

## Mecânica da Fratura Computacional

No capítulo anterior, foram apresentados conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica juntamente com os correspondentes campos de tensão e de deslocamento para as vizinhanças da ponta da trinca. Para muitos casos de aplicação, soluções analíticas não estão disponíveis ou são muito trabalhosas, sendo indicado o uso de técnicas numéricas para a sua modelagem.

No âmbito da Mecânica da Fratura, métodos como o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e os métodos sem malha (*mesh free*) são empregados para a obtenção de soluções aproximadas. Aliabadi (1997a) apresentou uma revisão dos principais avanços na aplicação do MEC em problemas de MF. Pode-se ainda citar o uso de extensões do método para tratar fraturas, como o Método Dual dos Elementos de Contorno (Aliabadi, 1997b) e o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (Lopes, 1998; Lopes, 2002). Quanto aos métodos sem malha, pode-se mencionar o *Element-Free Galerkin Method* usado por Belytschko et al. (1994). O referido método necessita apenas da descrição da geometria e de um conjunto de nós para construir as equações discretas através do uso do método dos mínimos quadrados móveis na aproximação dos deslocamentos.

Um dos métodos mais utilizados para tratar de problemas em meios contínuos, o Método dos Elementos Finitos (MEF), também é largamente aplicado na modelagem de descontinuidades em meios sólidos. Diversas aplicações do MEF a problemas da MF são encontradas na literatura. Entre elas estão: aplicação do método em propagação dinâmica de fraturas, em um trabalho apresentado por Swenson & Ingraffea (1988), onde são usadas malhas adaptativas na propagação de fraturas; aplicação do método em modelagem de propagação de fraturas em meios poroelásticos com uso da técnica de Galerkin (Selvadurai & Mahyari, 1998); análises elastoplásticas de fratura (Araújo, 1999; Araújo et al., 2000); aplicação do método em fraturamento dinâmico de rochas por explosão (Lima, 2001); estudo de trincas submetidas à fadiga (Miranda et al., 2002; Miranda et al., 2003).

A modelagem de fraturas com uso do MEF faz uso do conceito de modelagem discreta da fratura, pois esta tem sua geometria representada explicitamente no modelo. No caso de modelagem com uso do MEF convencional,

a fratura é disposta de modo a separar os bordos dos elementos adjacentes a ela. Uma abordagem comum dentro deste conceito, tratando-se de elementos finitos, é o uso de elementos de interface entre os elementos sólidos, a fim de representar a fratura no modelo. Esses elementos aplicam o conceito da Mecânica da Fratura Coesiva e são, assim, comumente chamados de “elementos coesivos” ou “elementos de fratura coesiva”. Dentre os trabalhos recentes que empregaram o conceito da MFC, citam-se: propagação de trincas por fadiga (Machado, 2007); delaminação sob modo misto de carregamento (Turon et al., 2010); fraturamento hidráulico (Chen, 2012; Bendezu et al., 2013a); fraturamento em materiais quase-frágeis, a exemplo do concreto (Montenegro, 2014); modelos de fratura coesiva aplicados a ensaios de corpos de prova de concreto reforçado com fibras de aço (Barboza & Roehl, 2014).

O MEF é um dos métodos numéricos mais populares entre os pesquisadores da MF, sendo alvo de grande atenção e extenso emprego. Este fato levou Moes et al. (1999) a desenvolverem uma nova formulação, derivada do MEF, para lidar com casos de abertura e propagação de fraturas. Este método é conhecido por Método Estendido dos Elementos Finitos (XFEM – *eXtended Finite Element Method*) e também faz uso da modelagem discreta da fratura. Com uso do XFEM, o corpo fraturado é modelado como um meio contínuo e a fratura é modelada através do enriquecimento da aproximação para o campo de deslocamentos. Foco de interesse deste trabalho, o XFEM busca superar algumas deficiências do MEF na simulação de fraturas e possui inúmeras utilizações: fraturamento hidráulico em concreto (QingWen et al., 2009); fraturamento hidráulico na área de gás e petróleo (Chen, 2013); fraturamento dinâmico de rochas por explosão (Bendezu et al., 2013b).

Outros conhecidos métodos numéricos para trato de estruturas diante de discontinuidades com base no MEF podem ser citados. São eles: Método Embutido dos Elementos Finitos (EFEM), que tem seus fundamentos explicados por Oliver (1996), e método *Smearred Crack*, utilizado por Rots (1988). O EFEM é um método como o XFEM, que não tem a representação geométrica da fratura no modelo. Nesse modelo, as discontinuidades são embutidas na aproximação do campo dos deslocamentos através de um enriquecimento a nível do elemento. Jirásek (2000) fez um estudo comparativo entre as formulações que apresentam discontinuidades embutidas. Já Oliver et al. (2006) apresentam uma comparação direta entre o EFEM e o XFEM. O método *Smearred Crack* faz uso de uma modelagem distribuída da fratura. Não há representação da fratura de maneira

isolada no elemento, mas, sim, a representação de uma faixa distribuída de abertura representando um conjunto de micro fraturas.

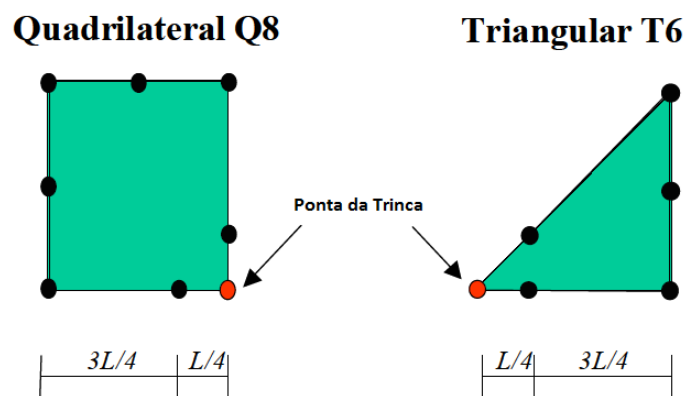
Neste capítulo, é apresentado um resumo do MEF aplicado a problemas com fraturas com base nos trabalhos de Araújo (1999) e Miranda (2003). Em seguida, é feito um apanhado geral do uso de elementos coesivos em análises de fratura. Por fim, é apresentada uma introdução ao XFEM juntamente com suas principais vantagens em comparação ao uso de elementos finitos convencionais, é mostrada sua formulação detalhada e também é mostrado o cálculo numérico dos Fatores de Intensidade de Tensão com base no método dos elementos finitos.

### 3.1.

#### Método dos Elementos Finitos

Uma importante característica da MFLE é a singularidade  $1/\sqrt{r}$  encontrada nas tensões na ponta da trinca. A sua representação por meio dos elementos finitos convencionais é uma tarefa difícil. Para superar esta dificuldade, foram sugeridos por Henshell & Shaw (1975) e Barsoum (1976), independentemente, os elementos singulares *quarter-points*.

Os elementos singulares *quarter-points* são elementos isoparamétricos convencionais, triangulares ou quadrilaterais, de ordem quadrática, no qual a singularidade  $1/\sqrt{r}$  é introduzida desviando o nó do meio do lado para a posição de  $1/4$  do lado. A Figura 3.1 mostra tais elementos.



**Figura 3.1 – Elementos singulares *quarter-points*.**

Barsoum (1976) evidenciou que melhores resultados são encontrados com os elementos triangulares, fato que se dá em função destes elementos terem a singularidade encontrada tanto no contorno quanto no interior do elemento,

enquanto que nos elementos quadrilaterais ela é encontrada somente no interior do elemento.

Os elementos triangulares são dispostos em forma de uma roseta. A roseta padrão é formada por oito elementos que formam entre si um ângulo de  $45^\circ$  e normalmente é alinhada com a trinca. A Figura 3.2 ilustra o formato da roseta padrão. A forma como a roseta é posicionada em uma malha de elementos finitos é vista na Figura 3.3, que traz rosetas para duas pontas de trinca.

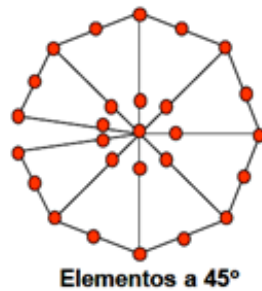


Figura 3.2 – Roseta padrão de elementos *quarter-points*. [Editada de Miranda (2003)].

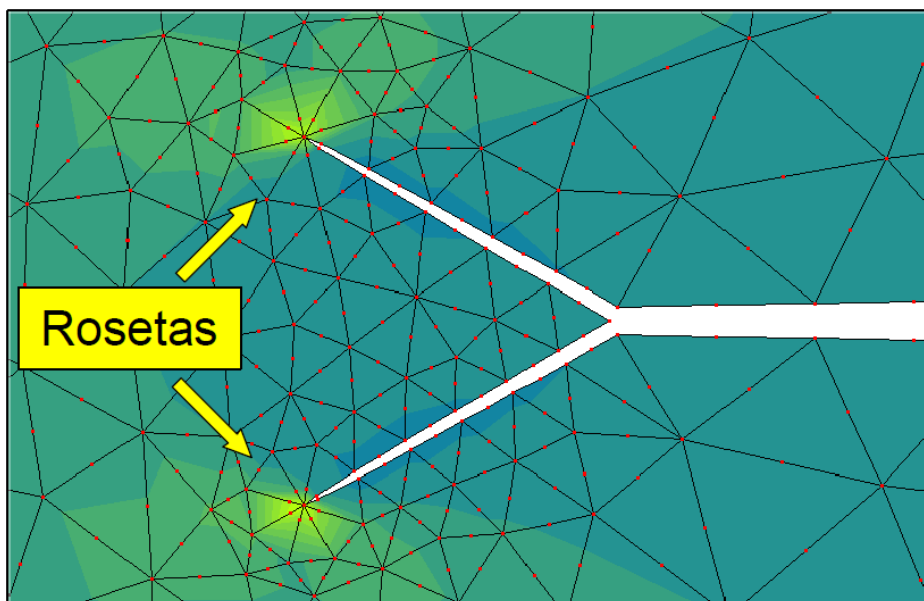


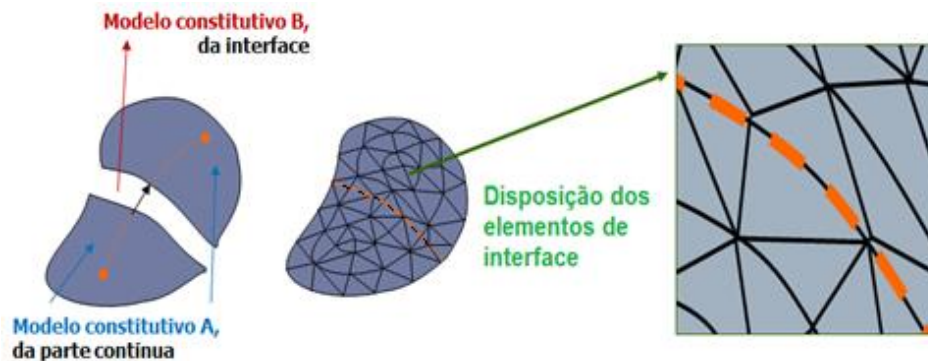
Figura 3.3 – Rosetas em malha de elementos finitos (Miranda, 2003).

### 3.2.

#### Elementos de Fratura Coesiva

A modelagem discreta da fratura através de elementos de fratura coesiva, ou elementos coesivos, é efetuada com uso de elementos de interface posicionados entre os elementos finitos sólidos.

Aos elementos coesivos está associada uma lei constitutiva diferente daquela empregada na parte contínua do modelo. Esta lei baseia-se em uma formulação de dano, obedecendo propriedades coesivas primeiramente estudadas por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). A Figura 3.4 ilustra a disposição dos elementos coesivos em uma malha de elementos finitos.



**Figura 3.4 – Elementos coesivos em uma malha de elementos finitos.**

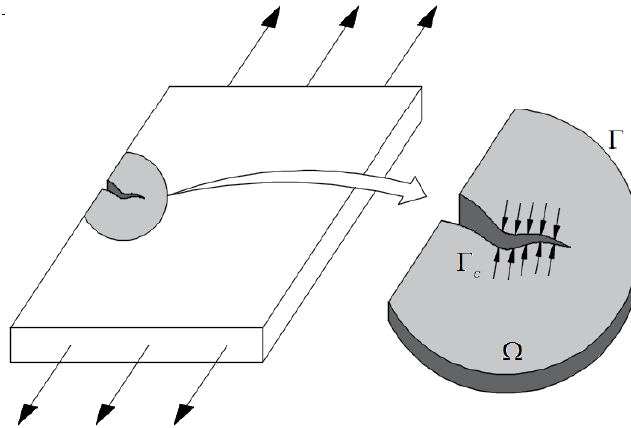
As teorias de Dugdale e Barenblatt são baseadas na existência de forças coesivas em uma região muito próxima à ponta da trinca (vide Figura 3.5). O modelo de Dugdale é direcionado para materiais dúcteis, enquanto que o modelo de Barenblatt é direcionado para materiais frágeis. No entanto, os modelos citados são analíticos. Uma primeira abordagem numérica de tais modelos surgiu com Needleman (1987), que relacionou tensões coesivas nas faces da trinca com os deslocamentos relativos  $(\Delta_n, \Delta_t)$  das mesmas. Needleman estabeleceu que as tensões coesivas são obtidas a partir de um potencial  $\psi(\Delta_n, \Delta_t)$ . Considerando o potencial abaixo:

$$\psi(\Delta_n, \Delta_t) = - \int_0^{\Delta} (T_n d\Delta_n + T_t d\Delta_t), \quad (3.1)$$

os vetores de tensões coesivas tem suas componentes normal,  $T_n$ , e tangencial,  $T_t$ , obtidas através das seguintes relações entre o potencial  $\psi$  e os deslocamentos relativos entre as interfaces, correspondentes:

$$T_n = -\frac{\partial \psi}{\partial \Delta_n} \quad (3.2)$$

$$T_t = -\frac{\partial \psi}{\partial \Delta_t} \quad (3.3)$$



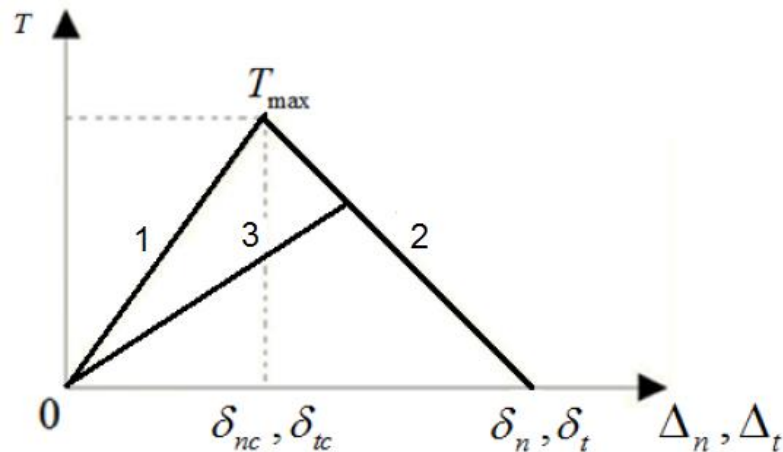
**Figura 3.5 – Forças coesivas atuando na ponta da fratura.**

Outros modelos de fratura coesiva surgiram a partir do trabalho de Needleman. Em geral, os modelos com base em zona coesiva apresentam suas leis constitutivas divididas em três fases (vide Figura 3.6):

1 – Fase de carregamento: início do gráfico tração x separação com comportamento linear-elástico. Nessa fase não há ocorrência de dano;

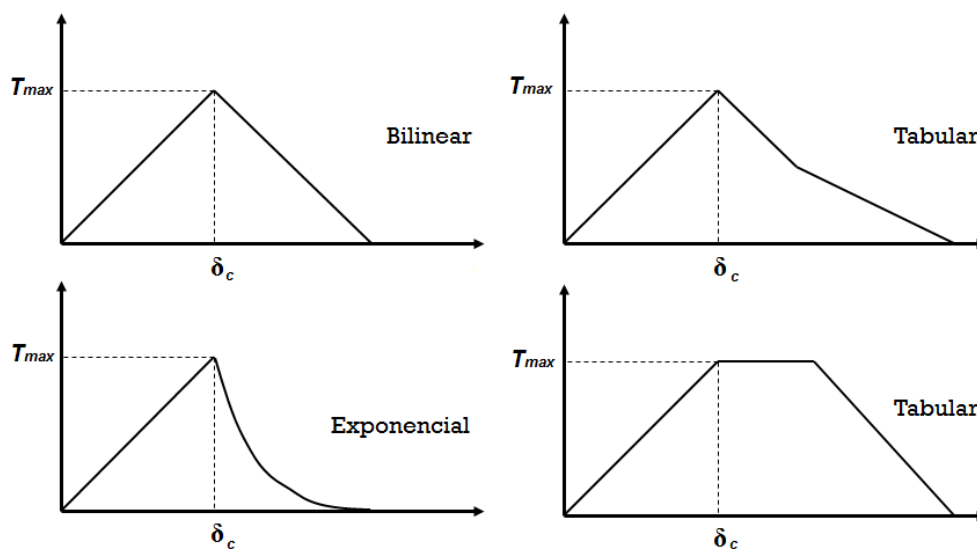
2 – Fase de amolecimento: fase desenvolvida a partir de uma abertura crítica  $(\delta_{nc}, \delta_{tc})$  para a qual as tensões geradas são máximas  $(T_{max})$ . Nesta fase, o material passa a desenvolver dano, o qual evolui até o ponto em que ocorre a separação total das interfaces coesivas  $(\delta_n, \delta_t)$ , não havendo mais coesão entre as mesmas;

3 – Fase de descarregamento: caso haja a retirada da carga externa, a curva tração x separação terá uma trajetória diferente da apresentada na fase de carregamento, ainda que seja uma queda linear. Isso se dá em função do dano apresentado na fase de amolecimento. Caso haja um recarregamento, a curva subirá pelo mesmo caminho obtido na fase de descarregamento.



**Figura 3.6 – Lei constitutiva do elemento coesivo – Gráfico tração x separação.**

Os elementos coesivos podem apresentar diferentes respostas, conforme apresentadas na Figura 3.7.



**Figura 3.7 – Diferentes modelos do gráfico tração x separação.**

Em uma análise em elementos finitos, o trabalho realizado para a abertura da trinca através das interfaces coesivas é adicionado à equação global de equilíbrio como um termo de trabalho interno com uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais. A equação global de equilíbrio que governa o problema toma a forma:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma dV + \int_{\Gamma_c} \delta \Delta : T_c dS = \int_{\Gamma} \delta u : T_{ext} dS \quad (3.4)$$

onde, com base na Figura 3.5:

$\delta \varepsilon$  são as deformações virtuais;

$\delta u$  são os deslocamentos virtuais;

$\delta\Delta$  é a abertura virtual da trinca;

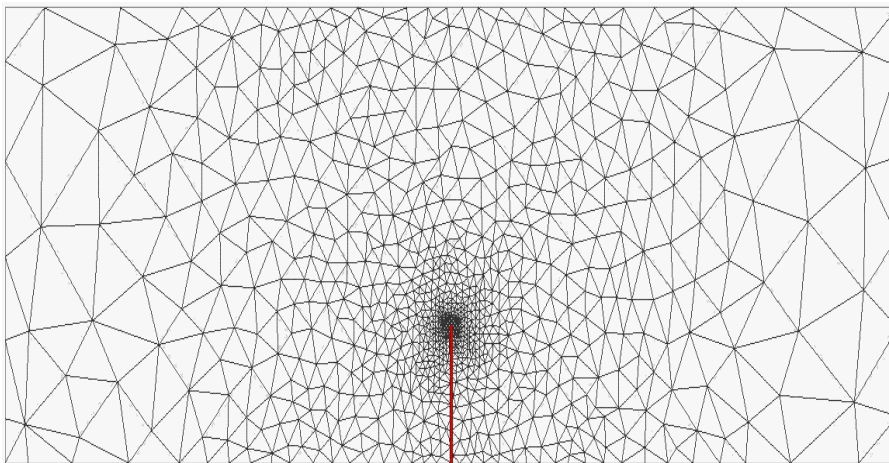
$T_c$  é o vetor de tensões coesivas nas interfaces da trinca  $\Gamma_c$ ;

$T_{ext}$  é o vetor de forças externas aplicadas no contorno  $\Gamma$ .

### 3.3.

#### Método Estendido dos Elementos Finitos – XFEM

O Método dos Elementos Finitos, um dos métodos numéricos mais utilizados na mecânica dos sólidos, possui grandes desvantagens na modelagem de descontinuidades em meios sólidos. Na modelagem de descontinuidades, fazendo uso do MEF, há a necessidade de conformidade entre a superfície da fratura e o contorno do elemento, conforme a Figura 3.3 mostra, além de um denso refinamento da malha próximo à ponta da fratura, como pode ser visto na Figura 3.8. Uma outra desvantagem do método é a necessidade da atualização da malha (*remeshing*) com o crescimento da fratura.



**Figura 3.8 – Malha de elementos finitos com fratura.**

Em 1999, um novo método foi apresentado por Belytschko & Black (1999) e aprimorado por Moes et al. (1999), para lidar com modelagens de descontinuidades. Este novo método é uma extensão do MEF e por isso é denominado Método Estendido dos Elementos Finitos, sendo usualmente chamado por XFEM, sigla de *eXtended Finite Element Method*. O método tem como base o Método da Partição da Unidade (Melenk & Babuska, 1996) e consiste em uma técnica de modelagem contínua de descontinuidades fortes, onde a trinca não é geometricamente modelada. A essência do método é a adição de funções de enriquecimento para a aproximação que contém um campo de deslocamentos descontínuos. Essas funções são os campos assintóticos perto da ponta da fratura



e uma função descontínua, definida ao longo da fratura, que representa os saltos no campo de deslocamentos em posições distantes da ponta.

No XFEM, a geometria de uma fratura e sua inserção no modelo são feitas de forma independente da malha. A fratura pode atravessar pelo interior dos elementos e não há a necessidade de atualização da malha à medida que a fratura se propaga. Pode-se destacar ainda que o método tem a grande característica de manter a base dos elementos finitos e suas propriedades, tais como esparcidade e simetria, além de ser uma ferramenta computacional robusta e precisa para modelar descontinuidades (Sukumar & Prévost, 2003).

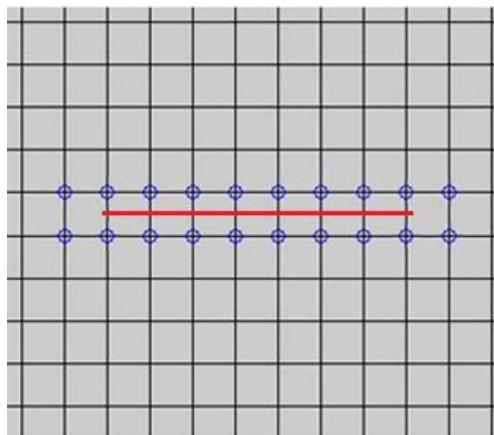
Segundo os autores, tal modelo é atrativo, pois oferece vantagens únicas:

1 – é um método de elementos finitos e pode explorar todo o corpo tecnológico e computacional existente;

2 – em contraste com elementos de contorno, é facilmente aplicável a problemas não lineares;

3 – em contraste com elementos finitos com atualização contínua da malha, não requer tantas projeções entre diferentes malhas.

A Figura 3.9 ilustra uma malha de XFEM, onde nota-se a modelagem da fratura sem a representação geométrica da mesma, sendo sua localização no domínio representada pela linha vermelha. Os nós destacados na Figura 3.9 são os nós enriquecidos, a fim de representar a descontinuidade imposta pela fratura.



**Figura 3.9 – Malha de XFEM**

### 3.3.1.

#### Formulação do XFEM para modelagem de fraturas

A formulação da aproximação dos deslocamentos através do XFEM consiste no modelo padrão de elementos finitos mais a representação da fratura, a qual tem sua geometria modelada independentemente da malha.

A aproximação padrão do campo de deslocamentos em elementos finitos é:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_n} u_i N_i(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

onde  $u_i$  são graus de liberdade de deslocamento no nó  $i$ ,  $N_i$  é a função de forma associada ao nó  $i$  e  $I_n$  é o conjunto de todos os nós do modelo. A consideração da descontinuidade dos deslocamentos é feita com a inserção da função de “salto” (*Heaviside*),  $H(\mathbf{x})$ . O campo de deslocamentos passar a ser descrito por:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_n} u_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in J_n} b_i N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

onde  $b_i$  são graus de liberdade de deslocamentos adicionais ao nó  $i$  e  $J_n$  é o conjunto dos nós dos elementos cujo suporte é totalmente cortado pela superfície da fratura.

A função de “salto”,  $H(\mathbf{x})$ , é definida como:

$$H(\mathbf{x}) = H(d(\mathbf{x})) = \text{sign}(d(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & d(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -1, & d(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}, \quad (3.7)$$

onde  $d(\mathbf{x})$  é a distância com sinal do ponto  $\mathbf{x}$  à superfície da fratura.

Quando a ponta da fratura não coincide com nenhuma borda de elemento, a função de “salto” não consegue representar de forma adequada a descontinuidade. Portanto, funções assintóticas de ponta de fratura são usadas para enriquecer os nós em torno da ponta da fratura como a técnica explicitada em Belytschko & Black (1999).

Assim, a aproximação toma a forma:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_n} u_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in J_n} b_i N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{i \in K_n} N_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{l=1}^4 c_i^l F_l(\mathbf{x}) \right), \quad (3.8)$$

onde  $c_i^l$  são graus de liberdade de deslocamentos adicionais ao nó  $i$ ,  $K_n$  é o conjunto dos nós do elemento que contém a ponta da fratura e  $F_l(\mathbf{x})$  são as funções assintóticas de ponta de fratura, expressas por:

$$\{F_l(r, \theta)\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}(\theta) \right\}, \quad (3.9)$$

onde  $(r, \theta)$  são coordenadas polares locais na ponta da fratura. Estas funções representam os campos assintóticos analíticos de deslocamentos no entorno da ponta da trinca, como rege a MFLE. É importante ressaltar que a primeira função,  $\sqrt{r} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , é descontínua entre as faces da fratura, o que permite representar a descontinuidade introduzida pela fratura, quando a ponta está localizada no interior do elemento.

A Figura 3.10 ilustra a escolha das funções para o enriquecimento dos nós. Nota-se que os nós não são enriquecidos pelos dois tipos de função concomitantemente. Assim,  $J_n^*$  é o conjunto dos nós do elemento cujo suporte é totalmente cortado pela superfície da fratura e que não são nós do elemento que contém a ponta da mesma. Na Figura 3.10, os nós envoltos com um círculo são os nós enriquecidos com a função de “salto”, enquanto que os nós envoltos por um quadrado são os nós enriquecidos com as funções assintóticas de ponta de fratura.

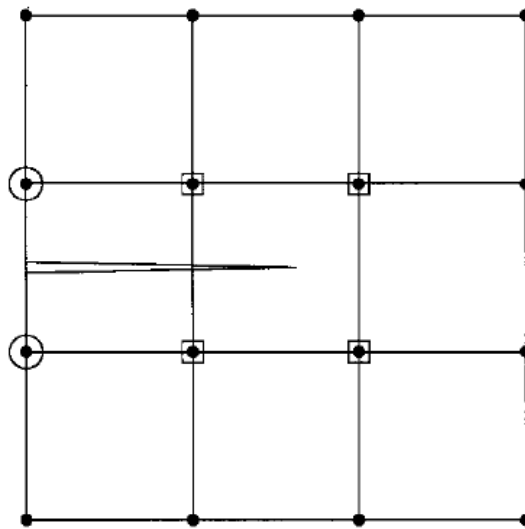


Figura 3.10 – Trinca em uma malha do XFEM (Moes et al., 1999).