

## 4

### Implementação do Método

Hoje, no mundo prático, somado sempre a descoberta de novos conhecimentos, busca-se o desenvolvimento de programas que analisem problemas reais. O programa comercial ABAQUS<sup>®</sup> é um conhecido e bem difundido programa de análise de estruturas que carrega em seu pacote a possibilidade de análise de fraturas com uso do XFEM. Contudo, o programa apresenta limitações em seu pacote de análise com XFEM, como a não consideração do enriquecimento de ponta na formulação do método e a não possibilidade do uso do critério de propagação com base nos fatores de intensidade de tensão. Entretanto, como um grande atrativo, ele concede a inserção de sub-rotinas de análise em seu processamento.

Neste trabalho, o método XFEM, descrito no Capítulo 3, foi implementado computacionalmente para análises bidimensionais com uso do programa comercial ABAQUS<sup>®</sup> através da sub-rotina UEL. Esta é a responsável pela inserção de um elemento definido pelo usuário no programa, possibilitando que elementos com características diferentes às dos elementos já contidos no programa possam ser usados nas análises. A implementação do XFEM em uma sub-rotina UEL já foi alvo de outros trabalhos (Giner et al., 2009; Chen, 2013).

A sub-rotina implementada neste trabalho permite que se façam análises 2D de propagação de fratura com base nas leis da Mecânica da Fratura Linear Elástica. As principais características da implementação são o uso dos enriquecimentos de ponta no campo de deslocamentos e o uso do critério de propagação com base nos fatores de intensidade de tensão. O elemento XFEM existente no pacote do ABAQUS<sup>®</sup> não faz uso dos enriquecimentos de ponta e apresenta uma aproximação de energia como critério de propagação. Uma outra característica da implementação é que através de um processo incremental a propagação se desenvolve automaticamente com o avanço progressivo da ponta da fratura e reavaliação da direção de propagação em cada incremento. Este aspecto difere de outras implementações, como a de Giner et al (2009).

Na sequência do capítulo, são apresentados aspectos da implementação e considerações específicas do elemento XFEM desenvolvido neste trabalho.

## 4.1.

### Pré-processamento

No âmbito do programa ABAQUS®, é necessário um arquivo de entrada, arquivo *input*, contendo todas as informações do modelo, tais como: coordenadas nodais, topologia dos elementos, condições de contorno e carregamentos aplicados, para o processamento da análise.

Para a avaliação de descontinuidades com uso do XFEM, uma informação essencial à implementação do método é a de quais nós serão enriquecidos. No caso do elemento XFEM definido pelo usuário através da sub-rotina UEL, é necessário que a informação da condição de enriquecimento da trinca inicial seja repassada como dado de entrada para o modelo. Devido a restrições de caráter computacional geradas em função do uso de sub-rotina no ABAQUS®, algumas informações são repassadas em arquivos externos.

Como pré-processamento, foi criado um código em linguagem Fortran (linguagem também utilizada na sub-rotina UEL) para gerar o arquivo *input* com as informações do modelo em questão e gerar também os arquivos com as informações necessárias para o processamento do elemento XFEM da sub-rotina. Tal passo não se faz menos importante que o processamento em si, haja vista o trabalho de implementação que ele carrega. A Figura 4.1 é uma representação dos dados de entrada para o código gerador de arquivos auxiliares do elemento XFEM.

```
# XFEM subroutine auxiliary file generator #
-----
#Width, Height and Thickness of the mesh
5.0 5.0 1.0
#Subdivisions in the width and in the height of the mesh
5 5
#Material name
Placa
#Material properties (E nu KIC)
100000.0 0.30 31.0
#Plane Stress condition=> 1; Plane Strain condition=> 2:
2
#Number of cracks and max number of crack paths
1 2
#Initial crack coordinates (xc1 yc1 / xc2 yc2)
0.5 4.5
2.0 5.0
#Number of Abaqus element line (even number)
0
```

Figura 4.1 – Dados de entrada – código gerador de arquivos

Como dados de entrada, são fornecidas as características da malha, as propriedades do material, a posição inicial arbitrária da trinca e outras informações complementares. Na implementação feita, o modelo gerado tem algumas limitações, tais como sua aplicação somente a problemas com geometria retangular perfeita, ou seja, um modelo com domínio sem furos, inclusões, entalhes e/ou cortes, e o fato da trinca inicial ter que ser um único segmento de reta. Caso seja de interesse o uso de outras geometrias e/ou diferentes configurações de trinca inicial, há a possibilidade de ajustes manuais nos arquivos, a fim de atender essas condições. Não há tratamento para múltiplas trincas.

As informações do XFEM, nós enriquecidos e sinal da função *Heaviside*, tanto na posição inicial, quanto na propagação da fratura, são obtidas através de relações da geometria computacional, entre os segmentos de reta da fratura e os elementos do modelo. Uma forma alternativa para descrever a geometria da fratura no modelo XFEM é através do uso do método *Level Set* (Stolarska et al., 2001), método que é uma técnica numérica de análise e cálculo de movimento de interfaces. Este método é usado pelo programa ABAQUS® em suas análises com XFEM.

## 4.2.

### Incorporação do XFEM através da sub-rotina UEL

Neste item, são apresentadas importantes características presentes na implementação do XFEM realizada neste trabalho. Tais considerações estão inseridas no código da sub-rotina UEL.

#### 4.2.1.

##### Formulação *shifted-basis*

A aproximação padrão dos elementos finitos obedece a propriedade de Kronecker, que estabelece que os valores dos graus de liberdade  $u_i$  são diretamente os valores dos deslocamentos do nó  $i$ . A aproximação padrão do XFEM, onde o campo de deslocamentos é composto pelos graus de liberdade tradicionais do MEF mais a contribuição dos enriquecimentos, não mantém esta propriedade. A fim de que na visualização dos resultados dos deslocamentos nodais, sejam apresentados os valores reais da solução dos deslocamentos, faz-se uso da formulação de enriquecimento *shifted-basis* (Zi & Belytschko, 2003;

Stapór, 2011). Na Equação (4.1), é apresentada a formulação modificada, onde  $x_i$  é a coordenada nodal do nó enriquecido.

$$u(x) = \sum_{i \in J_n} u_i N_i(x) + \sum_{i \in J_n^*} b_i N_i(x) [H(x) - H(x_i)] + \sum_{i \in K_n} N_i(x) \left( \sum_{l=1}^4 c_l^i [F_l(x) - F_l(x_i)] \right) \quad (4.1)$$

Esta modificação retira a contribuição dos enriquecimentos presente no nó enriquecido, mas a mantém nos pontos de integração.

#### 4.2.2.

#### Integração Numérica

Em um modelo que utiliza o MEF, o cálculo da matriz de rigidez é feito através de integração numérica sobre o elemento. Em um modelo com XFEM, os elementos que contêm a fratura necessitam de um rearranjo na quadratura de integração, para uma melhor resposta da integração das funções que representam as descontinuidades. Para isso, os elementos cortados são subdivididos em subpolígonos, sobre os quais serão feitas as integrações. É importante informar que a fratura define uma das arestas dos subpolígonos. Esta subdivisão tem como propósito apenas a integração, sendo a topologia e conectividade da malha mantidas durante todo o processo de propagação (Giner et al., 2009). A Figura 4.2 ilustra a divisão dos subpolígonos.

Define-se o domínio de integração do problema como o somatório de todos os elementos, sendo estes os subdomínios. No XFEM, define-se o subdomínio como sendo o somatório do conjunto de todos os subpolígonos que compõem o elemento.

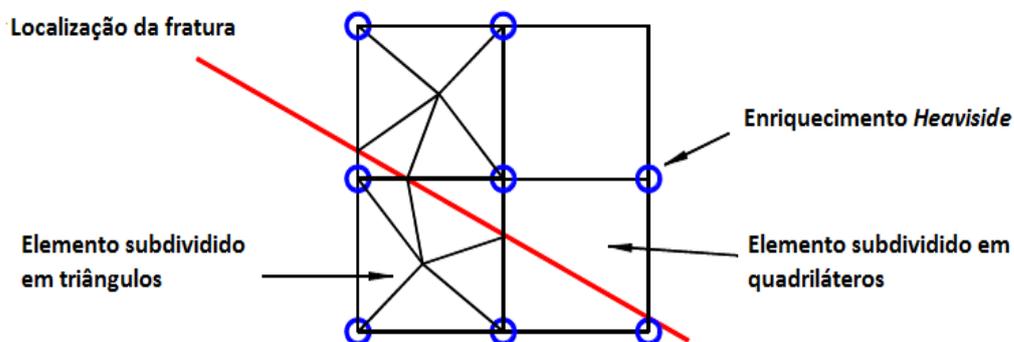


Figura 4.2 – Subdivisão dos elementos para integração (Giner et al., 2009).

Uma forma alternativa de representar a descontinuidade nos elementos XFEM, sem a necessidade de se subdividir os elementos, é através do uso do método dos nós “fantasmas” (Song et al., 2006). O referido método pode ser facilmente aplicado a elementos quadrilaterais com quatro nós, fazendo uso de um único ponto de integração. O método que é utilizado pelo programa ABAQUS® consiste em adições de nós “fantasmas” e superposição de elementos na malha original.

### 4.2.3.

#### Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão

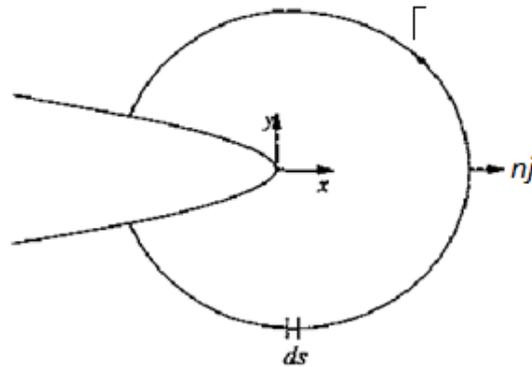
Numericamente, os fatores de intensidade de tensão podem ser obtidos através de sua relação com a integral  $J$ . A integral  $J$  é uma integral de contorno tida como independente do caminho e está baseada na lei de conservação de energia. Ela foi proposta por Rice (1968), inicialmente, para o estudo de materiais não lineares na condição de escoamento de pequena escala e tem a forma:

$$J = \oint_{\Gamma} \left( W dy - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} ds \right), \quad (4.2)$$

em que:

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.3)$$

é a densidade de energia de deformação, onde  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações.  $\Gamma$  é qualquer caminho que envolva a ponta da trinca começando pela sua face inferior e terminando na face superior e  $s$  é o comprimento de arco ao longo do contorno de integração. As coordenadas são tomadas como as coordenadas locais da ponta da trinca com o eixo  $x$  paralelo à face da trinca. A Figura 4.3 ilustra uma ponta de trinca com contorno arbitrário ( $n_j$  é o vetor unitário normal a  $\Gamma$ ).



**Figura 4.3 – Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca (Araújo T. D., 1999).**

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica, o valor da integral  $J$  é igual ao da taxa de liberação de energia  $G$ , esta diretamente ligada aos fatores de intensidade de tensão. Para um problema de carregamento misto generalizado, a integral  $J$  tem a relação:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (4.4)$$

Na forma apresentada, não se consegue obter os fatores de intensidade de tensão separadamente. Sendo assim, usam-se as integrais de interação (Yau et al., 1980), para a extração dos fatores de intensidade de tensão de forma individual.

Para tal extração, faz-se uso de dois estados de equilíbrio, o Estado 1 e o Estado 2. O Estado 1 corresponde ao estado presente da estrutura, onde as variáveis de interesse são extraídas da análise convencional em elementos finitos do modelo ao longo de um caminho de integração predefinido  $\Gamma$  em torno da ponta da fratura. Enquanto que o Estado 2 corresponde a um estado auxiliar, sendo para este utilizados os campos assintóticos dos modos de fratura I e II da MFLE. As variáveis associadas aos dois diferentes estados estão identificadas pelos sobrescritos 1 e 2. A superposição dos dois estados de equilíbrio leva a um outro estado de equilíbrio caracterizado por  $J^{(1+2)}$ :

$$J^{(1+2)} = \oint_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x} \right] n_j d\Gamma. \quad (4.5)$$

Através da simplificação e rearranjo da equação acima, a mesma pode ser escrita como:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)}, \quad (4.6)$$

onde  $M^{(1,2)}$  é a chamada integral de interação, expressa por:

$$M^{(1,2)} = \oint_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right] n_j d\Gamma \quad (4.7)$$

onde  $W^{(1,2)}$  é a energia de deformação de interação:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (4.8)$$

Recorrendo à relação entre  $J$  e  $K$ , Equação (4.4), pode-se escrever a Equação (4.5) para os estados combinados:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (4.9)$$

A equação da integral de interação relaciona-se com os fatores de intensidade de tensão da seguinte forma:

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (4.10)$$

Para resolver o problema de fratura em carregamento misto, faz-se uma escolha apropriada do estado auxiliar. Considerando o Estado 2 como Modo I puro, temos:  $K_I^{(2)} = 1$  e  $K_{II}^{(2)} = 0$ . A Equação (4.10) então simplifica-se para:

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1, \text{Modo I})} \quad (4.11)$$

Nesse caso, as variáveis do estado auxiliar representam o Modo I de fratura. Já considerando o Estado 2 como Modo II puro, temos:  $K_I^{(2)} = 0$  e  $K_{II}^{(2)} = 1$ . Assim, o fator de intensidade de tensão para o Modo II torna-se:

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1, \text{Modo II})} \quad (4.12)$$

onde, para este caso, as variáveis do estado auxiliar representam o Modo II de fratura.

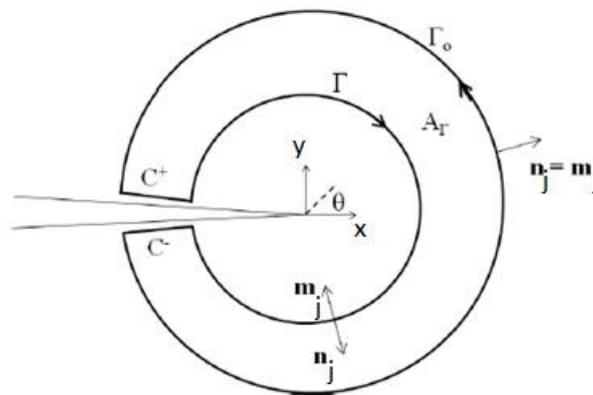
Em uma análise em elementos finitos, uma integral de contorno não é muito apropriada. De modo a melhorar o desempenho, faz-se uso de uma integral de domínio no lugar da integral de contorno. Shih e Asaro (1988), mostraram como isso pode ser feito para a integral de interação através da introdução de uma função peso  $q$ , com valor unitário no contorno  $\Gamma$  e zero fora do contorno  $\Gamma_0$  (veja Figura 4.4). Dentro da área compreendida pelos contornos  $\Gamma_0$  e  $\Gamma$ , a função  $q$  é uma função arbitrária suave variando de zero a um. Com isso, pode-se reescrever a integral de interação para um caminho fechado  $C = \Gamma \cup C^+ \cup \Gamma_0 \cup C^-$  da seguinte maneira:

$$M^{(1,2)} = \oint_C \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right] q m_j d\Gamma \quad (4.13)$$

onde  $m_j$  são as componentes do vetor normal à curva  $C$  atuando para fora da área  $A_\Gamma$ . As faces da fratura estão livres de tensão.

Por fim, aplicando-se o teorema da divergência e usando a equação de equilíbrio, alcança-se a representação em domínio equivalente da integral de interação:

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[ -W^{(1,2)} \delta_{1j} + \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA. \quad (4.14)$$



**Figura 4.4 – Convenções na ponta da trinca (Ahmed, 2009).**

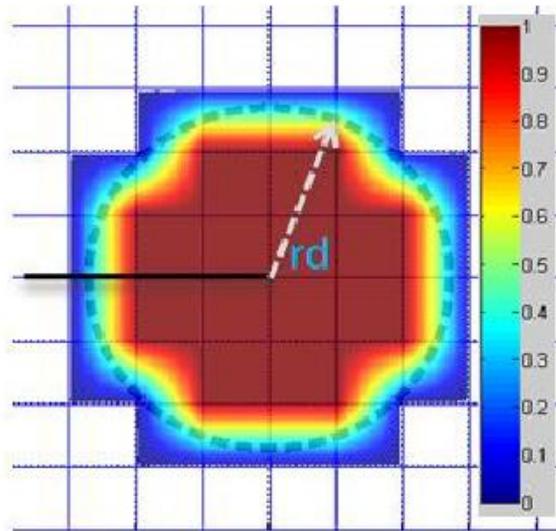
Para a avaliação numérica, o domínio  $A$  é composto pelos elementos no entorno da ponta da trinca. O conjunto de elementos do domínio é composto por todos os elementos que contêm nós dentro de um círculo de raio  $r_d$  centrado na ponta da trinca. Ressalta-se que, como a integral  $J$  independe do caminho, o raio  $r_d$  para o domínio  $A$  pode ser grande o suficiente para evitar as perturbações no campo de tensões da ponta da trinca. Para uma análise em duas dimensões, geralmente, adota-se para o raio  $r_d$  o valor de duas a três vezes a raiz quadrada da área do elemento, identificada como o comprimento característico,  $h_{local}$ .

$$r_d = 2 \text{ a } 3 h_{local} \quad (4.15)$$

$$h_{local} = \sqrt{A_{el}} \quad (4.16)$$

A função  $q$  tem valor unitário para todos os nós dentro do círculo formado por  $r_d$  e zero fora deste limite. A função em questão pode ser facilmente interpolada pelas funções de forma do próprio elemento. Nota-se que no interior do domínio o valor de  $\partial q / \partial x_j$  é igual a zero, portanto a integral é avaliada somente nos

elementos do contorno, onde  $\partial q/\partial x_j \neq 0$ . Isso mostra que o uso da integral de domínio é uma boa opção para a avaliação da integral de contorno em uma análise em elementos finitos. A Figura 4.5 mostra a variação da função  $q$  em um domínio de elementos.



**Figura 4.5 – Elementos selecionados e variação de  $q$  no domínio da integral de interação (Ahmed, 2009).**

#### 4.2.4.

#### Propagação da fratura

##### 4.2.4.1.

#### Ângulo Crítico de Propagação

Neste trabalho, adota-se o critério da máxima tensão circunferencial ou da máxima tensão principal proposto por Erdogan & Sih (1963) como critério de propagação de fratura. O critério define que a fratura irá propagar-se na direção de um ângulo crítico  $\theta_{cr}$ , que corresponde à direção da tensão circunferencial máxima. Na condição de carregamento misto, as tensões circunferenciais e cisalhantes assintóticas próximas à ponta da fratura têm as expressões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} -3\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2) \end{Bmatrix}. \quad (4.17)$$

Sabendo que a tensão circunferencial é uma tensão principal, o ângulo crítico de propagação pode ser estabelecido admitindo-se que a tensão cisalhante seja nula. Obtém-se após algumas manipulações, a seguinte expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \frac{1}{2} K_I \text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3\cos(\theta) - 1) \right] = 0 \quad (4.18)$$

Esta equação apresenta uma solução trivial:

$$\cos(\theta/2) = 0 \quad \text{para } \theta = \pm\pi \quad (4.19)$$

e uma solução não trivial:

$$K_I \text{sen}(\theta_{cr}) + K_{II} (3\cos(\theta_{cr}) - 1) = 0 \quad (4.20)$$

Resolvendo a equação acima, tem-se a expressão para o ângulo crítico:

$$\theta_{cr} = 2 \arctan \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (4.21)$$

Resolvendo a Equação (4.20) para o Modo I puro ( $K_{II} = 0$ ), temos que  $\theta_{cr} = 0^\circ$ . Se resolvermos a mesma equação para o Modo II puro ( $K_I = 0$ ), temos que  $\theta_{cr} = \pm 70,5^\circ$ , resultando nos limites inferior e superior do ângulo crítico de propagação.

O sinal do ângulo crítico de propagação depende do sinal de  $K_{II}$  obtido. Se  $K_{II} < 0$ ,  $\theta_{cr}$  tem sinal positivo. Se  $K_{II} > 0$ ,  $\theta_{cr}$  tem sinal negativo.

#### 4.2.4.2.

#### Crescimento da Trinca

Uma vez satisfeito o critério de propagação estabelecido no Capítulo 2,  $K = K_c$ , calcula-se o ângulo crítico de propagação, conforme foi apresentado no item anterior. Com a direção de propagação da fratura estabelecida, acrescenta-se um tamanho  $\Delta a$  de comprimento à fratura, sendo  $a$  o tamanho da trinca inicial. Com o novo tamanho de fratura, a análise prossegue e os passos são repetidos, calculando-se o novo ângulo de propagação e fazendo o acréscimo de  $\Delta a$  à fratura até o fim da análise incremental. O valor de  $\Delta a$  é definido pelo usuário de acordo com o problema analisado. O esquema abaixo mostra o fluxo de análise descrito:

- i) Cálculo de  $K_I$  e  $K_{II}$  [Equações (4.11) e (4.12)];
- ii) Determinação do ângulo crítico de propagação [Equação (4.21)];

- iii) Acréscimo de  $\Delta a$  de comprimento à fratura;
- iv) Atualização da geometria da fratura e determinação dos nós a serem enriquecidos;
- v) Obtenção das soluções do problema (campos de tensão e deformação)
- vi) Novo incremento → retorno ao item i).

A implementação realizada permite a propagação automática da fratura em um único processamento. No trabalho de Giner et al. (2009), a avaliação do ângulo de propagação é feita de forma externa ao procedimento de análise, onde uma vez estabelecida a direção de propagação da fratura, o procedimento de análise é repetido.

O critério adotado na implementação da sub-rotina, com base nos fatores de intensidade de tensão, difere do método utilizado pelo ABAQUS® (até sua versão 6.14) na análise de propagação de fraturas via MFLE. O ABAQUS® utiliza um critério com base em energia através do método VCCT (*Virtual Crack Closure Technique*). O VCCT baseia-se na suposição que a energia de deformação liberada para estender a trinca é a mesma energia requerida para fechá-la.

#### 4.2.5.

#### Características dos elementos

Os campos descontínuos foram implementados em elementos com quatro nós, ou seja, um elemento bilinear. Os elementos XFEM possuem um esquema de integração que depende da configuração de enriquecimento e subdivisão para integração que estes possuem. A subdivisão dos elementos segue o mesmo raciocínio utilizado por Giner et al. (2009), onde: o elemento que contém a ponta da trinca é sempre subdividido em triângulos; elementos biseccionados pela fratura por lados opostos mantêm a subdivisão em dois quadriláteros imposta pelo corte; elementos cortados pela fratura, quando não são divididos em dois quadriláteros, possuem subdivisão em triângulos; os elementos que não são cortados pela fratura não são subdivididos, conforme ilustrado na Figura 4.2. Quanto à integração, elementos e subelementos quadrilaterais possuem esquema de integração de Gauss 5 x 5, enquanto que os subelementos triangulares possuem 7 pontos de Gauss cada.

### 4.3.

#### **Pós-processamento**

Uma conhecida limitação do uso da sub-rotina UEL no ABAQUS® é a impossibilidade de visualização dos elementos definidos pelo usuário na plataforma ABAQUS/CAE®. Para que se possa visualizar a configuração deformada da estrutura com a respectiva representação gráfica dos resultados de deslocamentos da mesma, utiliza-se o programa SIGMA 2D, programa desenvolvido pelo Instituto Tecgraf/PUC-Rio em convênio com a Petrobras, para pré e pós-processamento de modelos de elementos finitos. Uma limitação de pós-processamento de análises com esse sistema é a impossibilidade de visualização das respostas dos campos de tensões nos elementos definidos pelo usuário.