento máximo da viga de material tipo C1 foi de 0,05 mm.

O modelo numérico contou com uma malha de 80 x 40 elementos. As propriedades adotadas para o material foram  $E = 35,64 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,2$ . No trabalho de Marangon não consta um resultado para o coeficiente de Poisson. Desta forma, utilizou-se um valor comumente empregado para concreto. Adotou-se estado plano de tensões na análise. A implementação realizada não avalia iniciação de fratura, portanto utilizou-se uma trinca inicial com tamanho de 9 mm. Foi feito um estudo prévio que mostrou que o uso de uma pequena trinca inicial não altera consideravelmente o comportamento do problema. A análise numérica foi realizada com controle dos deslocamentos. A Figura 5.13 ilustra uma representação do modelo.



**Figura 5.13 – Modelo numérico do corpo de prova submetido a ensaio de flexão monotônica.**

O gráfico carga x deslocamento da resposta numérica está apresentado na Figura 5.14. Esta figura também contém a reprodução do gráfico experimental e a resposta de um modelo em elementos finitos com uso de elementos coesivos com resposta bilinear.

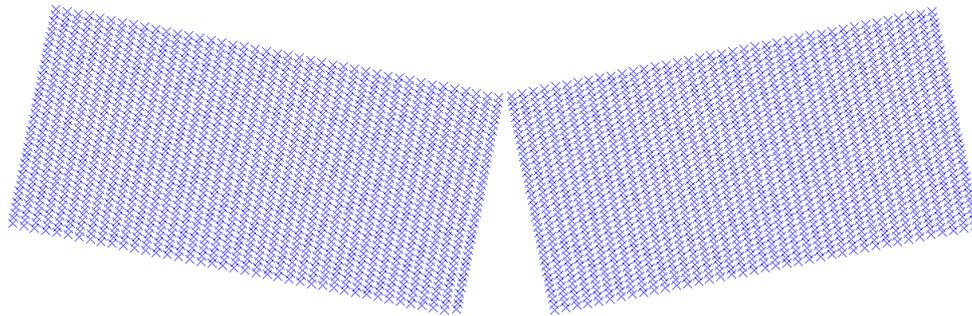


**Figura 5.14 – Gráfico Carga x Deslocamento para os modelos experimental e numéricos.**

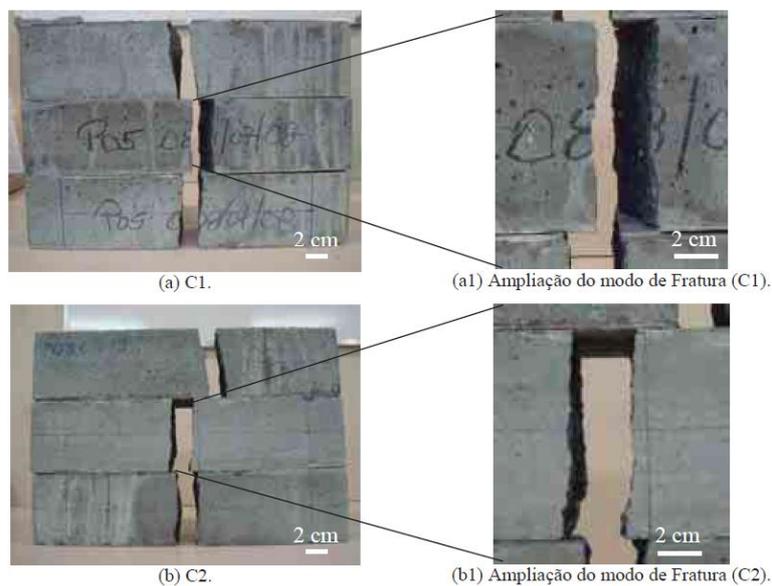
Observando-se os resultados obtidos e mesmo sabendo que o concreto é um material com comportamento não-linear, pode-se dizer que o modelo numérico com uso do XFEM, com comportamento puramente linear, representa bem esse caso. O erro no cálculo do deslocamento crítico foi em torno de 20%, enquanto que o erro no valor da carga de pico foi menor que 1%. Acrescenta-se que não há uma resposta pós-pico da curva de laboratório, assim, não é possível uma comparação completa da resposta do gráfico. Em comparação com o modelo

numérico com elementos coesivos, tem-se uma boa concordância dos comportamentos na fase de carregamento da análise. Já na fase pós-pico, os resultados são diferentes. Espera-se tal comportamento em decorrência das diferentes abordagens dos modelos, uma vez que o modelo coesivo considera dano na fase pós-pico, e o modelo em XFEM não.

A trajetória de propagação obtida com o modelo numérico (XFEM) seguiu um caminho no plano da trinca, como visto na Figura 5.15, confirmando o comportamento de fratura em Modo I obtido experimentalmente, conforme a Figura 5.16.

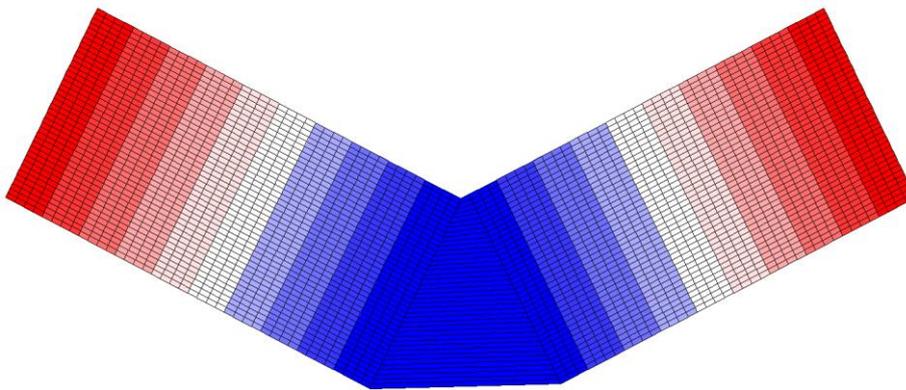


**Figura 5.15 – Modelo numérico de fratura em Modo I – Ensaio Monotônico de Flexão (visualização no ABAQUS®).**



**Figura 5.16 – Fratura em Modo I em corpos de prova submetidos à ensaio de flexão monotônica (Marangon, 2011).**

A Figura 5.15 mostra a peça antes da separação total das partes. A visualização do modelo numérico ilustrada na Figura 5.15 é obtida pela plataforma de visualização do programa ABAQUS®, onde são visualizados somente nós do modelo, para o caso de uso da sub-rotina UEL. É possível ter uma ideia da posição e abertura da fratura em uma escala aumentada. A visualização da configuração deformada dos elementos XFEM, para o exemplo em questão, pode ser vista na Figura 5.17. Este exemplo possibilita a visualização do salto nos deslocamentos em elementos do tipo XFEM para uma fratura conforme com a malha, ou seja, uma fratura que percorre os bordos dos elementos. Ressalta-se que a imagem não ilustra a deformação dos elementos.



**Figura 5.17 – Modelo numérico de fratura em Modo I – Ensaio Monotônico de Flexão.**

## **5.5.**

### **Propagação de Fratura em Modo Misto**

São apresentados três exemplos de propagação em modo misto, para os Modos I e II combinados. O primeiro exemplo trata de um caso típico da literatura e o segundo exemplo é a avaliação da trajetória de propagação de uma fratura excêntrica em uma viga em balanço. Por fim, o último exemplo é a análise numérica da propagação de fratura para um teste de *flexão em quatro pontos* em corpos de prova de concreto.

### 5.5.1.

#### Cálculo do Ângulo Crítico em Trinca Centralizada

Como um primeiro exemplo-teste da sub-rotina implementada para modo misto de fratura, avaliou-se o resultado dos cálculos dos ângulos críticos de propagação para uma trinca centralizada com diferentes inclinações iniciais no interior de uma placa “infinita”. As características do modelo seguem as do item 5.3, onde se tem uma trinca centralizada em uma placa “infinita” sujeita a um carregamento uniaxial de tração com valor de  $\sigma_0 = 6895 \text{ Pa}$  (1 psi). A visualização das geometrias do modelo e da trinca, do carregamento aplicado e das condições de contorno consideradas pode ser realizada através da Figura 5.4. Esta mesma imagem contém as propriedades do material atribuídas ao modelo. Foi utilizada uma malha de 41 x 41 nós. O ângulo crítico,  $\theta_{cr}$ , tido como o ângulo de início do crescimento da trinca para qualquer orientação inicial, é obtido analiticamente através da expressão abaixo (Erdogan & Sih, 1963):

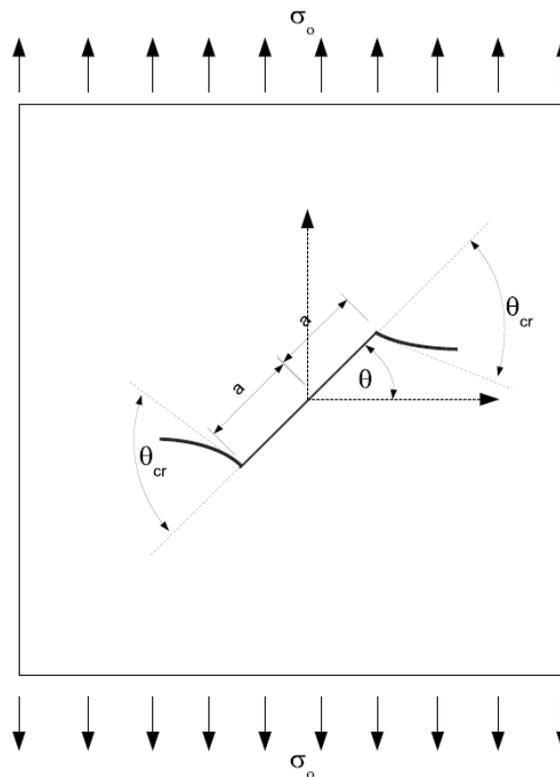
$$K_I \text{sen}(\theta_{cr}) + K_{II} (3\text{cos}(\theta_{cr}) - 1) = 0 \quad (5.8)$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são obtidos através das Equações (5.4) e (5.5). Com o uso das expressões dos fatores de intensidade de tensão, a Equação (5.8) pode ser reescrita na forma:

$$\text{sen}(\theta_{cr}) + (3\text{cos}(\theta_{cr}) - 1)\text{cot}\gamma = 0 \quad (5.9)$$

desde que  $\gamma \neq 0$ , o que é um caso trivial, no ponto de vista da mecânica da fratura,

onde  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Isto é demonstrado na Figura 5.18.



**Figura 5.18 – Ângulo crítico de trinca centrada em placa “infinita” submetida à tensão uniforme (Ahmed, 2009).**

Os resultados do cálculo numérico do ângulo de propagação, implementado na sub-rotina com o critério da máxima tensão circunferencial, foram comparados a resultados analíticos para os ângulos  $0^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $80^\circ$ . A Tabela 5.9 traz os resultados numéricos obtidos juntamente com o cálculo do erro em comparação às respostas analíticas.

**Tabela 5.9 – Resultado do cálculo do ângulo crítico de propagação.**

	$\theta$					
	$0^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$
$\theta_{cr} (^\circ)$ numérico	0	-33,37	-43,41	-53,18	-60,02	-67,11
$\theta_{cr} (^\circ)$ analítico	0	-33,28	-43,22	-53,13	-60,00	-67,20
Erro (%)	0,00	0,27	0,44	0,10	0,03	-0,13

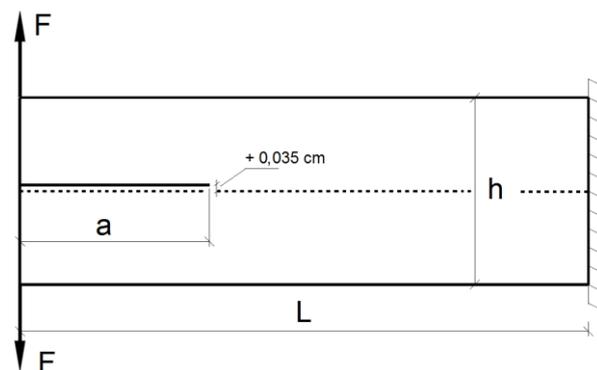
Ao se observar a Tabela 5.9, nota-se que os resultados dos ângulos críticos para um ângulo  $\theta$  em um intervalo de  $0$  a  $90^\circ$  apresentam valores negativos. Nota-

se também o bom funcionamento do método na predição de propagação de fratura sob modo misto, onde se obtiveram valores em módulo do erro no resultado numérico do ângulo de início de propagação da fratura menores que 1%.

### 5.5.2.

#### Viga em Balanço com Trinca Excêntrica

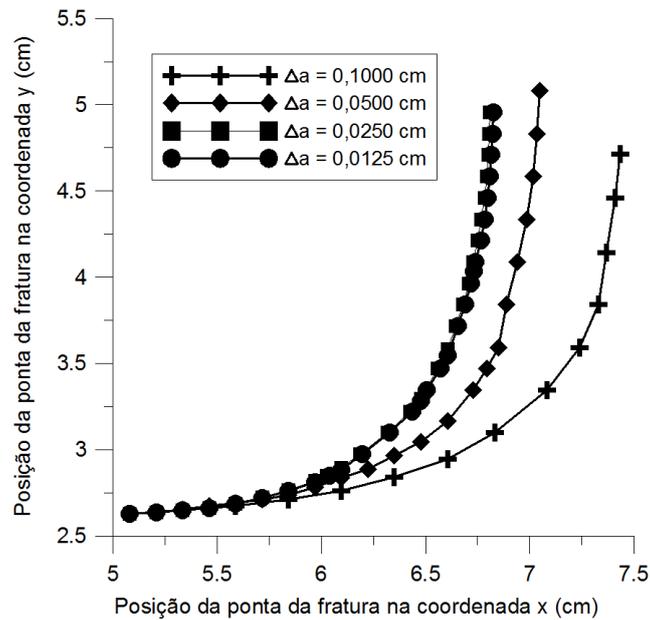
Após o exemplo anterior ter apresentado bons resultados no cálculo do ângulo crítico de propagação com o uso da formulação do XFEM adotada, este exemplo traz a avaliação da trajetória de propagação de uma trinca submetida a carregamento em modo misto. O exemplo trata de uma viga em balanço submetida a duas cargas concentradas aplicadas em sentidos opostos nas pontas do apoio livre. No caso de uma trinca estar posicionada no meio do plano vertical da estrutura, espera-se que a propagação da fratura ocorra no mesmo plano da trinca. A fim de se ter uma condição de trinca submetida a modo misto, posicionou-se a trinca com uma excentricidade de + 0,035 cm em relação ao eixo de simetria vertical. A trinca tem um comprimento  $a = 5,08$  cm (2 pol). A viga tem as seguintes dimensões:  $L = 3a$  e  $h = a$ . O material utilizado tem as propriedades  $E = 1 \times 10^4$  MPa e  $\nu = 0,333$ . A força  $F$  aplicada em cada ponta do apoio livre tem o valor de 1 N. A Figura 5.19 ilustra o esquema do modelo.



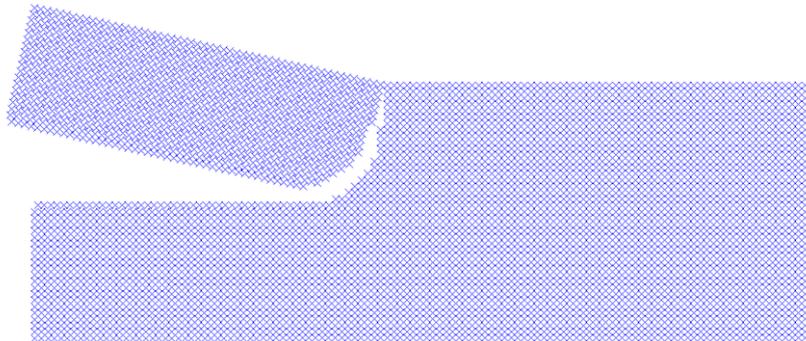
**Figura 5.19 – Viga em balanço com trinca excêntrica.**

Foram feitas análises com diferentes tamanhos de incremento de fratura. Utilizou-se os valores de  $\Delta a$  igual a: 0,1; 0,05; 0,025 e 0,0125 cm. Notou-se que a resposta da trajetória de propagação é sensível ao tamanho do incremento. A Figura 5.20 mostra o gráfico das trajetórias obtidas com os diferentes tamanhos de incremento. O referido gráfico mostra que para valores de  $\Delta a$  menores que 0,025 cm a diferença na trajetória seguida pela fratura já não é mais acentuada. As Figuras 5.21 e 5.22 ilustram a configuração deformada do modelo nas

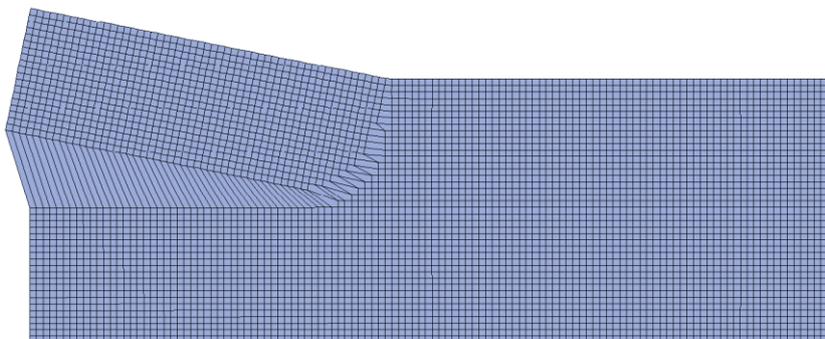
plataformas de visualização do ABAQUS® e do Sigma2D, respectivamente para um incremento  $\Delta a = 0,025$  cm.



**Figura 5.20 – Trajetórias de propagação da fratura para diferentes valores de  $\Delta a$ .**



**Figura 5.21 – Configuração deformada da viga para um  $\Delta a = 0,025$  cm (ABAQUS®).**



**Figura 5.22 – Configuração deformada da viga para um  $\Delta a = 0,025$  cm (Sigma2D).**

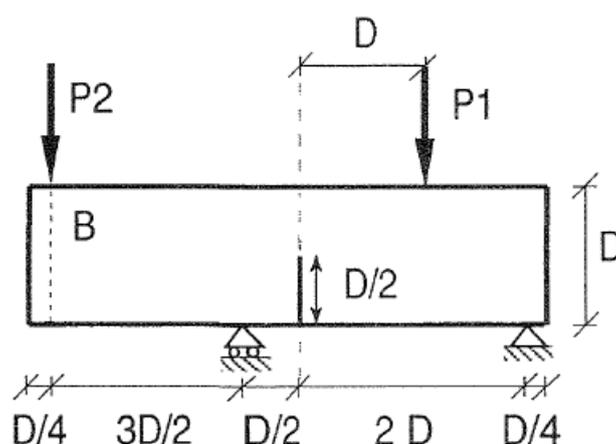
Não há resultado experimental para este problema, mas a trajetória obtida pode ser comparada a respostas obtidas em outros trabalhos para o mesmo caso ou similar (Belytschko & Black, 1999; Huang et al., 2003; Giner et al., 2009), os quais apresentam o mesmo padrão.

### 5.5.3.

#### Teste de *Flexão em Quatro Pontos* para Fratura em Modo Misto.

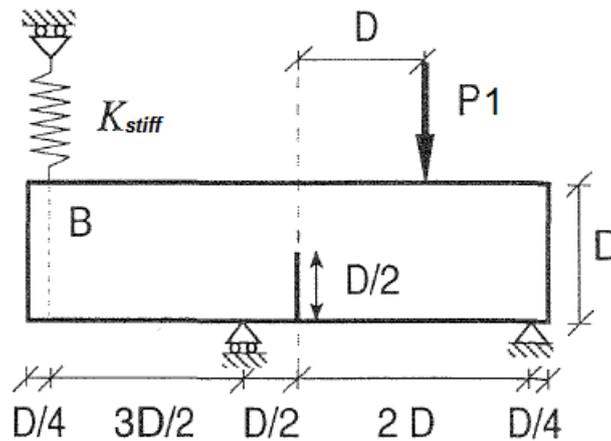
Para a análise numérica de um caso físico de propagação de fratura em modo misto, utilizou-se a publicação de Gálvez et al. (1998) como referência. Os referidos autores obtiveram resultados experimentais, assim como também apresentaram respostas numéricas para um teste de flexão em quatro pontos, tratando-se de fratura no modo misto em concreto.

O esquema do teste, ou seja, a geometria da peça, as forças aplicadas e as condições de contorno adotadas, segue a idealização apresentada na Figura 5.23.



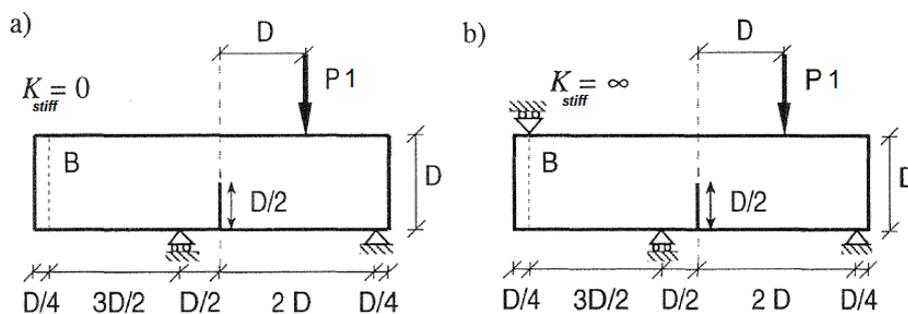
**Figura 5.23 – Modelo de teste de flexão em quatro pontos idealizado (Gálvez et al., 1998).**

As forças  $P1$  e  $P2$  são forças independentes que possibilitam um carregamento não-proporcional às amostras ensaiadas. Diferentes combinações de  $P1$  e  $P2$  possibilitam diferentes trajetórias de propagação da fratura. Os testes foram realizados considerando  $P1$  aplicada através de uma máquina de teste servocontrolada e  $P2$  aplicada através de condição de contorno de mola, conforme ilustração da Figura 5.24.



**Figura 5.24 – Modelo de teste de flexão em quatro pontos adotado (Gálvez et al., 1998).**

Os testes foram realizados para os valores extremos de rigidez da mola ( $K_{stiff}$ ): teste tipo 1 com  $K_{stiff} = 0$  e teste tipo 2 com  $K_{stiff} = \infty$ . Para os testes tipo 2, os deslocamentos verticais do ponto B foram impedidos. Os testes foram realizados com o controle do CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*), abertura horizontal máxima da fratura. Os esquemas dos testes tipo 1 e 2 seguiram conforme apresentados na Figura 5.25.



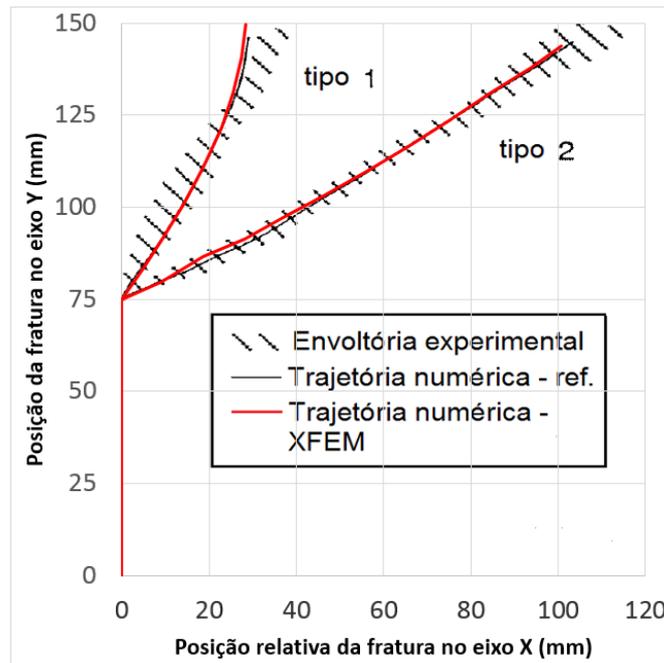
**Figura 5.25 – Geometria, forças aplicadas e condições de contorno dos modelos avaliados. (a) Modelo de teste tipo 1 ( $K_{stiff} = 0$ ). (b) Modelo de teste tipo 2 ( $K_{stiff} = \infty$ ) (Gálvez et al., 1998).**

Como respostas dos testes, foram avaliadas as trajetórias de propagação da fratura e os gráficos força x CMOD e força x deslocamento, sendo este medido no ponto de aplicação da força  $P_1$ . As trajetórias numéricas de Gálvez et al. foram obtidas com uso do código FRANC2D, um simulador de propagação de fraturas bidimensionais em elementos finitos, sob o critério da máxima tensão circunferencial, mesmo critério adotado na implementação realizada neste trabalho. Os resultados dos gráficos força x CMOD e força x deslocamento foram obtidos com uso do programa ABAQUS® através da incorporação do modelo de

fratura coesiva com uso de molas não-lineares. Os autores incorporaram o modelo de fratura coesiva no caminho de propagação já estabelecido com o uso do FRANC2D.

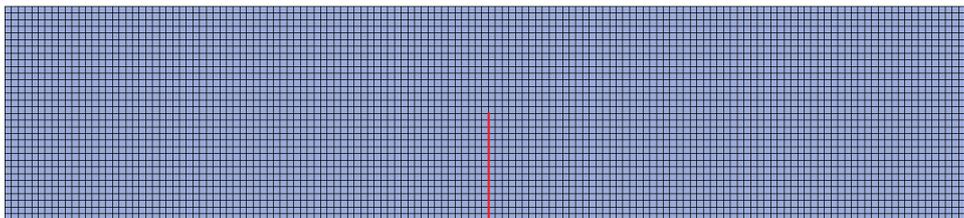
A geometria do estudo deste trabalho tem os valores:  $D = 150$  mm e espessura da peça = 50 mm. As propriedades do material utilizadas foram energia de fratura  $G_f = 69$  N/m e módulo de Young  $E = 38$  GPa . O valor da energia de fratura obtido experimentalmente por Gálvez foi determinado seguindo o procedimento estabelecido pela RILEM TC 50-FMC (RILEM TCS, 1985). O método de determinação da energia de fratura adotado pela RILEM se dá através de um ensaio de flexão em três pontos. A condição do ensaio caracteriza um caso de fratura em Modo I, portanto o valor de energia de fratura fornecido é referente somente ao modo de abertura. Ou seja,  $G_f$  é equivalente à  $G_{Ic}$ . Gálvez não apresentou valor para o coeficiente de Poisson. Para o modelo numérico XFEM, considerou-se  $\nu = 0,2$ . O modelo XFEM foi analisado através do controle dos deslocamentos.

As trajetórias obtidas com uso da implementação do XFEM apresentaram excelentes resultados. As mesmas encontram-se dentro da envoltória experimental, conforme ilustra a Figura 5.26. Acrescenta-se que as respostas obtidas com os modelos XFEM apresentam comportamentos muito similares às respostas numéricas obtidas com o FRANC2D, conforme Figura 5.26. Desta maneira, como já exposto por Gálvez et al., conclui-se que a previsão da trajetória da fratura a partir das hipóteses da MFLE é uma boa aproximação para esses tipos de ensaio em estruturas de concreto, mesmo sabendo-se que o fraturamento é um processo não-linear.



**Figura 5.26 – Trajetórias de propagação da fratura para os modelos numéricos e experimental.**

A Figura 5.27 mostra a malha dos modelos numéricos das análises tipo 1 e tipo 2 em suas configurações indeformadas. A linha vermelha representa a posição inicial da fratura. As Figuras 5.28 e 5.29 mostram o modelo do tipo 1 em sua configuração deformada nas visualizações através do ABAQUS® e do Sigma2D, respectivamente. Já as Figuras 5.30 e 5.31 mostram o modelo do tipo 2 em sua configuração deformada nas mesmas plataformas de visualização.



**Figura 5.27 – Malha do modelo numérico para as análises tipos 1 e 2.**

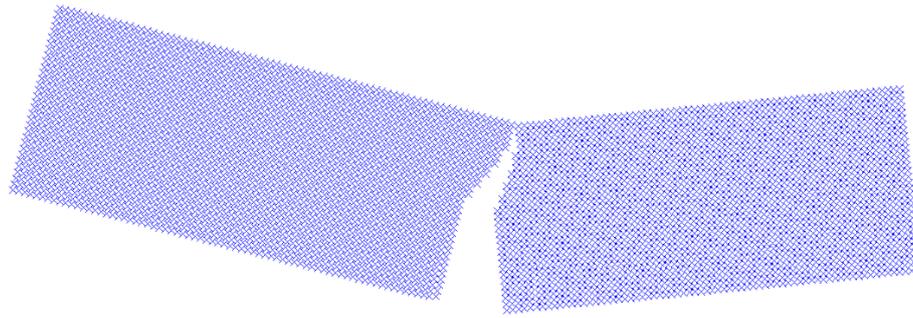


Figura 5.28 – Configuração deformada do modelo tipo 1 (ABAQUS®).

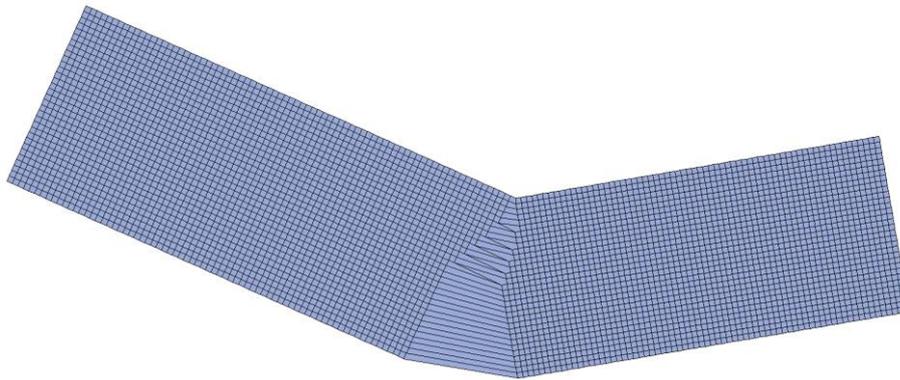


Figura 5.29 – Configuração deformada do modelo tipo 1 (Sigma2D).

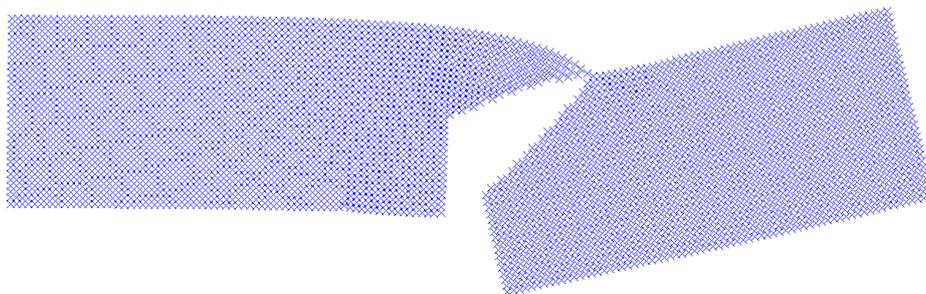


Figura 5.30 – Configuração deformada do modelo tipo 2 (ABAQUS®).

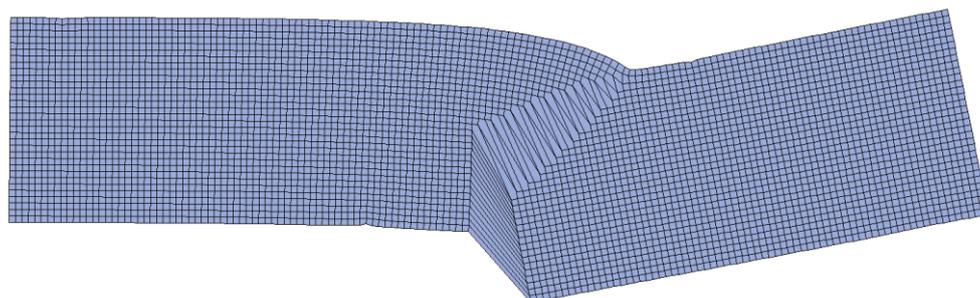
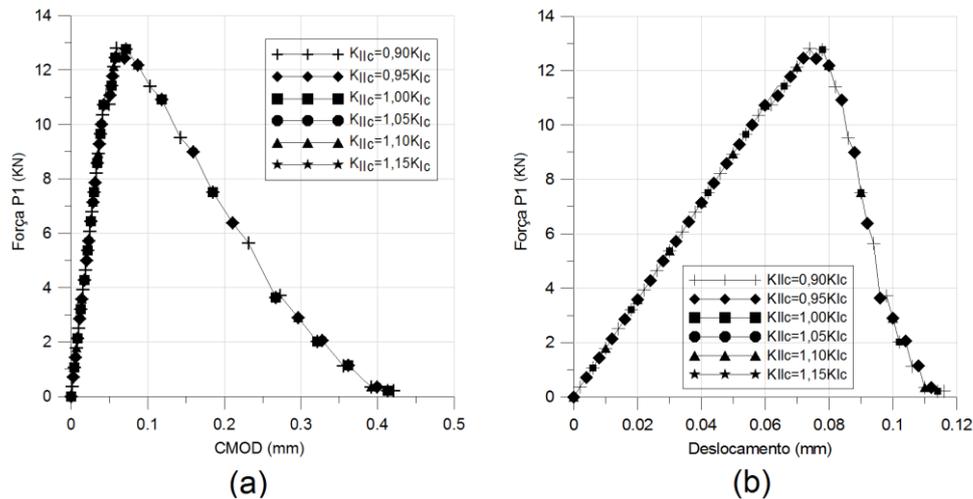
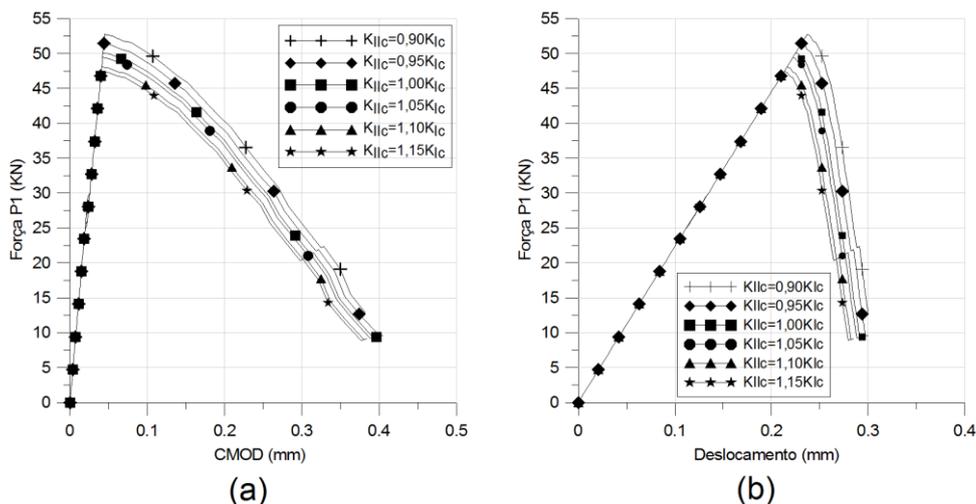


Figura 5.31 – Configuração deformada do modelo tipo 2 (Sigma2D).

O critério de fratura adotado neste trabalho tem como base os fatores de intensidade de tensão. Alguns modelos de critério de fratura com base nos fatores de intensidade de tensão para problemas de fratura em modo misto foram apresentados anteriormente, os quais dependem das propriedades do material  $K_{Ic}$  e  $K_{IIc}$ . Estas propriedades podem ser obtidas através de suas relações com as respectivas taxas críticas de liberação de energia para os Modos I e II de fratura. Como já mencionado antes, o valor da energia de fratura  $G_f$  apresentado por Gálvez é equivalente à  $G_{Ic}$ . A determinação da energia de fratura em casos de fraturas em Modo II é alvo de grande discussão entre os pesquisadores. Mier (1997) aborda diferentes aproximações para fraturas de cisalhamento em concreto. Em seu trabalho, Mier (1997) indaga a existência de fratura em Modo II, uma vez que há experimentos de fraturas sob essa condição, onde a trinca tende a se desenvolver e se propagar em Modo I. Em se tratando de modo misto, a RILEM através do seu comitê 89-FMT desenvolveu um teste de cisalhamento em quatro pontos para medir a energia de fratura mista em concreto. Na viga submetida ao teste, a fratura terá uma trajetória com base em um modo misto (combinação dos Modos I e II) de carregamento, porém, posteriormente ao estabelecimento do teste, percebeu-se que há ocorrência apenas de abertura perpendicular à trinca (Mier, 1997). Ou seja, a fratura segue uma trajetória curva, porém se propagando em Modo I. Sem um valor de  $G_{IIc}$  fornecido por Gálvez, para se poder estimar o valor de  $K_{IIc}$ , fez-se primeiramente um estudo comparativo, adotando-se o valor de  $K_{IIc}$  na faixa de  $0,9$  a  $1,15K_{Ic}$ , a fim de se verificar a sensibilidade do processo de fratura ao valor crítico do fator de intensidade de tensão em Modo II. As Figuras 5.32 e 5.33 trazem os gráficos comparativos para os testes tipo 1 e tipo 2, respectivamente. Usou-se o modelo linear [Equação (2.15)] como critério de fratura. Os gráficos comparativos foram os das curvas carga x CMOD e carga x deslocamento medido no ponto de aplicação da força P1.



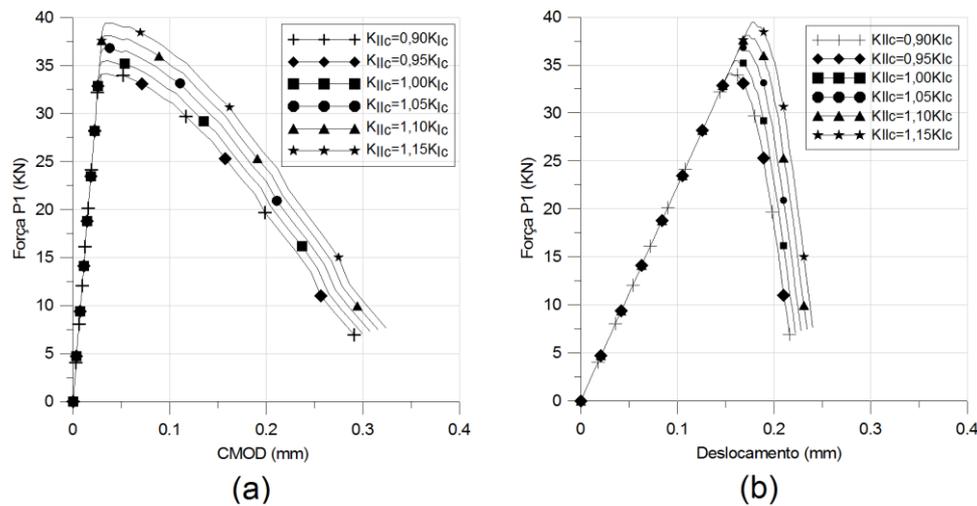
**Figura 5.32 – Estudo comparativo de diferentes valores de  $K_{Ic}$  para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Modelo Linear - Teste tipo 1.**



**Figura 5.33 – Estudo comparativo de diferentes valores de  $K_{Ic}$  para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Modelo Linear - Teste tipo 2.**

Ao se observar os gráficos acima, constata-se que os resultados obtidos com diferentes valores de  $K_{Ic}$  para o teste tipo 1 são praticamente os mesmos para ambas as curvas. Isso ocorre devido aos valores do fator de intensidade de tensão  $K_I$  na ponta da trinca, serem maiores que os valores de  $K_{II}$  e terem uma diferença em relação a estes na ordem de três vezes mais na fase de carregamento, antes que se inicie o processo de fraturamento. Após o início da propagação, essa diferença tende a crescer em ordens muito superiores a três

vezes. Tal ocorrência tira o peso de  $K_{II}$  na expressão do critério de fratura, o que leva a valores de carga crítica muito próximos dentro do intervalo de variação do valor de  $K_{Ic}$ . O mesmo comportamento não ocorre nos gráficos dos resultados do teste tipo 2, onde se nota uma diferença nos valores de pico dos modelos. No teste tipo 2, o fator de intensidade de tensão  $K_{II}$  tem sua contribuição mais acentuada na expressão do critério de fratura. Na fase de carregamento, antes do início do processo de fraturamento, há uma inversão de quem tenha os maiores valores de fatores de intensidade de tensão, tendo  $K_{II}$  maiores valores que  $K_I$ . Isso levou o modelo com  $K_{Ic} = 0,90K_{Ic}$  a iniciar o processo de fraturamento primeiro. Após ter sido iniciado o processo de fraturamento nos diversos modelos, o valor de  $K_{II}$  passou a apresentar valores negativos, o que se repete em determinados momentos da análise. A combinação de  $K_I$  e  $K_{II}$ , após o início do processo de fraturamento, faz com que as estruturas que requerem deslocamentos maiores para o início da propagação da fratura, percam sua integridade primeiro, dando início à fase pós-pico das curvas. É importante ressaltar que estes comportamentos, tanto do teste tipo 1, quanto do teste tipo 2, são relacionados ao modelo linear de critério de fratura. Outros modelos podem gerar outras respostas, fato que também torna necessária uma escolha mais adequada para o modelo de critério de fratura a ser utilizado. A exemplo disso têm-se os gráficos carga x CMOD e carga x deslocamento para diferentes valores de  $K_{Ic}$  com uso do modelo elíptico como critério de fratura para o teste tipo 2. Tais respostas estão ilustradas na Figura 5.34. Ao se observar esta figura, nota-se que a maior carga crítica obtida com o modelo elíptico tem valor abaixo da menor carga crítica obtida com o modelo linear. Outra observação que pode ser feita é a inversão na ordem dos modelos que têm a menor carga crítica. Com uso do critério elíptico, os modelos que têm a relação  $K_{Ic} = 0,90K_{Ic}$  e  $K_{Ic} = 0,95K_{Ic}$  são os que possuem menor valor de carga crítica. Gálvez et al. (2002) fizeram um estudo em torno da influência dos parâmetros de cisalhamento, em especial a energia de fratura correspondente ao Modo II de fratura,  $G_f^{II}$ , no comportamento de estruturas de concreto na presença de fraturas sob estado misto de carregamento. Os autores utilizaram uma aproximação com base em energia através do uso de modelos coesivos, os quais atestaram que os parâmetros de cisalhamento pouco influenciam nas respostas de problemas de estruturas de concreto sob estado misto de carregamento.



**Figura 5.34 – Estudo comparativo de diferentes valores de  $K_{IIC}$  para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Modelo Elíptico - Teste tipo 2.**

Sabendo-se da necessidade da escolha de um modelo adequado de critério de fratura para análise da propagação de fraturas, um segundo estudo comparativo foi realizado. Comparam-se as respostas dos problemas para os diferentes critérios de fratura apresentados no Capítulo 2. Foram analisados os dois tipos de testes com diferentes critérios de fratura adotados. As análises foram realizadas adotando-se: os modelos simplificados linear e elíptico, o modelo da envoltória de fratura, o modelo que assume a hipótese de  $K_{Ic} = K_{IIC}$ , e um último modelo considerando que a fratura, mesmo estando em modo misto, ocorra somente quando  $K_I = K_{Ic}$ . O valor de  $K_{IIC}$  utilizado nas análises foi obtido com uso da expressão de Di Leonardo (1979) [Equação (2.18)], sendo este igual a  $1,07K_{Ic}$ . As Figuras 5.35 e 5.36 trazem as diferentes curvas relacionadas aos diferentes critérios de propagação para os gráficos dos dois tipos de teste.

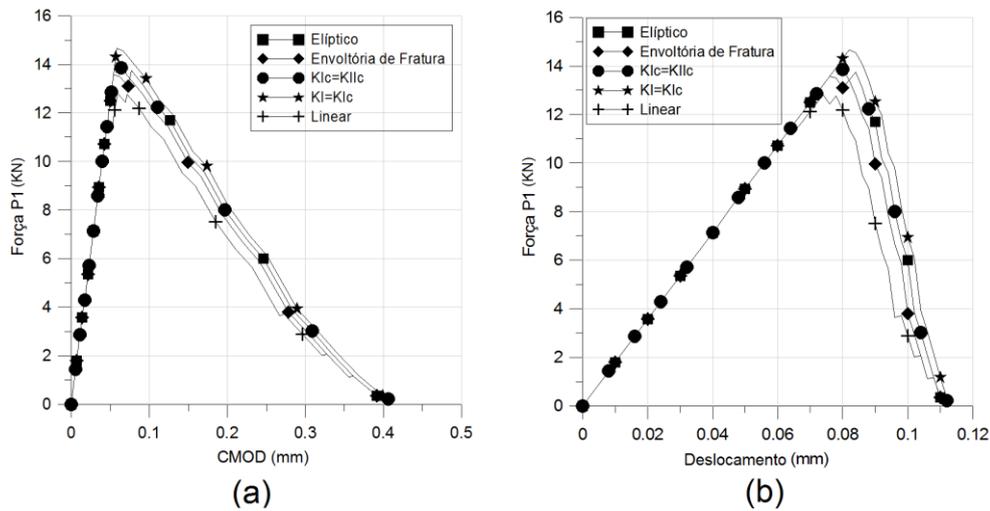


Figura 5.35 – Estudo comparativo dos critérios de fratura para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Teste tipo 1.

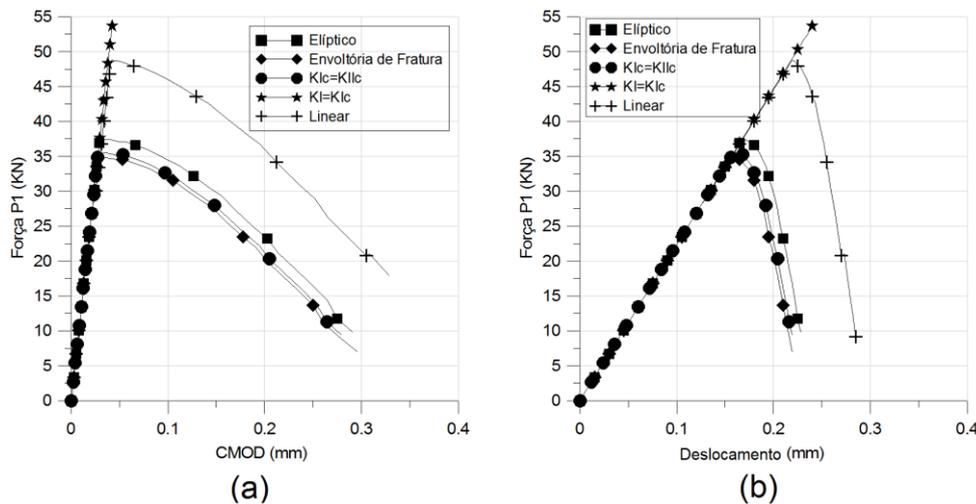
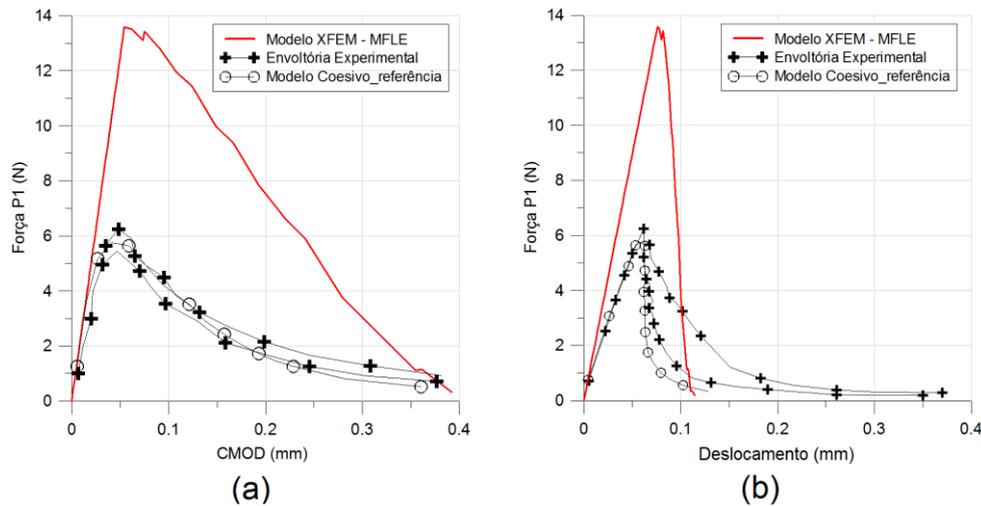


Figura 5.36 – Estudo comparativo dos critérios de fratura para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Teste tipo 2

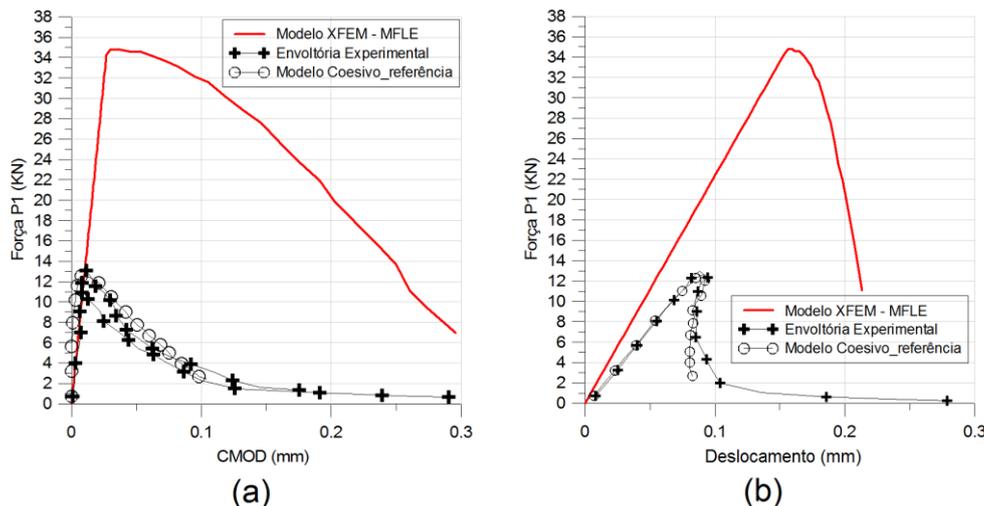
Ao se analisar os gráficos do teste tipo 1 do estudo comparativo dos critérios de fratura, observa-se que mudando o critério adotado pode-se chegar a uma diferença de até 16% no valor da carga crítica. O comportamento das respostas para ambas as curvas analisadas é o mesmo, tendo o modelo com critério linear o menor valor de carga crítica e o modelo que tem a ocorrência da propagação da fratura, quando  $K_I = K_{Ic}$ , com o maior valor. A única diferença que pode ser evidenciada é uma maior aproximação das respostas na fase pós-pico no gráfico de curva carga x CMOD. Ao se analisarem os gráficos do teste tipo 2, esse com a presença de uma condição de apoio a mais na viga, observa-se que as curvas tiveram comportamentos diferentes daqueles apresentados no teste tipo 1. Os

modelos com expressões quadráticas apresentaram menores cargas de pico. Os modelos de envoltória de fratura e o aquele que adota  $K_{Ic} = K_{IIc}$  apresentam cargas de pico bem próximas. O modelo linear de critério de fratura e o modelo que adota o critério de fratura em Modo I apresentam valores bem maiores. Isso se justifica pelo fato já apontado, do valor de  $K_{II}$  ser negativo após a primeira propagação. Desta forma este fator caminha de forma a não contribuir com a continuidade da propagação e leva à necessidade de elevados valores de  $K_I$  para que a fratura volte a se propagar. Desta forma, constata-se que nem todos os modelos podem apresentar uma correta aproximação do resultado do problema, uma vez que eles podem apresentar grandes diferenças no valor da carga de pico. No gráfico, devido a seu elevado valor, não é mostrada a carga de pico do modelo de critério de fratura em Modo I, conseqüentemente também não se vê a curva completa.

Após estas análises comparativas iniciais, são apresentados os resultados obtidos com a formulação utilizada neste trabalho em comparação aos resultados das curvas carga x CMOD e carga x deslocamento obtidos experimentalmente e numericamente por Gálvez et al (1998). O critério de fratura adotado para esta comparação foi o da envoltória de fratura desenvolvido por Di Leonardo. Essa escolha justifica-se por ser uma expressão com um embasamento teórico. O critério da envoltória de fratura não faz uso de uma hipótese simplificadora, além dos outros modelos serem aproximações sem comprovações teóricas. A análise foi feita através do método de controle de deslocamentos. As respostas dos gráficos força x CMOD e força x deslocamento para os testes tipos 1 e 2 encontram-se nas figuras 5.37 e 5.38, respectivamente.



**Figura 5.37 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento do modelo XFEM em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 1.**



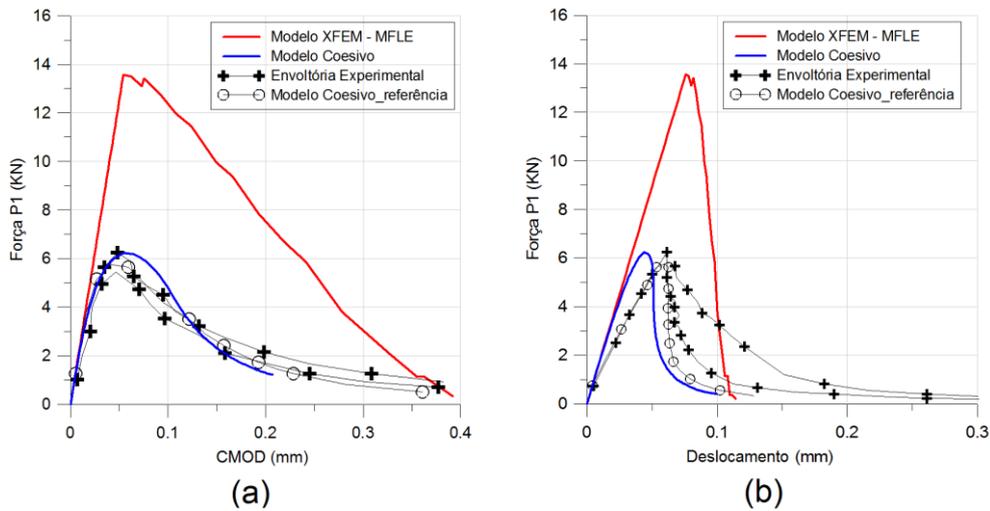
**Figura 5.38 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento do modelo XFEM em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 2.**

Ao se analisar os resultados obtidos, constata-se que uma formulação linear elástica não se adequa bem ao caso. Os valores das forças críticas obtidos com a formulação do XFEM, seguindo a MFLE, são muito maiores que os obtidos experimentalmente e numericamente com uso do modelo de zona coesiva por Gálvez et al (1998), tanto no teste tipo 1, quanto no teste tipo 2. Nas zonas pré-pico, observa-se a diferença das tangentes das curvas logo no início da análise, nas curvas carga x deslocamento de ambos os tipos de teste. A forma da curva na região pós-pico também apresenta diferença, onde o modelo linear elástico não consegue representar corretamente a curva de amolecimento do concreto. Os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos com o modelo XFEM foram comparados com valores

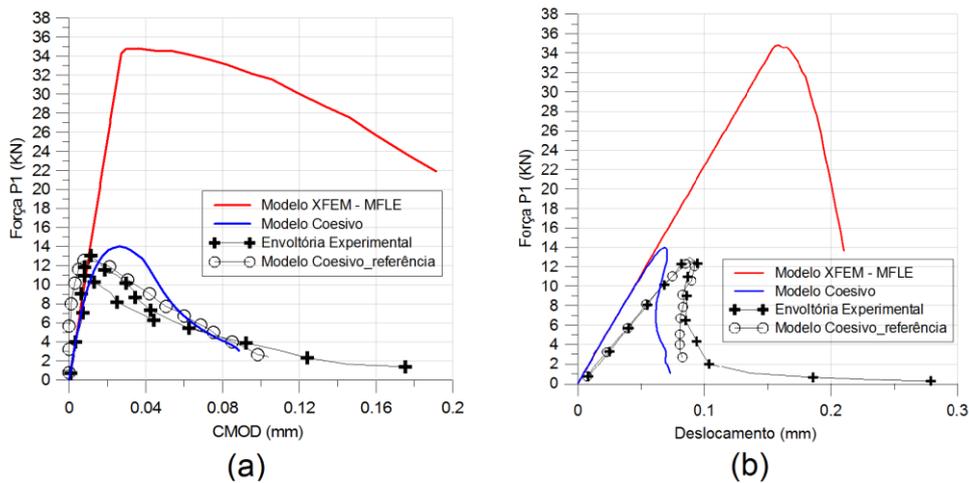
obtidos através do Quebra2D, chegando a valores de erro menores que 2%. O referido programa apontou valores de carga crítica bem próximos aos encontrados com a sub-rotina implementada. Mier (1997) aborda a dificuldade em se representar a propagação de fratura em concreto, uma vez que uma única fratura não se propaga no concreto, mas, sim, ela vai sendo acompanhada de microfissuramentos, e do surgimento de ramificações e de pontes entre micro fraturas. O mesmo autor relata que para a aplicação da MFLE a estruturas de concreto é necessária uma descrição da estrutura do material e de eventos de microfissuramentos devem ser considerados no modelo.

Tendo em vista a baixa representatividade da formulação linear elástica adotada para o problema em questão, optou-se, assim como os autores do trabalho de referência, por se fazer as análises com uso de elementos coesivos, a fim de se entender e melhor representar o comportamento do problema. O primeiro modelo coesivo específico para análises de fratura em concreto foi desenvolvido por Hillerborg et al. (1976). O Modelo de Fratura Fictícia (*Fictitious Crack Model*) apresentado por Hillerborg e coautores segue as ideias de Dugdale e Barenblatt e foi desenvolvido para descrever o crescimento de trincas em concreto, fazendo uso do conceito de energia de fratura. O Modelo de Fratura Fictícia tem como base o diagrama tensão-deformação dividido em duas partes, cujo limite entre elas é a resistência à tração do material, sendo essa o valor de pico. No regime pré-pico, o modelo assume uma lei linear, enquanto que, na zona pós-pico, o comportamento assumido tem a relação tensão-abertura da fratura, sendo essa uma lei de amolecimento. Os principais parâmetros do modelo são:  $f_t$  (resistência à tração),  $E_t$  (módulo de Young em tração),  $G_f$  (energia de fratura) e a forma da curva de amolecimento. O modelo de Hillerborg et al. foi desenvolvido para fraturas em Modo I. Posteriormente, outros autores o estenderam para casos de fratura em modo misto.

A análise com base no modelo de zona coesiva foi realizada com uso de elementos de interface pertencentes ao pacote padrão de elementos do ABAQUS®. Foi utilizada uma lei coesiva bilinear e a análise foi feita com uso do controle de arco. Os elementos de interface foram postos nos caminhos prescritos com uso da sub-rotina em XFEM que segue os princípios da MFLE. Os novos gráficos contendo as respostas da análise com elementos coesivos estão expostos nas Figuras 5.39 e 5.40.



**Figura 5.39 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento dos Modelos XFEM e coesivo em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 1.**



**Figura 5.40 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento dos Modelos XFEM e coesivo em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 2.**

Os modelos coesivos, como visto nas figuras 5.39 e 5.40, trouxeram uma melhor representatividade para os dois tipos de teste. Nota-se que o modelo chegou a valores bem próximos de carga crítica em comparação com os resultados de referência. Contudo, em ambos os testes e ambas as curvas, os modelos coesivos possuem, na fase pré-pico, as tangentes iniciais das curvas idênticas às evidenciadas nos modelos em XFEM, até que próximo ao valor da carga crítica de referência, os modelos coesivos perdem rigidez, enquanto os modelos lineares elásticos em XFEM seguem com a mesma inclinação da reta até

atingir suas cargas críticas em valores muito superiores. Nas curvas carga x deslocamento, essas tangentes iniciais diferem-se das tangentes iniciais das curvas de referência, como já observado nas respostas do modelo XFEM-MFLE nas Figuras 5.37 e 5.38. Nas fases pós-pico das curvas, o modelo coesivo consegue descrever melhor o amolecimento característico do concreto, ainda que ajustes na fase de amolecimento da lei coesiva ou uso de outras leis constitutivas possam ser mais promissores. O autor desta dissertação levanta a possibilidade dos resultados da referência não corresponderem à interpretação dada, não havendo conclusão sobre as discrepâncias constatadas, quanto as tangentes iniciais das curvas carga x deslocamento.