

1

Introdução

A análise e compreensão da topologia de campos escalares, vetoriais e mais complexos, é uma peça chave nas mais diversas áreas e aplicações, por exemplo, análise de simulações de fenômenos físicos, rastreamento de vórtices, remalhamento, etc. Para que essas análises aconteçam de forma satisfatória, a simplificação do dado se torna muitas vezes indispensável, seja devido a existência de singularidades causados por ruídos ou imprecisões numéricas provenientes de medições, ou meramente pela necessidade de uma visão rápida e geral do campo (1, 2).

Em processos de remalhamento, por exemplo, a simplificação obtida através de suavizações de campos tensoriais de curvatura (3) é frequentemente empregada como forma de eliminar imperfeições do campo e obter apenas as características mais importantes do modelo.

Usualmente, isso resulta em cancelamentos de pares de singularidades, podendo estes serem resultado de modificações globais ou locais no campo. O interessante no processo de simplificação é que o campo mais simples possível pode não ser relevante pois removeu toda a informação, o que indica que manter uma coleção de versões, carregando modificações importantes sofridas pelo campo, pode ser uma boa estratégia (4). O controle sobre a movimentação de singularidades de forma individual pode ser um grande aliado na geração de malhas quadrangulares, uma vez que, singularidades mal posicionadas podem comprometer a estrutura global das malhas, entre outros casos. Além disso, a sequência de cancelamentos em um campo de cruzeiros, ou sua operação inversa (surgimento de pares de singularidades) podem servir de guias em processo de simplificação e refinamento de malhas quadrangulares.

Motivados por tais aplicações em malhas quadrangulares, propomos a realização de simplificações topológicas, agora em campos de cruzeiros, podendo estas serem realizadas de forma global ou local. No caso global, realizamos a construção de um espaço de escala para campos de cruzeiros (Capítulo 3). Neste caso, quando ocorrem as simplificações, estas não podem ser facilmente previstas e as singularidades não podem ser manipuladas individualmente, mas

o processo aproxima uma difusão laplaciana bem estudada em contextos mais simples. Já no caso local (Capítulo 4), a movimentação das singularidades e os cancelamentos são controlados, causando pouco impacto no campo e não alterando as demais singularidades.

1.1

Breve Histórico

No começo do meu doutorado, em 2011, tive uma oportunidade de fazer um estágio de doutorado no INRIA em Sophia Antipolis. Entre os projetos ofertados, um deles visava realizar a reconstrução de cenas urbanas. Esse projeto prontamente chamou minha atenção, não só pelo seu objetivo como também pelo meu desejo em entender como realmente o processo de reconstrução funcionava.

Chegando ao INRIA, começamos a conversar sobre o projeto e percebemos como uma representação por quadriláteros seria interessante, visto que, boa parte das formas arquitetônicas da cidade já é naturalmente composta por quadriláteros. Começamos a pensar na melhor forma de apresentar a reconstrução e, simultaneamente, começamos a discutir sobre a dificuldade em gerar uma malha quadrangular com um nível de detalhe adequado para a situação (talvez empregando multi-resolução?) e com boas propriedades, tais como: regularidade no tamanho das faces, arestas perpendiculares, poucos vértices singulares, fácil aplicação de textura, etc.

Desse momento em diante, as cenas urbanas saíram do cenário e as malhas quadrangulares se tornaram o centro das atenções. Começamos a estudar boas formas de gerar uma malha quadrangular, com um nível de detalhes razoável para a aplicação desejada e com boa estrutura global. Um procedimento que aparentava ser natural, seria começar com uma malha simples e, aos poucos, ir adicionando detalhes, de forma a manter a estrutura o mais simples possível. Assim, surgiu o *operador* (Seção 2.3) para cumprir a tarefa de realizar os refinamentos comprometendo a estrutura o mínimo possível.

Começamos a pensar em uma maneira de “prever” quando e onde deveríamos aplicar o operador, de forma a obter uma quadrangulação para uma malha triangular de entrada. Uma alternativa interessante seria utilizar campos de cruces, já que para uma malha quadrangular, podemos obter um campo de cruces colocando cruces nos vértices de valência 4, sendo as cruces alinhadas com as arestas dos quadrângulos. Pensamos então juntar o nosso conhecimento anterior em espaço de escala em campos vetoriais (4) e construir um espaço

de escala, agora para campos de cruces.

A primeira idéia seria, a partir da triangulação de entrada, extrair um campo de cruces associado. Após a extração, calcular um espaço de escala de campos de cruces até atingir a configuração mais simples possível. Nesta configuração extremamente simples do campo de cruces, extrair uma quadrangulação inicial que serviria como ponto de partida para a aplicação do operador. Para guiar o processo de construção incremental, poderíamos realizar uma relação entre a geração das singularidades na malha quadrangular e no campo de cruces, onde, as versões do campo de cruces dentro do espaço de escala, realizáveis pelo operador, serviriam de guia para atingir a base do espaço de escala, chegando assim, à configuração desejada.

Já de volta a PUC, em 2012, comecei de fato a trabalhar na construção do espaço de escala para campos de cruces e o que aparentemente se encaixaria perfeitamente, na prática não era tão simples. Em um primeiro momento, percebi que chegar ao topo do espaço de escala do campo de cruces sobre a malha triangular, não era uma tarefa trivial. Das estratégias utilizadas, o filtro gaussiano (Seção 3.3.1) apresentou o melhor resultado embora não tenha alcançado o topo do espaço para alguns modelos. Além disso, suavizar o campo e chegar ao topo do espaço de escala, em nada garantia o bom posicionamento das singularidades para a geração dos quadrângulos, o que resultaria na geração de hélices para algumas estratégias.

A partir desse momento, voltamos completamente nossa atenção para campos de cruces. Queríamos poder manipulá-los com controle dessas alterações. Neste momento, senti a necessidade de detectar as singularidades do campo de cruces de maneira mais robusta (Seção 4.2) pois, o método usado na literatura, não garantia propriedades topológicas básicas como a característica de Euler. Outro problema com a estratégia era que, para classificar um vértice como singular, era necessário definir um limiar (em ponto flutuante) para o valor do índice e essa definição de limiar não era natural tampouco intuitiva.

Na manipulação do campo, um ponto interessante consistia em poder movimentar as singularidades, preferencialmente de maneira individual, para aumentar o controle sem criar novas, sem mudar o tipo das singularidades manipuladas e alterando o campo o mínimo possível. Esse reposicionamento das singularidades foi possível através de uma operação local, que chamamos de *edição local* (Seção 4.3), baseada em cancelamentos de saltos sobre as arestas.

Depois de conseguirmos movimentar as singularidades pelo campo, a pergunta que naturalmente surgiu foi: será que conseguimos cancelar singularidades de forma similar ao cancelamento de pontos críticos em campos vetori-

ais? A primeira coisa que precisaríamos fazer era escolher um caminho que conectasse duas singularidades de índices opostos. Embora houvessem vários caminhos plausíveis, optamos por aqueles cujo cancelamento de salto sobre as arestas alterassem o campo o mínimo possível, e que em paralelo, fosse flexível a possíveis pequenas mudanças (Seção 4.4.1). Uma vez escolhido um caminho, realizamos o cancelamento de saltos em todas as suas arestas, o que resultou no cancelamento das singularidades.

Embora em nossos experimentos tenha sido sempre possível realizar todos os cancelamentos até chegar ao campo mais simples possível, estamos conscientes que nossa estratégia poderia eventualmente não cancelar todas as singularidades. Decidimos escolher os pares para o cancelamento baseado no custo dos saltos ao longo do caminho, que chamamos de persistência do par (Seção 4.4.2), por acreditarmos que essa estratégia respeitaria o tempo de cada singularidade, ou seja, seria adequado para remover primeiramente instabilidades numéricas e/ou ruídos, caso fosse esse o intuito, e as singularidades mais “robustas”, seriam provavelmente as últimas canceladas.

Assim, destinamos uma considerável parcela dos nossos esforços na análise e compreensão da estrutura topológica do campo de cruzes, divergindo da proposta inicial de 2011, porém, acrescentando informações interessantes ao nosso conhecimento sobre o comportamento e manipulação dos campos de cruzes.

1.2

Trabalhos Relacionados

Operações que Preservam a Quadrangulação: Realizar operações sobre malhas quadrangulares, sem introduzir faces não quadrangulares, consiste em uma tarefa árdua devido à forte dependência de conectividade. Uma solução é realizar operações unitárias sobre a malha, podendo essas tanto alterar a quantidade de vértices, com o objetivo de gerar versões simplificadas (5, 6, 7), quanto melhorar a estrutura global da malha (8).

Em se tratando de simplificações no modelo, Daniels *et al.* (5) introduziram um algoritmo baseado nas operações utilizadas para simplificação de malhas triangulares (colapsar arestas). O método consiste em um conjunto de operações aplicadas sobre a malha dual, onde cada uma visa aprimorar a estrutura da malha e manter a estrutura topológica desta. Essas operações consistem no colapso de caminhos (*poly-chord collapse*), de vértices de grau dois (*doublet*

collapse) e de quadrângulos (*quadrilateral collapse*¹). Em seguida, Daniels *et al.* (6) apresentaram uma adaptação para este método de forma a restringir a área afetada pela simplificação e, conseqüentemente, garantir a preservação de áreas importantes.

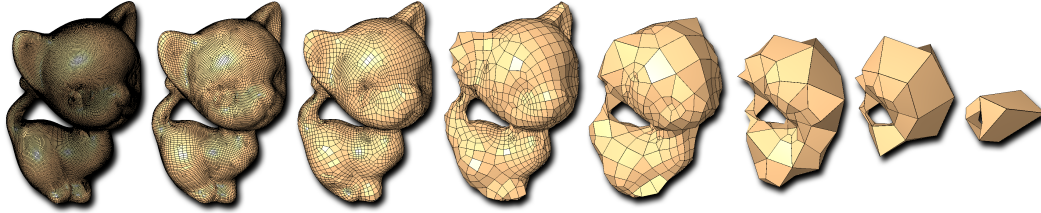


Figura 1.1: Geração de uma hierarquia de malhas puramente quadrangulares através da aplicação de operações sobre a malha dual correspondente. Figura extraída do artigo original (5).

Posteriormente, Tarini *et al.* (7) apresentaram uma abordagem para simplificação de malhas baseado em um conjunto estrito de operações apenas locais. O objetivo consiste em progressivamente gerar uma malha composta por quadriláteros o mais regulares possível, com uma distribuição uniforme dos vértices e mantendo a valência dos mesmos sempre que apropriado (Figura 1.2). O método proposto é baseado em três ingredientes que interagem mutuamente: um novo conjunto de operações locais para malhas apenas quadrangulares, uma heurística para seleção da operação a ser realizada e um operador de suavização para o reposicionamento dos vértices.

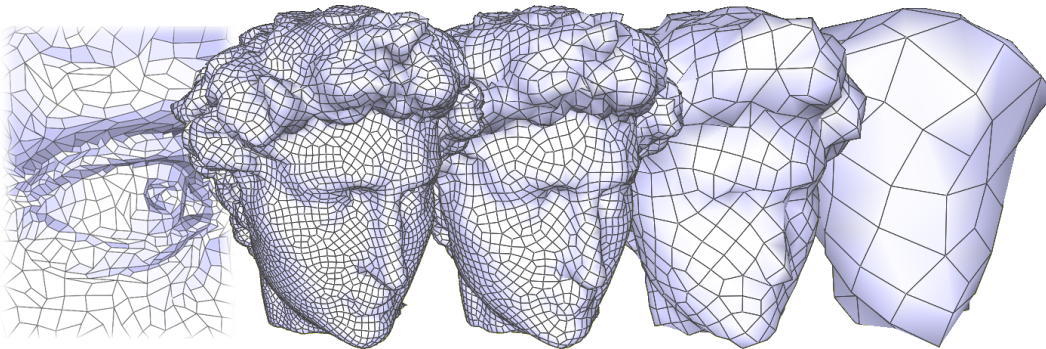


Figura 1.2: Processo de simplificação de uma malha quadrangular através da realização de operações locais. Figura extraída do artigo original (7).

Atuando de forma mais estrutural, em Bommes *et al.* (8) é proposto um operador que visa melhorar a estrutura global de uma malha quadrangular. De forma geral, uma série de operações atômicas, escolhidas de forma gulosa, é realizada sobre a malha original mantendo o posicionamento das singularidades

¹Também conhecido na literatura como *quadclose*(9)

e eliminando as estruturas de hélices (Figura 1.3). As operações são dispostas em forma de uma máquina de estados, onde para cada término de ciclo, a malha permanece consistente, ou seja, há apenas quadriláteros presentes.

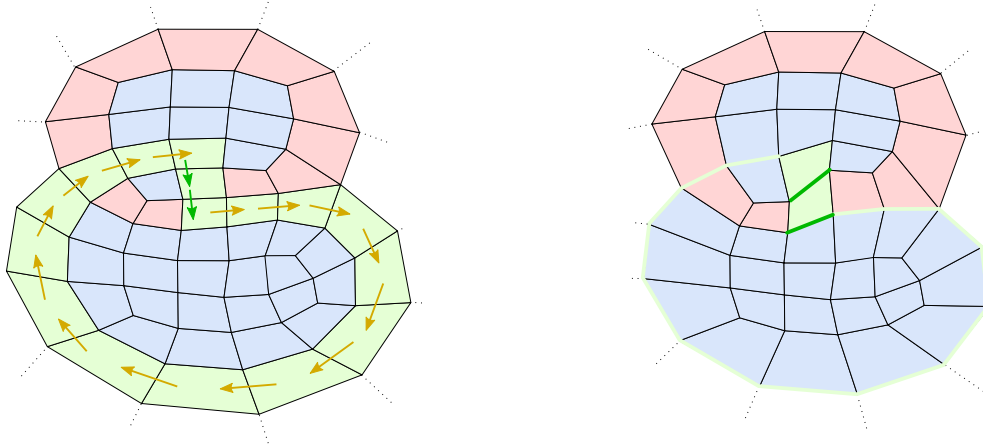


Figura 1.3: Remoção da estrutura de hélice (em verde à esquerda) realizada através da eliminação de um ciclo. Figura extraída do artigo original (8).

Neste trabalho, propomos um operador, também baseado em ações unitárias, porém com o objetivo de realizar refinamentos na malha quadrangular sem inserir faces não quadrangulares durante todo o processo (Seção 2.3). O operador proposto pode ser utilizado tanto para inserir detalhes na malha, através da inserção de vértices singulares, quanto para melhorar condições de alinhamento sem inserir nenhum vértice singular.

Espaço de Escala: Empregados em diversas áreas, técnicas utilizando espaço de escala se tornaram populares devido a sua capacidade em acessar informações multi-escala. Para a utilização do espaço de escala, algumas estratégias se baseiam em escolher a meso-escala adequada (10). Outras estratégias, assim como o presente trabalho, se utilizam do espaço de escala como forma de ganhar informação, podendo estas realizar o rastreamento de singularidades (11, 12) ou realizar o acúmulo de informação (4, 13).

Para o caso de campos bi-dimensionais, Bauer e Peikert (11) propuseram um método para o rastreamento de vórtices em simulações com foco em Dinâmica dos Fluidos. Posteriormente, Klein e Ertl (12) propuseram um abordagem, agora para campos vetoriais tri-dimensionais, que se utiliza do rastreamento dos pontos críticos através das escalas com o objetivo de distinguir estruturas locais de globais do campo vetorial, além de ruído e artefatos numéricos (Figura 1.4).

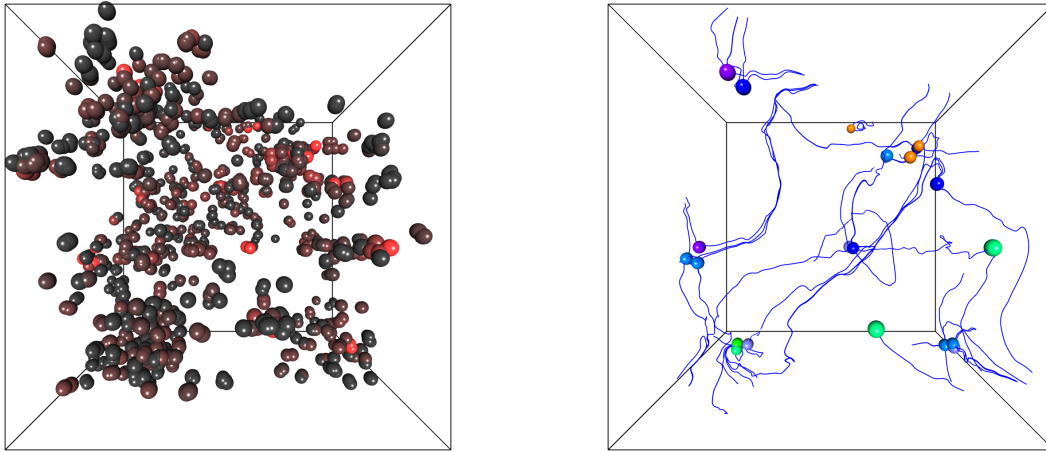


Figura 1.4: Simplificação de um campo vetorial 3D. À esquerda é apresentado o espaço de escala com os pontos críticos, sendo os mais estáveis apresentados em vermelho; à direita são apresentados os pontos críticos finais. Figura extraída do artigo original (12).

Em campos escalares, a utilização de espaços de escala também se faz presente. Reininghaus *et al.* (13), propuseram uma forma para medir a importância de um ponto crítico em campos escalares bi-dimensionais através da combinação da estrutura do espaço de escala e do conceito de persistência da homologia, podendo essa técnica ser aplicada tanto em dados sintéticos quanto em dados reais (Figura 1.5).

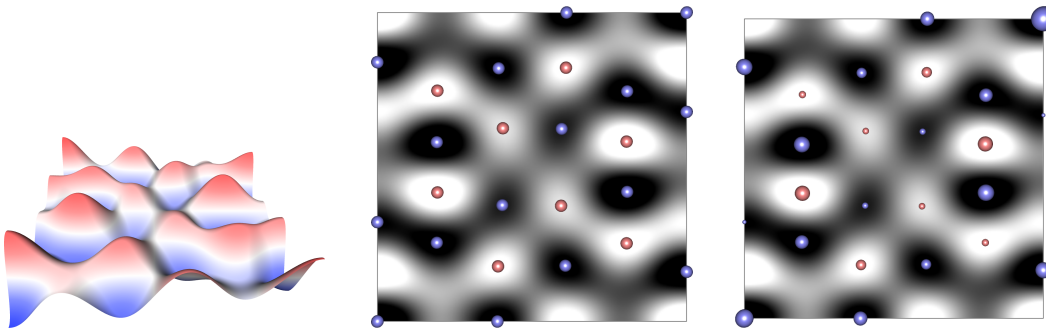


Figura 1.5: Mensuração da importância de pontos críticos em um dado sintético. À esquerda: dado sintético utilizado. Ao centro: detecção dos pontos críticos (em azul e vermelho). À direita: pontos críticos com a aplicação de uma escala conforme a persistência. Figura extraída do artigo original (13).

Neste trabalho, propomos a construção do espaço de escala, agora para campos de cruces (Seção 3.3), obtido a partir da conversão do campo de cruces para um campo tensorial simétrico, cuja motivação provinha inicialmente da geração de uma malha quadrangular o mais simples possível. Além disso, acreditamos que o espaço de escala poderá ser interessante para guiar a aplicação do operador de refinamento proposto no Capítulo 2.

Edição Baseada em Topologia: A análise e interpretação de campos turbulentos são tarefas não triviais devido à presença de estruturas em diversas escalas. Uma solução consiste na realização de simplificações topológicas baseadas no conhecimento do usuário (4) que é uma estratégia utilizada com sucesso para a reconstrução de superfícies (14, 15). Já outra solução, consiste em realizar simplificações topológicas de forma automática, podendo estas, assim como neste trabalho, realizar cancelamento de pares de singularidades baseado na importância destes (16, 17) ou realizar a fusão de singularidades gerando singularidades de ordem maior (2, 18).

Visando aumentar a eficácia da visualização de campos, Leeuw *et al.* (16) propuseram um método para reduzir os aglomerados de singularidades, presentes na visualização de campos vetoriais planares, através da remoção de pares de pontos críticos conectados. Posteriormente, Tricoche (17) apresentou uma técnica que pode ser tanto aplicada para o caso de campos vetoriais quanto para o caso de campos tensoriais planares, para realizar simplificações topológicas contínuas, cujas bases teóricas provêm da teoria das bifurcações (19). Para isto, é calculada a topologia dos campos, ou seja, são detectadas as singularidades e separatrizes, e para cada par de singularidades é associado um número que mede a importância do par na estrutura global do campo. Posteriormente, é executado o cancelamento dos pontos abaixo de um limiar escolhido pelo usuário (Figura 1.6).

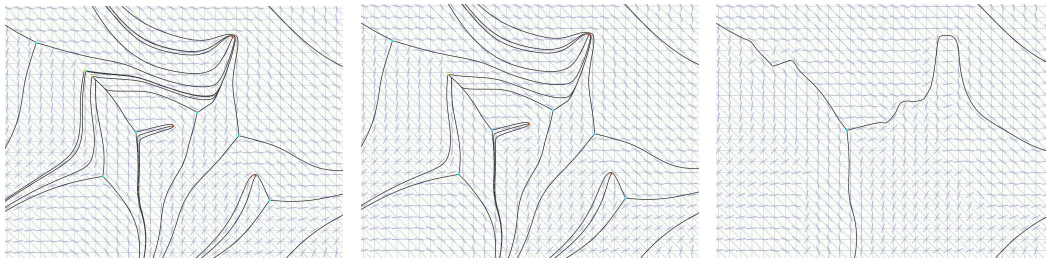


Figura 1.6: Simplificação topológica de um campo tensorial através do cancelamento de pares de singularidades. Figura extraída do artigo original (17).

Como técnica alternativa, Tricoche *et al.* (2) propuseram que, ao invés de serem realizados cancelamentos de pares de singularidades, fossem realizadas fusões das singularidades que constituíam os aglomerados no campo vetorial, formando assim, singularidades de ordem mais alta (Figura 1.7). Essa técnica também foi estendida para o caso de campos tensoriais (18).

Neste trabalho, propomos uma técnica para a edição local de campos de cruzes através da manipulação de suas singularidades (Seção 4.3). A técnica proposta visa alterar o posicionamento das singularidades, através de operações de cancelamento de saltos sobre arestas, sem inserir novas singularidades e

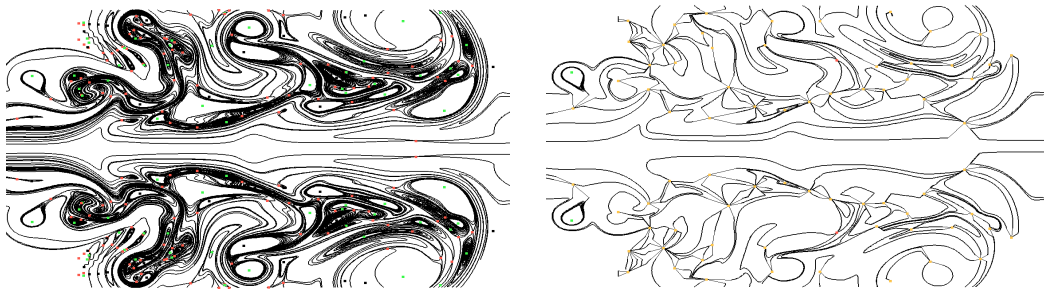


Figura 1.7: Simplificação topológica de um campo vetorial através da fusão das singularidades que compõem os aglomerados. Figura extraída do artigo original (2).

sem alterar as demais singularidades do campo. Consequentemente, podemos realizar simplificações no campo de cruces (Seção 4.4), realizando apenas modificações locais no campo.

1.3

Sumário das Contribuições

Capítulo 2 Neste capítulo, propomos um *operador que preserva a quadrangulação* para o refinamento de malhas quadrangulares. O operador é bastante simples e consiste basicamente em inserir uma faixa de quadrângulos na malha. Para sua aplicação é necessário apenas escolher um caminho composto por arestas da malha, podendo este ser aberto ou fechado e de qualquer tamanho. A escolha do caminho possibilita que sejam realizadas ações tanto para melhorar as condições de alinhamento da malha inserindo apenas vértices regulares (valência 4) quanto para a adição de detalhes, o que pode ser expandido para uma construção de forma incremental da malha através da criação e modificação de vértices singulares.

Capítulo 3 Neste capítulo, propomos a construção do *espaço de escala gaussiano para campos de cruces*. Para realizar a construção, convertamos o campo de cruces em um campo tensorial bi-dimensional de segunda ordem. Apresentamos também como ocorre o processo de cancelamento de pares de singularidades durante a suavização do campo de cruces.

Capítulo 4 Neste capítulo, apresentamos inicialmente uma forma para a detecção de singularidades, resistente a pequenas perturbações, que depende apenas do número de separatrizes incidentes no vértice. Além disso, propomos uma *edição local* em campos de cruces que permite a movimentação das

singularidades pelo campo, de forma controlada, sem modificar seu tipo e sem criar novas singularidades. A manipulação das singularidades é baseada na ação do *cancelamento de saltos sobre arestas*. Além da movimentação das singularidades, a edição local do campo permite o cancelamento de pares de singularidades de índices opostos, sendo estes realizados com base na persistência do par.