# 3 Método dos elementos finitos com representação explicita da falha por elementos de interface

Neste capítulo, apresentam-se a formulação em elementos finitos do elemento de interface, os modelos constitutivos adotados e os algoritmos de solução empregados para a integração das tensões. Os desenvolvimentos apresentados a seguir são baseados na nomenclatura e formulações apresentadas por Schellekens et al. (1992), Day & Potts (1994), Azevedo (1997) e Abbo (2005).

### 3.1. Elementos de interface

As descontinuidades geológicas como as falhas nas rochas apresentam comportamentos complexos onde a distribuição das tensões depende fundamentalmente das condições de interface do problema mecânico. Para representar corretamente este comportamento é necessário utilizar elementos especiais chamados elementos de interface, os quais são de grande relevância para este trabalho.

A seguir é apresentada uma revisão dos elementos de interface mais utilizados, suas características, formulações, desvantagens e sua evolução na história.

# 3.1.1. Elemento de Goodman, Taylor e Brekke (1967)

O elemento de interface de Goodman et al. (1967) foi originalmente desenvolvido para a análise de juntas em estruturas rochosas. Este elemento possui uma espessura nula e é formado por 4 nós com deslocamentos na direção normal e tangencial à direção da interface como ilustrado na Figura 3.1.



Figura 3.1 - Geometria do elemento de interface de Goodman et.al (1967)

As deformações são os deslocamentos relativos entre o topo e a base e podem ser relacionadas com os deslocamentos nodais através da matriz B, como segue:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{y} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{U}_{x}^{\text{topo}} - \mathbf{U}_{x}^{\text{base}} \\ \mathbf{U}_{y}^{\text{topo}} - \mathbf{U}_{y}^{\text{base}} \end{cases}$$
(3.1)

ou,

$$\varepsilon = B u \tag{3.2}$$

onde u é o vetor de deslocamentos nodais, o qual pode ser escrito como:

$$\mathbf{u} = \left\{ \mathbf{u}_{x}^{1}, \mathbf{u}_{y}^{1}, \mathbf{u}_{x}^{2}, \mathbf{u}_{y}^{2}, \mathbf{u}_{x}^{3}, \mathbf{u}_{y}^{3}, \mathbf{u}_{x}^{4}, \mathbf{u}_{y}^{4} \right\}$$
(3.3)

A matriz B pode ser expressa como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix}$$
(3.4)

onde  $N_1$  e  $N_2$  são as funções de interpolação lineares definidas como:

$$N_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2x}{L} \right) \tag{3.5}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2x}{L} \right) \tag{3.6}$$

A matriz de rigidez local do elemento pode ser calculada pelo principio do trabalho virtual como:

$$K_{e} = \int_{-L/2}^{L/2} B^{T} D_{t} B \frac{L}{2} dx$$
(3.7)

onde  $D_t$  é a matriz constitutiva do elemento de interface.

A matriz de rigidez deve ser transformada em relação às coordenadas globais.

# 3.1.2. Elemento de Ghaboussi, Wilson e Isenberg (1973)

Ghaboussi et.al(1973), propuseram um elemento de interface com espessura não nula e simetria axial para a análise das descontinuidades representadas por ligações de rochas, falhas e interfaces (Recka, 2009). Seus deslocamentos entre o topo e a base são considerados como graus de liberdades independentes como ilustrado na Figura 3.2.



Figura 3.2 – Geometria do elemento de interface de Ghaboussi et.al (1973)

em que:

 $\mathbf{u}_{\mathrm{x}}^{5} = \mathbf{u}_{\mathrm{x}}^{4} + \Delta \mathbf{u}_{\mathrm{x}}^{5} \tag{3.8a}$ 

 $\mathbf{u}_{y}^{5} = \mathbf{u}_{y}^{4} + \Delta \mathbf{u}_{y}^{5} \tag{3.8b}$ 

$$u_x^6 = u_x^3 + \Delta u_x^6$$
 (3.8c)

$$\mathbf{u}_{y}^{6} = \mathbf{u}_{y}^{3} + \Delta \mathbf{u}_{y}^{6} \tag{3.8d}$$

Os deslocamentos relativos na direção normal  $\Delta u_{\eta}$ , e na direção tangencial  $\Delta u_{\xi}$ , ilustrados na Figura 3.3, variam ao longo do elemento de interface (Romanel, 2011), como segue:

$$\Delta \mathbf{u}_{\xi} = \mathbf{N}_{1} \,\Delta \mathbf{u}_{\xi}^{5} + \mathbf{N}_{2} \,\Delta \mathbf{u}_{\xi}^{6} \tag{3.9a}$$

$$\Delta u_{\eta} = N_1 \Delta u_{\eta}^5 + N_2 \Delta u_{\eta}^6 \tag{3.9b}$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são as funções de interpolação lineares do elemento, definidas como:







As deformações podem ser definidas como os deslocamentos relativos nas componentes normal e tangencial sobre a espessura inicial do elemento, t, de acordo com:

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{\Delta u_{\eta}}{t}$$
(3.11a)

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\Delta u_{\xi}}{t}$$
(3.11b)

A matriz B que relaciona as deformações com os deslocamentos relativos pode ser escrita como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}$$
(3.12)

As componentes de tensão são definidas através da matriz constitutiva, D<sub>t</sub>, do elemento de interface, como segue:

$$\begin{cases} \sigma_{\eta} \\ \sigma_{\xi} \end{cases} = \mathbf{D}_{t} \begin{cases} \varepsilon_{\eta} \\ \varepsilon_{\xi} \end{cases}$$
(3.13)

A matriz de rigidez local do elemento pode ser determinada pela seguinte equação:

$$K_{e} = \int_{V} B^{T} D_{t} B dV$$
(3.14)

devendo ser transformada com respeito ao sistema global de coordenadas para sua composição na matriz de rigidez global.

# 3.1.3. Elemento de Pande e Sharma (1979)

Este elemento de interface é uma extensão do elemento de Ghaboussi et.al (1973) mas adotando um elemento parabólico de 8 nós, como ilustrado na Figura 3.4.



Figura 3.4 – Detalhe do elemento de interface de Pande et.al (1973)

# 3.1.4. Elemento de Desai, Lightner e Siriwardane (1984)

Este elemento de interface foi utilizado inicialmente na modelagem de solos, possui uma espessura delgada e pode representar problemas de interação solo estrutura sobre vários modos de deformação. Sua principal vantagem é que sua formulação é a mesma de um elemento quadrilateral plano, sendo fácil sua implementação computacional (Desai et al., 1984).

### 3.1.5. Elemento de Beer (1985)

O elemento de Beer é baseado no elemento desenvolvido por Ghaboussi et.al (1973). As principais diferenças propostas por Beer (1985) foram: uma formulação isoparamétrica e a espessura nula do elemento de interface, com o objetivo de fazer uma adequada análise no contato de juntas como na análise do comportamento na fratura de rochas.

### 3.1.6. Elemento de Day & Potts (1994)

O elemento de interface de Day & Potts (1994) possui uma espessura zero e seu elemento é baseado no elemento de Goodman et.al (1967). São propostas algumas melhorias e estudam as dificuldades numéricas quando se apresentam grandes diferenças na rigidez do elemento de interface com respeito aos elementos contínuos adjacentes. Os problemas de geração de malha devido à característica do elemento de apresentar as mesmas coordenadas nos nós dos lados adjacentes são tratados no trabalho de Day e Potts (1994).

### 3.2. Equações de equilíbrio

Para lograr um equilíbrio mecânico em um sistema, sua posição no espaço de configuração deve ser um ponto onde o gradiente de energia potencial seja zero. Para interfaces deformáveis devem-se satisfazer localmente as equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_{x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + b_{y} = 0$$
(3.15)

onde  $b_x$  e  $b_y$  são componentes das forças de corpo nas direções x e y, respectivamente. Na forma vetorial as equações de equilíbrio são:

$$\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

em que  $\nabla$  é um operador diferencial de primeira ordem definido como:

$$\nabla^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}$$
(3.17)

 $\sigma$  é o vetor das componentes das tensões definido como:

$$\{\sigma_{x} \quad \sigma_{y} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yx}\}^{T}$$
(3.18)

e b representa o vetor de forças de corpo definido como:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{\mathrm{x}} & \mathbf{b}_{\mathrm{y}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(3.19)

Ao satisfazer as equações de equilíbrio em todo o corpo juntamente com as condições de contorno, podem-se determinar as tensões, deformações e deslocamentos dentro do corpo. Para a aproximação das equações diferenciais este trabalho utiliza o método dos resíduos ponderados. O processo de minimização do resíduo usado pelo método dos resíduos ponderados consiste da seguinte equação integral.

$$\mathbf{W} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \left( \nabla^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \right) d\mathbf{V} = 0$$
(3.20)

onde dV é o domínio da integração e w é o vetor das funções de ponderação do erro com componentes nas direções x e y, o qual é definido como:

$$\mathbf{w} = \left\{ \mathbf{w}_{x} \quad \mathbf{w}_{y} \right\}^{\mathrm{T}}$$
(3.21)

Integrando por partes, usando o teorema de Green-Gauss, a Equação (3.20) pode ser escrita como:

$$\int_{V} w^{T} (\nabla w)^{T} \sigma dV - \int_{V} w^{T} b dV - \int_{S} w^{T} t dS + \sum R_{c} \delta u = 0$$
(3.22)

em que t é o vetor de forças de superfície expresso como:

$$\mathbf{t} = \left\{ \mathbf{t}_{\mathrm{x}} \quad \mathbf{t}_{\mathrm{y}} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{3.23}$$

Rc são as forças externas concentradas e  $\delta u$  vetor de deslocamentos de ponderação. As forças de superfície devem satisfazer as seguintes condições de equilíbrio na fronteira

$$t_{x} = n_{x}\sigma_{x} + n_{y}\tau_{xy}$$
  

$$t_{y} = n_{y}\tau_{xy} + n_{y}\sigma_{y}$$
(3.24)

em que  $n_x$  e  $n_y$  são os cossenos diretores do vetor normal à superfície.

Uma aproximação da Equação (3.22) pode ser obtida através do método dos elementos finitos. O método subdivide o domínio da integração em vários subdomínios conhecidos como elementos finitos, para os quais, as aproximações das variáveis dependentes podem ser feitas por meio de um número de pontos de controle e funções de interpolação simples, Soares (2005). Considerando que o domínio é dividido em m elementos a equação 3.22 pode ser escrita como:

$$\int_{V} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathbf{V} - \int_{S} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{t} \, d\mathbf{S} - \int_{V} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{b} \, d\mathbf{V} - \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \tag{3.25}$$

em que u é o vetor com os deslocamentos nodais, K é a matriz de rigidez que será apresentada adiante e N é a matriz de interpolação que contem as funções de interpolação expressa como:

$$\overline{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n} \end{bmatrix}$$
(3.26)

em que n denota o vetor com as funções de interpolação,  $n = \{N_1 \ N_2 \cdots N_{m'^2}\}^T$ 

Para um elemento com m nós o campo de deslocamentos para qualquer ponto interno pode ser expresso como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{u} \tag{3.27}$$

onde u es o vetor de deslocamentos nodais e U é o vetor de deslocamentos contínuos com componentes na direção das coordenadas s e n. Este vetor pode ser definido como:

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{U}_{s}^{\text{bot}} \quad \mathbf{U}_{n}^{\text{top}} \quad \mathbf{U}_{s}^{\text{top}} \quad \mathbf{U}_{n}^{\text{top}} \right\}$$
(3.28)

Os sobrescritos bot e top indicam o topo e a base do elemento. As deformações internas podem ser calculadas como:

$$\varepsilon = Bu$$
 (3.29)

onde B é a matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais e depende do tipo de elemento de interface (Taylor e Brekke, 1967; Wilson e Isenberg, 1973; Pande e Sharma, 1979; Lightner e Siriwardane, 1984; Beer, 1985; Day & Potts, 1994).

A solução da Equação (3.25) não é trivial e às vezes se torna possível dependendo da geometria, tipo de carregamento e condições de contorno. Estas equações, as quais governam o comportamento de cada elemento finito, são aplicáveis para qualquer relação constitutiva e podem ser reescritas na forma do método dos elementos finitos como:

$$F_{int} = F_{ext} \tag{3.30}$$

onde  $F_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas correspondente ao estado de tensão  $\sigma$  de um elemento dado, definido como:

$$F_{int} = \int_{V} B^{T} \sigma \, dV \tag{3.31}$$

 $F_{ext}$  é o vetor de forças externas de um elemento calculado por três parcelas:

$$F_{ext} = F_s + F_b + F_\delta$$
(3.32)

em que  $F_s$  é o vetor de forças de superfície de um elemento que pode ser escrito como:

$$F_{s} = \int_{S} N^{T} t \, dS \tag{3.33}$$

F<sub>b</sub> é o vetor de força devido ao peso próprio de um elemento definido como:

$$F_{b} = \int_{V} N^{T} b \, dV \tag{3.34}$$

e  $F_{\delta}$ é o vetor devido aos deslocamentos prescritos não nulos

A Equação de equilíbrio (3.30) resulta em um sistema de equações não lineares devido à não linearidade da parcela da força interna. Na literatura encontram-se diversas metodologias para resolver problemas não lineares. Dentre as tantas metodologias, uma é desenvolver de forma incremental a Equação (3.30) pelo método da derivação com respeito ao tempo t. Usando a regra da cadeia na Equação (3.30), pode-se obter:

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t}$$
(3.35)

onde  $\frac{dF_{int}}{du}$  é a matriz Jacobiana definida como:

$$\frac{dF_{int}}{du} = \begin{bmatrix} \frac{dF_{int}^{1}}{du_{1}} & \frac{dF_{int}^{1}}{du_{2}} & \cdots & \frac{dF_{int}^{1}}{du_{n}} \\ \frac{dF_{int}^{2}}{du_{1}} & \frac{dF_{int}^{2}}{du_{2}} & \cdots & \frac{dF_{int}^{2}}{du_{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dF_{int}^{n}}{du_{1}} & \frac{dF_{int}^{n}}{du_{2}} & \cdots & \frac{dF_{int}^{n}}{du_{n}} \end{bmatrix}$$
(3.36)

Derivando-se pela regra da cadeia a Equação (3.31) tem-se:

$$\frac{dF_{int}}{du} = \int_{V} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \frac{d\sigma}{du} dV = \int_{V} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{du} dV$$
(3.37)

Se os termos que envolvem a segunda derivada da função de plastificação com respeito às tensões forem desprezados, a relação da derivada das tensões com respeito às deformações pode ser expressa como:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = D_{t}$$
(3.38)

onde  $D_t$  é a matriz constitutiva tangencial do elemento que depende do modelo constitutivo adotado para representar a relação tensão-deformação.

Similarmente, pode-se obter a matriz cinemática B da relação da derivada das deformações com respeito aos deslocamentos nodais, para o qual se tem:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}u} = \mathrm{B} \tag{3.39}$$

Substituindo a Equação (3.39) e a Equação (3.38) na Equação (3.37), temse que:

$$\frac{dF_{int}}{du} = \int_{V} B^{T} D_{t} B \, dV = K_{t}$$
(3.40)

onde  $K_t$  é a matriz de rigidez tangente do elemento que depende da matriz constitutiva tangente  $D_t$  a qual é avaliada em função do estado de tensão,  $\sigma$ , no início do incremento em cada elemento.

Substituindo a Equação (3.40) na Equação (3.35), tem-se:

$$K_{t} \frac{du}{dt} = \frac{dF_{ext}}{dt}$$
(3.41)

Finalmente, multiplicando a Equação (3.41) pela inversa da matriz de rigidez tangente do elemento, tem-se:

$$\Delta u = K_t^{-1} \Delta F_{ext} \tag{3.42}$$

onde a Equação (3.42) define o sistema diferencial que governa o comportamento carregamento-deformação de um elemento. Esta contribuição do elemento é adicionada junto ao sistema de equações diferenciais expresso a seguir:

$$\Delta u_{\rm G} = K_{\rm Gt}^{-1} \Delta F_{\rm Gext} \tag{3.43}$$

onde  $K_{GT}$ é a matriz de rigidez global definida por:

$$K_{Gt} = \sum_{\text{elementos}} K_{t} = \sum_{\text{elementos}} \int_{V} B^{T} D_{t} B dV$$
(3.44)

e  $\Delta F_{Gext}$  é o vetor global de forças externas representado como:

$$\Delta F_{\text{Gext}} = \sum_{\text{elementos}} \dot{F}_{\text{ext}} = \sum_{\text{elementos}} \int_{V} N^{\text{T}} b \, dV + \sum_{\text{elementos}} \int_{S} N^{\text{T}} \Delta t \, dS + \sum_{\text{elementos}} - K \Delta u$$
(3.45)

A relação descrita na Equação (3.43) define de forma incremental o comportamento global carregamento-deslocamento de um modelo desenvolvido em elementos finitos.

# 3.3. Principio de tensões efetivas

O principio de tensões efetivas pressupõe que o vetor das tensões totais  $\sigma$  compreende a soma do vetor das tensões efetivas,  $\sigma'$  e a poropressão, p como segue:

 $\sigma = \sigma' + m p \tag{3.46}$ 

onde m é o vetor equivalente ao delta de Kronecker, o qual segundo Zhong-Zhi et al. (2011), no elemento de interface pode ser representado como  $m\{0 \ 1\}^{T}$ .

Segundo Abbo (2005), em análises geotécnicas é convencional decompor a poropressão total em componentes de um estado estacionário,  $p_s$  e um excesso da poropressão variando no tempo, como segue:

$$p = p_s + p_e \tag{3.47}$$

Os incrementos poropressão  $\Delta p$  podem ser representados adequadamente como:

$$\Delta p = N_p \ \Delta P \tag{3.48}$$

onde  $\Delta P$  é o vetor que contém os incrementos de poropressão nodal e pode ser escrito como:

$$\Delta \mathbf{P} = \left\{ \Delta \mathbf{P}_1 \quad \Delta \mathbf{P}_2 \cdots \Delta \mathbf{P}_n \right\}^{\mathrm{T}}$$
(3.49)

e  $N_p$  é o vetor das funções de forma dos graus de liberdade da poropressão a qual pode ser definido a seguir:

$$\mathbf{N}_{p} = \left\{ \mathbf{N}_{p1} \quad \mathbf{N}_{p2} \cdots \mathbf{N}_{pn} \right\}^{\mathrm{T}}$$
(3.50)

O subscrito n denota o numero de nós com graus de liberdade de poropressão, os quais não necessariamente são os mesmos dos deslocamentos. Usualmente a ordem do polinômio dos incrementos de poropressão é menor que os incrementos dos deslocamentos (Abbo, 2005).

Usando o processo puramente incremental na Equação (3.22) e substituindo-se a Equação (3.46), tem-se:

$$\int_{V} (\nabla w)^{T} (\Delta \sigma' + m\Delta p) dV - \int_{V} w^{T} \Delta b dV - \int_{V} w^{T} \Delta t dS + \sum R_{c} \delta u = 0$$
(3.51)

Utilizando a metodologia de resíduos ponderados e o esquema de Galerkin (1915), tem-se:

$$\int_{V} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \Delta \sigma' \, \mathrm{dV} + \int_{V} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \, \Delta p \, \mathrm{dV} - \int_{V} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \Delta b \, \mathrm{dV} - \int_{V} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \Delta t \, \mathrm{dS} - \mathbf{K} \mathbf{u} = 0$$
(3.52)

Os incrementos de tensões efetivas estão relacionados aos incrementos de deformações através da matriz tangente elastoplástica, como segue:

$$\Delta \sigma' = \mathbf{D}_{ep} \Delta \varepsilon \tag{3.53}$$

~

onde  $D_{ep}$ , é a matriz elastoplástica definida adiante. As tensões efetivas podem ser calculadas em relação aos incrementos de deslocamentos nodais, como segue:

$$\Delta \sigma' = D_{ep} B \Delta u \tag{3.54}$$

onde  $\Delta u$  é o vetor de incrementos dos deslocamentos nodais e B é a matriz que relaciona os incrementos de deslocamentos nodais com os incrementos de deformação. Substituindo as Equações (3.54) e (3.48) na Equação (3.52), e desprezando a forças de corpo e forças de superfície, resulta em:

$$K\Delta a + L\Delta p = \Delta F_{ext} \tag{3.55}$$

onde K é a matriz de rigidez do elemento definida como:

$$K = \int_{V} B^{T} D_{ep} B dV$$
(3.56)

L é a matriz de acoplamento definida como:

$$L = \int_{V} B^{T} N_{p} dV$$
 (3.57)

# 3.4. Formulação numérica do elemento de interface

Neste trabalho optou-se pela implementação do elemento de interface de Goodman et.al (1967) e Day & Potts (1994), sendo este o mais utilizado na literatura (Nacht et al., 2010; Ng & Small, 1996; Turon et al., 2004; Burak, 2009, Costa, 1984) e talvez o mais adequado para a representação da falha. São implementados quatro tipos de elementos de interface necessários para a representação do plano de falha no reservatório. As caraterísticas de cada tipo de elemento são apresentadas no Quadro 3.1 apresentado a seguir:



Quadro 3.1 – Tipos de elementos de interface implementados.

Os graus de liberdade deste trabalho seguem a nomenclatura apresentada por (Abaqus *documentation*, 2011) onde 1,2 são os graus de liberdade dos deslocamentos nas componentes x e y respectivamente e 8 é o grau de liberdade da poropressão. Os elementos tipo 1 e tipo 2 possuem 4 nós com interpolação linear. O elemento tipo 1 tem os graus de liberdade 1,2. O elemento tipo 2 tem os graus de liberdade 1,2 e 8. Os elementos tipo 3 e 4 são elementos que possuem 6 nós com interpolação quadrática. O elemento tipo 3 tem os graus de liberdade 1,2. O elemento so graus de liberdade 1,2 e 8 para os nós das arestas e 1,2 nos nós intermediários.

Os elementos tipo 2 e 4 são utilizados no plano de falha que encontra-se adjacente ao reservatório e os elementos tipos 1 e 3 são utilizados no plano de falha fora do reservatório. As hipóteses adotadas para a formulação do elemento de interface são baseadas no trabalho de Mendes et al. (2010), a saber:

 Quando a injeção no reservatório inicia, a extensão da falha dentro do reservatório é considerada ter a mesma poropressão que seus arredores.

 Com o aumento da poropressão, as tensões cisalhantes aumentam e as tensões normais efetivas diminuem sobre a falha. Como consequência, a falha pode reativar e o fluido pode migrar do reservatório para a falha. Neste caso, a pressão interna do fluido da extensão da falha reativada assume a mesma poropressão atuante no reservatório para ao qual a falha está conectada.

 Como a injeção continua e a poropressão aumenta, a extensão da falha fora do reservatório pode também reativar até que as tensões normais diminuam até zero, causando abertura da falha e levando à fratura hidráulica.

Neste capitulo apenas será apresentada a formulação do elemento de interface de 6 nós tipo 3, conforme ilustrado na Figura 3.5, onde ξ representa o sistema local adimensional de coordenadas. Geometricamente assume-se uma espessura nula para evitar problemas de compatibilidade na geração da malha, mas a espessura será levada em conta para o calculo da rigidez do elemento de interface. As tensões e deformações se assumem uniformes ao longo do elemento. As funções de forma não são iguais a um elemento quadrático comum devido à espessura nula do elemento. Portanto, as correspondentes funções de forma são mostradas nesta secção. Os pontos vermelhos representam os pontos de integração e a numeração nodal foi feita pensando na incorporação ao programa Abaqus® através da inclusão de novos elementos e novos modelos constitutivos.



Figura 3.5 – Detalhe do elemento de interface tipo 3 de 6 nós

Para o elemento tipo 3 de 6 nós, com respeito ao sistema global de coordenadas, o vetor de deslocamentos nodais é escrito como:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \left\{ u_{x}^{1}, u_{y}^{1}, u_{x}^{2}, u_{y}^{2}, u_{x}^{3}, u_{y}^{3}, u_{x}^{4}, u_{y}^{4}, u_{x}^{5}, u_{y}^{5}, u_{x}^{6}, u_{y}^{6} \right\}$$
(3.58)

Os deslocamentos contínuos do elemento são expressos como:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \left\{ \mathbf{U}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{base}}, \, \mathbf{U}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{base}}, \, \mathbf{U}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{topo}}, \, \, \mathbf{U}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{topo}} \right\}$$
(3.59)

onde topo e base denotam o lado superior e inferior respectivamente.

Os deslocamentos contínuos e os deslocamentos nodais são relacionados através da Matriz de interpolação N

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{u} \tag{3.60}$$

As deformações podem ser definidas como os deslocamentos relativos entre o topo e a base

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{x} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{y} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{U}_{x}^{\text{topo}} - \boldsymbol{U}_{x}^{\text{base}} \\ \boldsymbol{U}_{y}^{\text{topo}} - \boldsymbol{U}_{y}^{\text{base}} \end{cases}$$
(3.61)

ou ainda em função dos deslocamentos nodais

$$\begin{cases} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \end{cases} = \begin{cases} N_{1} \left( u_{x}^{4} - u_{x}^{1} \right) + N_{2} \left( u_{x}^{3} - a_{x}^{2} \right) + N_{3} \left( u_{x}^{6} - u_{x}^{5} \right) \\ N_{1} \left( u_{y}^{4} - u_{y}^{1} \right) + N_{2} \left( u_{y}^{3} - u_{y}^{2} \right) + N_{3} \left( u_{y}^{6} - u_{y}^{5} \right) \end{cases}$$
(3.62)

onde  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  são as funções de interpolação expressas como:

$$N_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \tag{3.63}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)$$
(3.64)

$$N_3 = 1 - \xi^2$$
 (3.65)

sendo  $N_1$  e  $N_2$  as funções de interpolação correspondentes aos nós extremos e  $N_3$  a correspondente ao nó intermediário.

Finalmente, se obtém a matriz B que relaciona as deformações no sistema local de coordenadas aos deslocamentos nodais do sistema global de coordenadas.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{s} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n} \end{cases} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$
 (3.66)

Na expressão acima os índices  $s \in n$  denotam as componentes cisalhantes e normais respectivamente e a matriz B pode ser representada como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$
(3.67)

em que MT é a matriz de transformação que pode ser expressa como:

$$MT = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
(3.68)

As expressões trigonométricas  $sen\theta e cos\theta$  podem ser calculadas pelas derivadas das coordenadas globais com respeito às coordenadas locais, como ilustrado na Figura 3.6.



Figura 3.6 - Transformação de coordenadas

sendo:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} x_2 + \frac{dN_3}{d\xi} x_5$$
(3.69)

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} y_1 + \frac{dN_2}{d\xi} y_2 + \frac{dN_3}{d\xi} y_5$$
(3.70)

As funções trigonométricas  $sen\theta e \cos\theta$  podem ser expressas como:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\left|J\right|}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}$$
(3.71)

$$\cos\theta = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}} \tag{3.72}$$

onde |J| é o determinante do jacobiano definido como:

$$\left|\mathbf{J}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{y}}{d\xi}\right)^2} \tag{3.73}$$

As tensões efetivas normais  $\sigma_n$ , e cisalhantes  $\tau_s$ , são calculadas através da matriz constitutiva  $D_t$ , do elemento, como segue:

$$\begin{cases} \tau_{s} \\ \sigma_{n} \end{cases} = D_{t} \begin{cases} \varepsilon_{s} \\ \varepsilon_{n} \end{cases}$$
 (3.74)

### onde $D_{t}\,\acute{e}$ a matriz constitutiva do elemento de interface

A matriz de rigidez  $K_t$  que relaciona os deslocamentos nodais com respeito ao vetor de forças nodais ao nível do elemento pode ser representada como:

$$\mathbf{K}_{t} = \int_{-1}^{1} \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{t} \mathbf{B} \mathrm{det} \mathbf{J}}_{\mathbf{G}(\xi_{i})} \mathrm{d}\xi$$
(3.75)

e o vetor de força interna do elemento pode ser escrito como:

$$F_{int} = \int_{-1}^{1} \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \sigma \det \mathbf{J}}_{\mathbf{H}(\xi_{i})} \mathbf{d}\xi$$
(3.76)

Utiliza-se a regra de Simpson para a integração numérica, segundo Zienkewich & Taylor (2000):

$$K_{t} = \sum_{i=1}^{np} w_{\xi i} G(\xi_{i})$$
(3.77)

$$F_{int} = \sum_{i=1}^{np} w_{\xi i} H(\xi_i)$$
(3.78)

Nas expressões acima  $\xi_i$  são as coordenadas dos pontos de integração;  $W_{\xi i}$  são os pesos respectivos aos pontos de integração e as funções  $G(\xi_i)$  e  $H(\xi_i)$  são o arranjo de parâmetros que depende de  $\xi$ . A qualidade dos resultados depende de forma direta dos pontos de integração escolhidos. Em elementos sólidos, normalmente é utilizado o esquema de integração de Gauss. No entanto, nos elementos de interface em certas condições a integração de Gauss produz oscilações espúrias que podem ser evitadas usando o método de integração de Newton cotes (Turona, 2007; Schellekens, 1992). Por essa razão, nesta dissertação optou-se por utilizar 3 pontos de integração de Newton Cotes para os elementos de interface, conforme a Figura 3.5. O fator de ponderação de cada um deles se apresenta no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 – fatores de ponderação dos pontos de Newton Cotes do elemento de Interface

Ponto	Coordenada Natural	Fator de ponderação
Ponto 1	-1.00	1/3
Ponto 2	0.00	1 + 1/3
Ponto 3	1.00	1/3

O uso de elementos de interface no simulador Abaqus é limitado uma vez que sua extensa biblioteca não contém este tipo de elemento. No entanto, o Abaqus é uma ferramenta versátil e permite a integração de sub-rotinas desenvolvidas pelo usuário. A sub-rotina UEL do Abaqus permite criar qualquer tipo de elemento, não obstante, este recurso é destinado apenas para usuários avançados e seu uso nos exemplos mais simples exige considerável codificação pelo usuário / desenvolvedor (Abaqus *documentation*, 2011). No capítulo 4 serão descritos com mais detalhe estes recursos de sub-rotinas desenvolvidas pelo usuário, que representaram uma parte importante no desenvolvimento desta dissertação.

# 3.5. Equações constitutivas

As equações constitutivas são de grande relevância na solução de problemas geotécnicos, já que são utilizadas para representar de forma ideal o

comportamento tensão-deformação dos materiais em geral. Estas equações devem levar em conta caraterísticas tais como: não linearidade, plasticidade e dilatância.

Nas leis constitutivas que relacionam as tensões com deformações é necessário o conhecimento da matriz constitutiva elastoplástica que determine o estado de tensões atualizado e corrigido. Para a determinação da matriz elastoplástica é utilizada a lei de plastificação do material formando uma superfície em três dimensões no espaço de tensões principais. O estado de tensões que se encontra dentro da superfície de plastificação é considerado como elástico e o estado de tensões que se encontra sobre a superfície de plastificação é considerado plástico. Para materiais elasto-plásticos a superfície de plastificação é representada por uma função de plastificação do tipo  $f(\sigma, k)$ , onde  $\sigma$  é o vetor de tensões atualizado e k é o parâmetro de endurecimento definido em função de alguma medida de deformação plástica a partir de dados ou observações experimentais. Se  $f(\sigma, k) < 0$ , o estado de tensão se encontra dentro da superfície de plastificação se plastificação tendo um comportamento elástico, como segue:

$$\sigma = D_e \varepsilon \tag{3.79}$$

Onde  $D_e$  é a matriz elástica tensão-deformação,  $\sigma$  é o vetor das componentes de tensão e  $\epsilon$  é o vetor das componentes de deformação.

Quando a função de plastificação se iguala à zero,  $f(\sigma, k) = 0$ , as tensões permanecem sobre a superfície de plastificação e ocorre o fluxo plástico. Assim sendo, durante o fluxo plástico tem-se que:

$$\dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{d\sigma}\right)^{\mathrm{T}} \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$
(3.80)

Onde  $\frac{\partial f}{d\sigma}$  é o gradiente da função de plastificação,  $\dot{\sigma}$  é o vetor da variação infinitesimal das tensões e  $\dot{k}$  é a variação infinitesimal do endurecimento.

Neste ponto, a variação infinitesimal das deformações totais,  $\dot{\epsilon}$ , pode ser expressa como a soma de duas parcelas, uma linear elástica,  $\dot{\epsilon}^{e}$ , e outra plástica,  $\dot{\epsilon}^{p}$ .

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \tag{3.81}$$

A parcela plástica da variação infinitesimal de deformação,  $\dot{\epsilon}^{p}$ , é obtida através da lei que governa o fluxo plástico, Lei de fluxo, a qual pode ser representada como:

$$\dot{\varepsilon}^{\rm p} = \Delta \gamma \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \Delta \gamma h; \, \Delta \gamma \ge 0 \tag{3.82}$$

onde g é o potencial plástico,  $\Delta \gamma$  é um parâmetro plástico, sendo uma constante positiva que define a magnitude da variação infinitesimal da deformação plástica e h é o gradiente ao potencial plástico. Quando a função potencial plástico é adotada como a própria função de plastificação, é dito que se tem uma plasticidade associada, ou que se tem uma lei de fluxo associada.

Derivando a Equação (3.79) e substituindo na Equação (3.81) e Equação (3.82), tem-se:

$$\dot{\sigma} = D_e \dot{\varepsilon} - \Delta \gamma D_e h \tag{3.83}$$

Inserindo a Equação (3.83) na Equação (3.80), o multiplicador plástico pode ser representado como:

$$\Delta \gamma = \frac{\alpha^{\mathrm{T}} \mathrm{D}_{\mathrm{e}} \dot{\epsilon}}{\mathrm{A} + \alpha^{\mathrm{T}} \mathrm{D}_{\mathrm{e}} \mathrm{h}}$$
(3.84)

onde o parâmetro  $\alpha^{T}$  é definido como:

$$\alpha^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{d\sigma}\right)^{\mathrm{T}}$$
(3.85)

e o parâmetro A é escrito como:

$$A = \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\dot{k}}{\Delta \gamma}$$
(3.86)

Substituindo a expressão  $\Delta \gamma$  da Equação (3.84) na Equação (3.83), chega-se à seguinte equação:

$$\dot{\sigma} = D_{ev} \dot{\varepsilon} \tag{3.87}$$

onde

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_{e} - \frac{\mathbf{D}_{e} - \mathbf{h}\alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{e}}{\mathbf{A} + \alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{e}\mathbf{h}}$$
(3.88)

 $D_{ep}$  é a matriz constitutiva tangente continua, ou matriz constitutiva elastoplástica, constituída por duas parcelas: uma parcela elástica  $D_e$  e outra parcela plástica  $D_p$  representada como:

$$D_{p} = \frac{D_{e} - h\alpha^{T}D_{e}}{A + \alpha^{T}D_{e}h}$$
(3.89)

Desta maneira a Equação (3.89) pode ser representada de uma forma mais compacta como:

$$\mathbf{D}_{\rm ep} = \mathbf{D}_{\rm e} - \mathbf{D}_{\rm p} \tag{3.90}$$

As funções f e g e suas derivadas usadas na formulação anterior do problema elasto-plástico são dependentes do modelo constitutivo e devem ser contínuas e diferenciáveis para todo ponto no espaço das tensões (Noreña 2010). O parâmetro A, depende do tipo de endurecimento que é adotado, conforme ilustrado na Figura 3.7.



Figura 3.7- Comportamento elástico-plástico com endurecimento

Quando a superfície de plastificação permanece constante com respeito ao histórico das tensões, o comportamento do material é considerado elástico perfeitamente plástico. Neste caso a tensão do material não pode exceder em valor absoluto o valor da tensão de plastificação, portanto k permanece constante no tempo. Neste caso a equação (3.90) pode ser redefinida como:

$$\dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{d\sigma}\right)^{\mathrm{T}} \dot{\sigma} = \mathbf{0} \tag{3.91}$$

Consequentemente A = 0 e a matriz elastoplástica torna-se:

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e - h\alpha^T D_e}{\alpha^T D_e h}$$
(3.92)

Considerando fluxo associado, ou seja,  $\alpha = h$ , a matriz elastoplástica pode ser escrita como:

$$D_{ep} = D_{e} - \frac{D_{e} - \alpha \alpha^{T} D_{e}}{\alpha^{T} D_{e} \alpha}$$
(3.93)

### 3.6. Modelos constitutivos

Quando a solução dos problemas de engenharia geotécnica faz uso de análises como elementos finitos, é necessária a escolha do modelo constitutivo do material. O comportamento do material depende de uma série de variáveis e fatores, tais como as condições iniciais, densidade, saturação, estrutura etc. Portanto, é de grande relevância a escolha do modelo constitutivo que melhor represente o comportamento real da falha levando em conta o maior número possível de variáveis e fatores condicionantes.

### 3.6.1. Modelo linear elástico

O modelo linear elástico da falha adota a lei de Hooke que define uma relação linear tensão-deformação onde os incrementos de tensão e deformação são avaliados através de uma matriz constitutiva elástica D<sub>e</sub> simétrica, a qual pode ser representada como:

$$\mathbf{D}_{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{n} \end{bmatrix}$$
(3.94)

onde  $k_s$  e  $k_n$  são os coeficientes de rigidez fornecidos em função da espessura considerada para falhas geológicas:

O coeficiente de rigidez normal é definido por:

$$k_n = \frac{E}{t}$$
(3.95)

onde t é a espessura de influência da falha geológica e E é o módulo de Young da rocha hospedeira da falha geológica

O coeficiente de rigidez tangencial é fornecido por:

$$k_s = \frac{G}{t}$$
(3.96)

em que G é o módulo cisalhante da rocha hospedeira da falha geológica, sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.97}$$

# 3.6.2. Modelo Constitutivo de Mohr-Coulomb com límite de resistência à tração

Como visto no capitulo anterior o deslizamento e a reativação de falhas é governada pelo critério de Mohr-Coulomb, sendo este critério adequado para uma boa representação do comportamento das rochas na plastificação, segundo Vermeer & Borst (1984). Neste trabalho foi adotado este mesmo modelo constitutivo de Mohr-Coulomb com limite de resistência à tração, aplicável a solos e rochas o qual propõe uma envoltória de resistência como função do ângulo de atrito e a coesão do material. O critério de falha de Mohr-Coulomb assume que a tensão cisalhante alcança o valor limite expressa em termos da tensão normal, como segue:

$$\tau = c - \sigma'_n \tan \phi \tag{3.98}$$

Nesta expressão,  $\tau$  é a tensão de cisalhamento no plano de ruptura;  $\sigma'_n$  é a tensão efetiva normal à superfície (compressão negativa); c é a coesão do material;  $\phi$  é o angulo de atrito.

O modelo constitutivo de Mohr-Coulomb é um modelo elásticoplástico perfeito desenvolvido a partir da composição da lei de Hooke com a forma geral do critério de ruptura de Mohr-Coulomb, onde a envoltória de resistência no plano cartesiano  $\tau - \sigma'_n$  é representada por uma função linear, como ilustrado na Figura 3.8.



Figura 3.8 – Envoltória de ruptura de Mohr-Coulomb (adaptado de Souza Neto, 2007)

Para avaliar se ocorre plastificação em uma análise específica o modelo de Mohr-Coulomb adota uma função de plastificação a qual define uma fronteira entre o comportamento elástico e o comportamento plástico do material. Este critério de plastificação é definido a partir da função formulada em termos de tensões efetivas, Smith & Griffith (1999).

$$f = \tau + \sigma'_n \tan \phi - c \tag{3.99}$$

Potts (2002) afirma que se a interface se desloca de tal forma que a tensão de tração normal máxima excede ( $c/tan\phi$ ), a interface consequentemente abre e a tração residual é redistribuída através de algoritmos de solução não lineares. Não obstante, Michal (2009) afirma que na realidade o solo ou rocha pode resistir a valores muito pequenos deste tipo de tensão de tração. Segundo Michal (2009), é aconselhável evitar as tensões de tração ou limitar sua magnitude por um valor específico,  $R_t$ , através de uma superfície adicional de corte, representada na forma:

$$f_n = \sigma'_n - R_t$$
 (3.100)

Em que  $R_t$  é a resistência à tração da falha,  $\sigma'_n$  é a tensão normal e  $f_n$  é a função de corte *("tension cutoff")*.

### 3.6.3. Integração numérica de tensões

A dedução da matriz tangente elastoplástica,  $D_{ep}$ , é baseada nas equações constitutivas já apresentadas anteriormente. O problema na determinação dos incrementos de tensão dado um incremento de deformação de acordo com a relação constitutiva:

$$\Delta \sigma = D_{ep} \Delta \varepsilon \tag{3.101}$$

deve-se a que o estado de tensão final não é conhecido, logo, não é possível determinar a situação de carregamento ou descarregamento. Uma solução para este tipo de problema é o uso de tensões preditoras elásticas,  $\sigma_{trial}$ , calculadas pela soma das tensões atuantes com o incremento de tensão preditor elástico  $\Delta \sigma_{trial}$ , como segue:

$$\sigma_{\text{trial}} = \sigma + \Delta \sigma_{\text{trial}} \tag{3.102}$$

O incremento de tensão preditor elástico pode ser calculado através da Equação (3.67)

$$\Delta \sigma_{\text{trial}} = D_e : \Delta \epsilon \tag{3.103}$$

onde  $\Delta\epsilon$  é o incremento de deformação total e  $D_e$  é a matriz constitutiva elástica

Pedroso (2002) afirma que a plasticidade computacional busca elaborar algoritmos precisos e eficientes para a relação constitutiva elastoplástica. Exemplos de algoritmos de integração das equações diferenciais são: método explícito, método implícito e método do ponto médio.

O método utilizado neste trabalho é o método de integração implícita (Backward Euler), já que usualmente são incondicionalmente estáveis (Ortiz & Popov, 1985). Mesquita (2005) afirma que o procedimento de integração implícito das tensões fornece precisão suficiente por si só. Este método implícito determina as tensões iterativamente e avalia as derivadas no final do intervalo do tempo. Além disso, a matriz tangente elastoplástica é consistente com o algoritmo de solução do sistema global preservando a característica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson (Simo et al., 1988).

O algoritmo é conhecido como projeção ao ponto mais próximo, já que dado um incremento arbitrário o algoritmo retorna em direção normal à superfície de plastificação através de um corretor plástico, como mostrado na Figura 3.9.



Figura 3.9 – interpretação do método de integração implícito

# 3.6.4. Algoritmo de integração

O algoritmo procura determinar os incrementos de tensão d $\sigma$  e o valor de plastificação d $\sigma^p$  que retorna o ponto definido pelo preditor elástico,  $\sigma_{trial}$ , à superfície de plastificação.

Dado um incremento de deformação  $\Delta \epsilon$ , pode ser assumida a seguinte hipótese:

$\varepsilon_{i+1}^{p \text{ trial}} = \varepsilon^p$	(3.104a
$5_{i+1} - 6$	(3.104

$$\varepsilon_{i\perp 1} = \varepsilon_i + \Delta \varepsilon \tag{3.104b}$$

$$\varepsilon_{i+1}^{e \text{ trial}} = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon^{p}$$
(3.104c)

$$\sigma_{i+1}^{\text{trial}} = D_e(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon^p)$$
(3.104d)

O índice subscrito i representa o instante para o qual todas as variáveis internas são conhecidas e o índice i+1, incremento subsequente para o qual se deseja determiná-las.

A condição de plastificação através da função de plastificação é testada para o estado preditor, como segue:

$$f_{i+1}^{\text{trial}}(\sigma_{i+1}^{\text{trial}}) \le 0$$
 (3.105)

Se as tensões obtidas com o preditor elástico não violarem a condição de plastificação, significa que a hipótese assumida é correta, logo, o estado de tensão em i+1 pode ser escrito como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{\text{trial}} \tag{3.106}$$

Por outro lado, se as tensões obtidas violarem a superfície de plastificação, o algoritmo retorna. Logo deve ser encontrado um novo estado de tensões que seja compatível com o modelo. Dessa forma tem-se:

$$\varepsilon_{i+1}^{p} = \varepsilon^{p} + \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$
(3.107)

$$\varepsilon_{i+1}^{e \text{ trial}} = \varepsilon_{i+1} - \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$
(3.108)

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{\text{trial}} - D_e \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$
(3.109)

Substituindo  $\sigma_{n+1}$  na superfície de plastificação, resulta em:

$$f_{i+1}\left(\sigma_{i+1}^{\text{trial}} - D_e \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right) = 0$$
(3.110)

Resolvendo a Equação 3.110 para o parâmetro plástico  $\Delta \gamma$ , podem ser atualizadas as equações (3.107), (3.108) e (3.109). Atualizadas as tensões pode-se calcular a matriz tangente elastoplástica consistente, como segue:

$$\mathbf{D}_{ep} = \frac{\partial \left(\sigma_{i+1}^{trial} - \mathbf{D}_{e} \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma}\right)}{\partial \left(\varepsilon_{i+1} - \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma}\right)}$$
(3.111)

O esquema de integração implícito considerando a teoria da plasticidade associada pode ser resumido como mostrado no Quadro 3.3.

Quadro 3.3– Esquema implícito de integração de tensão

Dados:  $\sigma_{i} e \Delta \epsilon$ cacular:  $\sigma_{i+1}^{trial}$ Verificar se:  $f_{i+1}^{trial}(\sigma_{i+1}^{trial}) \leq 0$ se (SIM): faça:  $\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{trial}$ se (NÃO): calcule:  $\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{trial} - D_e \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ Substituir:  $f_{i+1}(\sigma_{i+1}^{trial} - D_e \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}) = 0$ Resolver para:  $\Delta \gamma$ Atualizar:  $\sigma_{i+1}$ calcular:  $D_{ep}$ 

Para aumentar a precisão do algoritmo podem-se dividir os incrementos de deformação em subincrementos, Pedroso (2002)

### 3.6.5. Hipóteses adotadas para a formulação do algoritmo de integração

O algoritmo de integração implícita desenvolvido nesta dissertação é aplicado ao modelo de Mohr-Coulomb com "cut-off" (Equação 3.99 e 3.100). Neste modelo são adotadas duas hipóteses com respeito à resposta da plastificação da falha quando reativa:

- 1. A resposta plástica está limitada somente pelo cisalhamento
- 2. A resposta plástica ocorre nas duas componentes cisalhante/normal.

A primeira hipótese é baseada dos trabalhos P. C. F. Ng et al. (1997), Michal (2009), Dos Reis (2006), onde o elemento de interface tem um comportamento dividido em: Sem deslizamento: o comportamento do material é elástico linear.

**Reativação:** a resistência ao cisalhamento é governada pelo critério de Mohr-Coulomb. Neste caso a tensão cisalhante atinge o valor da tensão de ruptura e a falha desliza provocando a plastificação apenas na componente cisalhante.

**Descarregamento:** a resistência ao cisalhamento é restaurada, se as tensões ao cisalhamento se encontram dentro da superfície de plastificação.

A segunda hipóteses se baseia no trabalho de Ng & Small., (1997) e Potts et al. (2002), onde o comportamento do elemento de interface é dividido em:

Sem deslizamento: o comportamento do material é elástico linear.

*Reativação:* a resistência ao cisalhamento é governada pelo critério de Mohr-Coulomb. Neste caso um novo estado de tensões que seja compatível com o modelo de Mohr-Coulomb é encontrado, o que provoca a plastificação na componente cisalhante e normal da falha.

**Descarregamento:** as resistências normal e cisalhante são restauradas, se o estado de tensão é compatível com o modelo de Mohr-Coulomb.

Um terceiro critério é necessário quando as tensões normais efetivas excedem a tensão máxima à tração. Neste caso o comportamento do elemento de interface é dividido em:

**Abertura:** o comportamento do material é elástico linear só para a deformação cisalhante. A tensão normal atinge o valor máximo à tração, a falha abre e perde sua resistência normal.

**Reativação e abertura:** a falha perde sua resistência na direção normal e na direção cisalhante.

**Recuperação:** caso se inverta o valor da tensão normal e o estado de tensões se encontre dentro da superfície de plastificação, restaura-se a rigidez normal e cisalhante.

# 3.6.5.1. Aplicação ao modelo de Mohr-Coulomb com "cut-off"

O algoritmo de integração desenvolvido é aplicado às duas formulações com respeito às hipóteses adotadas anteriormente

*Formulação 1:* Como mencionado anteriormente a resposta plástica na reativação está limitada apenas ao cisalhante. Neste caso a derivada da função de plastificação que avalia a reativação, f, (Equação 3.99), pode ser definida como:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{cases} 1\\ 0 \end{cases} \tag{3.112}$$

O método de projeção está representado na Figura 3.10 em que as áreas de cor azul, verde, rosa, indicam o tipo de critério de retorno para a resposta de plastificação. O esquema de integração implícito da seção 3.6.4 aplicado ao modelo de Mohr-Coulomb com limite de resistência à tração está detalhado no Quadro 3.4.



Figura 3.10 – Retorno vertical à Superfície de plastificação com a formulação 1 (adaptado de Michal, 2007)

Dados:  $\tau_{si}, \sigma_{ni}, \Delta \varepsilon_{si} e \Delta \varepsilon_{ni}$ • Calcular as tensões preditoras:  $\tau_{si+1}^{trial} = \tau_{si} + k_s \Delta \varepsilon_{si}; \quad \sigma_{ni+1}^{trial} = \sigma_{ni} + k_n \Delta \varepsilon_{ni}$ • Verificar se:  $\mathbf{f}_{i+1}^{\text{trial}} = \tau_{S\,i+1}^{\text{trial}} + \sigma_{n\,i+1}^{\text{trial}} \tan \phi - \mathbf{C} \le 0$ ;  $\mathbf{f}_{n\,i+1}^{\text{trial}} = \sigma_{n\,i+1}^{\text{trial}} - R_t \le 0$ \* se  $(f_{i+1}^{trial}(\tau_{S i+1}^{trial}) \le 0 \& f_{n_{i+1}}^{trial}(\sigma_{n_{i+1}}^{trial}) \le 0) \rightarrow Elástico$ Atualizar as tensões Matriz tangente do algoritmo  $\begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}$  $\boldsymbol{\tau}_{S\;i+l} = \boldsymbol{\tau}^{trial}_{S\;i+l}; \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n\;i+l} = \boldsymbol{\sigma}^{trial}_{n\;i+l};$ \* se  $(f_{i+1}^{trial}(\tau_{s_{i+1}}^{trial}) \ge 0 \& f_{n_{i+1}}^{trial}(\sigma_{n_{i+1}}^{trial}) \le 0) \rightarrow Apenas reativação$  $\tau_{\mathrm{S}\,i+1} = \tau_{\mathrm{S}\,i+1}^{\mathrm{trial}} - k_{\mathrm{s}}\Delta\gamma_{\mathrm{s}}\frac{\partial f_{i+1}^{\mathrm{trial}}}{\partial \tau_{\mathrm{s}\,i+1}^{\mathrm{trial}}};$ Avaliar  $f_{i+1}(\tau_{S i+1}) = 0$  e resolver para  $\Delta \gamma_s$ :  $\Delta \gamma_s = \frac{f_{i+1}^{\, trial}}{k}$ Atualizar as tensões  $\tau_{S i+1} = \tau_{S i+1}^{trial} - k_s \Delta \gamma_s \frac{\partial f_{i+1}^{trial}}{\partial \tau_{S i+1}^{trial}}; \quad \sigma_{n i+1} = \sigma_{n i+1}^{trial}$ Matriz tangente do algoritmo:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}$ \* se  $(f_{i+1}^{trial}(\tau_{Si+1}^{trial}) \le 0 \& f_{ni+1}^{trial}(\sigma_{ni+1}^{trial}) \ge 0) \rightarrow$  Apenas abertura Avaliar  $f_{n_{i+1}}(\sigma_{n_{i+1}}) = 0$  e resolver para  $\Delta \gamma_n$ :  $\Delta \gamma_{n} = \frac{f_{n_{i+1}}^{\ trial}}{k_{n}}$ Atualizar as tensões :  $\tau_{\text{S}i+1} = \tau_{\text{S}i+1}^{\text{trial}}; \quad \sigma_{\text{n}i+1} = \sigma_{\text{n}i+1}^{\text{trial}} - k_{\text{n}} \Delta \gamma \frac{\partial f_{\text{n}i+1}^{\text{trial}}}{\partial \sigma_{\text{s}i+1}^{\text{trial}}} = R_{\text{t}}$ Matriz tangente do algoritmo:  $\begin{vmatrix} \mathbf{k}_{\mathrm{s}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ \* se  $(f_{i+1}^{trial}(\tau_{Si+1}^{trial}) \ge 0 \& f_{ni+1}^{trial}(\sigma_{ni+1}^{trial}) \ge 0) \rightarrow \text{Reativação e abertura}$  $\tau_{\text{S}\,i+1} = \tau_{\text{S}\,i+1}^{\text{trial}} - k_s \Delta \gamma_s \frac{\partial f_{i+1}^{\text{trial}}}{\partial \tau_{\text{S}\,i+1}^{\text{trial}}}; \quad \sigma_{n\,i+1} = \sigma_{n\,i+1}^{\text{trial}} - k_n \Delta \gamma_n \frac{\partial f_{n\,i+1}^{\text{trial}}}{\partial \sigma_{n\,i+1}^{\text{trial}}};$ Avaliar  $f_{i+1}(\tau_{Si+1}) = 0$  &  $f_{ni+1}(\sigma_{ni+1}) = 0$  e resolver para  $\Delta \gamma_s, \Delta \gamma_n$ :  $\Delta \gamma_{s} = \frac{f_{i+1}^{\, trial}}{k_{s}}; \quad \Delta \gamma_{n} = \frac{f_{ni+1}^{\, trial}}{k_{n}}$ Atualizar as tensões : Matriz tangente do algoritmo 0 0  $\tau_{Si+1} = C - R_t \tan \varphi a \quad \sigma_{ni+1} = R_t$ 0 0

*Formulação 2:* Nesta formulação a resposta plástica ocorre nas duas componentes cisalhante/normal, logo, considerando a integração implícita, o retorno do estado de tensões é normal à superfície de plastificação. Neste caso a derivada da função de plastificação que avalia a reativação, f, (Equação 3.99), pode ser definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial(\tau,\sigma_n)} = \begin{cases} 1\\ \tan\phi \end{cases}$$
(3.113)

O método de projeção está representado na Figura 3.11 em que as áreas de cor azul, verde, rosa, indicam o tipo de critério de retorno para a resposta de plastificação. O esquema de integração implícito da seção 3.6.4 aplicado ao modelo de Mohr-Coulomb com limite de resistência à tração está detalhado no Quadro 3.5, onde as linhas indicam as mudanças com respeito ao Quadro 3.4.



Figura 3.11 – Retorno perpendicular à Superfície de plastificação com a formulação 2 (adaptado de Michal, 2007)

Quadro 3.5 – Esquema de integração de tensão com a formulação 2

