# 4 Métodos Sem Malha

Segundo Liu (2009), os métodos sem malha trabalham com um conjunto de nós distribuídos dentro de um domínio, assim como com conjuntos de nós distribuídos sobre suas fronteiras para representar, sem discretizar, o domínio do problema e seus contornos. Portanto, este é o principal motivo para adotar métodos sem malha nesta tese, eliminando a necessidade de uma malha pela construção da aproximação da função de campo inteiramente em termos dos pontos nodais, visto que nenhuma especificação da inter-relação nodal é, a priori, definida ou necessária.

Uma das referências pioneiras dos métodos sem malha é o Método dos Elementos Difusos (DEM - *Difuse Element Method*) proposto por Nayroles *et al.* (1992). O DEM é a generalização do método de elementos finitos no qual o procedimento de Galerkin é aplicado sem a necessidade de uma malha do domínio. Posteriormente, o DEM foi refinado e modificado por Belytschko *et al.* (1994), chamando-o de Garlekin sem malha (EFG - *Element Free Galerkin*). As modificações propostas para o método EFG conferiram um aumento na exatidão das respostas em comparação ao método de elementos difusos.

A seguir são descritas noções básicas da formulação de métodos sem malha empregando o método de mínimos quadrados móveis, desenvolvido por Lancaster e Salkaukas (1981), comumente usados para geração de funções de forma. No final do capítulo são apresentados alguns exemplos resolvidos a partir de uma implementação do método sem malha feita em Matlab®.

# 4.1. Princípio Básico dos Métodos Sem Malha

Na formulação de métodos sem malha, a função de campo u (i.e a componente de deslocamento) em um ponto arbitrário  $\mathbf{x}^{T} = (x, y, z)$ , pertencente ao domínio do problema, é interpolada utilizando os deslocamentos de pontos

nodais em um pequeno domínio local referente ao ponto x, chamado de domínio de suporte, i.e.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\mathbf{x}) \ u_i = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \ \mathbf{U}$$
(4.1)

com:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(4.2)

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & \phi_2(\mathbf{x}) & \cdots & \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$
(4.3)

onde *n* é o número de nós pertencentes ao domínio de **x**,  $u_i$  é a componente de deslocamento do *i*-ésimo nó do domínio de suporte, **U** é o vetor que contém todos os deslocamentos nodais,  $\phi_i$  é a função de forma do *i*-ésimo nó criada usando todos os nós de suporte, e  $\Phi$  é a matriz que coleta todas as funções de forma nodais calculadas.

De forma geral, procura-se representar a aproximação de uma função qualquer através de um conjunto de funções de forma com suporte compacto, influenciando apenas uma pequena porção do domínio do problema.

## 4.1.1. Conceito de Domínio de Suporte

O domínio de suporte de um ponto determina o número de nós que são usados localmente para aproximar o valor da função no ponto. Portanto, a sua escolha é fundamental para a obtenção de uma aproximação de forma eficiente e precisa.



Figura 4.1 Representação do domínio do problema  $\Omega$ . Em destaque, exemplos de domínios de suporte retangular  $\Omega_i$  e circular  $\Omega_j$  para os nós *i* e *j*.

Os domínios de suporte podem possuir tamanhos e formas diferentes, normalmente centrados no ponto de interesse para manter a uniformidade do domínio local. As formas mais utilizadas são circular e retangular, como mostrado na Fig. 4.1 para o caso bidimensional.

O conceito de domínio de suporte funciona bem se a densidade de nós no domínio do problema não varia significativamente. Neste trabalho, o conjunto de pontos detectados pelo algoritmo SIFT, que são utilizados como nós na formulação sem malha, apresentam uma distribuição não uniforme e a densidade dos nós pode variar de um ponto para outro. O uso de um domínio de suporte com base no ponto de interesse pode levar à seleção desequilibrada de nós na construção da função de forma. Para prevenir este tipo de problemas, o conceito de domínio de influência deve ser utilizado (Liu, 2005).

#### 4.1.2. Conceito de Domínio de Influência

O domínio de influência é definido como a região na qual o ponto nodal exerce sua influência no domínio do problema e contribui para a solução. Desta forma, entende-se por domínio de suporte para um ponto qualquer como a região formada pela união de todos os domínios de influência que atuam naquele ponto.



Figura 4.2 Exemplos de domínios de influência circulares no caso bidimensional.

A sobreposição dos domínios garante a conectividade entre nós. Isto é visualizado na Fig. 4.2, onde  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  são os raios dos domínios de influência que correspondem aos nós 1, 2 e 3, respectivamente. Nota-se que os domínios de influência dos nós 1 e 2 envolvem o ponto de avaliação **x**, portanto serão

utilizados na construção da função de forma em x. Cabe ressaltar que o nó 3 deste exemplo não tem influência no ponto x e, portanto, não é considerado.

Segundo Belytschko *et al.* (1994), a dimensão do domínio de influência para um determinado ponto nodal é calculada por:

$$dm_i = \alpha_s \cdot d_i \tag{4.4}$$

onde  $\alpha_s$  é uma constante de proporcionalidade e  $d_i$  é o raio de influência que determina o tamanho mínimo do domínio de influência.

Se os nós são uniformemente distribuídos,  $d_i$  é a distância máxima do menor conjunto de pontos que formam um polígono fechado ao redor do ponto de interesse. Caso contrário, se os nós estão não uniformemente distribuídos, o parâmetro  $d_i$  é determinado pela região de integração, de maneira que a dimensão do domínio de influência pode ser diferente de um nó para outro. Isso permite que alguns nós tenham mais influência do que outros, evitando assim uma distribuição nodal desequilibrada na construção da função de forma.

O valor de  $\alpha_s$  é escolhido antes do processamento. De acordo com a experiência computacional, valores de  $\alpha_s$  entre 2.0 e 4.0 levam a bons resultados (Liu, 2005). Por exemplo, um valor de  $\alpha_s$  igual a 2 indica um domínio de influência cujo raio é 2 vezes o valor do domínio pré-determinado.

### 4.2. Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis (MLS)

As aproximações por mínimos quadrados móveis são construídas a partir de três componentes:

- uma função peso de suporte compacto, associada a cada ponto,
- uma base polinomial, e
- um conjunto de coeficientes que dependem da posição.

Uma característica atraente da técnica de aproximação por mínimos quadrados móveis é que a continuidade da aproximação está fortemente relacionada à continuidade da função peso escolhida. De forma que, mesmo sendo a continuidade da base local menor que a da função peso, a aproximação resultante terá a continuidade da função peso. Seja  $u(\mathbf{x})$  uma função de uma variável de campo definida no domínio  $\Omega$ . A aproximação de  $u(\mathbf{x})$ , chamada de  $u^h(\mathbf{x})$ , pelo método dos mínimos quadrados móveis, é formada por um somatório de funções linearmente independentes no domínio do problema, tal que

$$u^{h}(\mathbf{x}) = \sum_{j}^{m} p_{j}(\mathbf{x}) a_{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x})$$
(4.5)

onde **P** é uma base polinomial completa de *m* termos,

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}) & p_2(\mathbf{x}) & \dots & p_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$
(4.6)

e *a* é o vetor dos coeficientes a serem estimados, e dependem da posição *x*:

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) & a_2(\mathbf{x}) & \dots & a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$
(4.7)

No exemplo da Fig. 4.3,  $u^h$  é a função aproximada para u construída a partir dos valores da função  $u_i$  nos pontos  $x_i$ .



Figura 4.3. Função de aproximação  $u^h$  e deslocamentos nodais  $u_i$  na aproximação MLS.

Pode-se definir o desvio existente entre a função u e a sua aproximação local  $u^h$  como o erro residual, tal que

$$e(\mathbf{x}) = u^n(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_i) \tag{4.8}$$

O método dos mínimos quadrados móveis define o funcional quadrático do erro residual como:

$$J = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left[ e_i(\mathbf{x}) \right]^2$$
(4.9)

onde n é o número de nós na vizinhança de  $\mathbf{x}$  e w é uma função de ponderação (ou função peso) que apenas assume valores não nulos dentro de seu suporte, afim de gerar uma aproximação local.

Neste ponto, nota-se a principal diferença dos métodos dos mínimos quadrados móveis com os métodos dos mínimos quadrados clássico. Os elementos do vetor de coeficientes da Eq. (4.7) dependem da posição  $\mathbf{x}$ , e a função de ponderação introduzida na Eq. (4.9) não é constante, pois depende das posições  $\mathbf{x} \in \mathbf{x}_{i}$ .

Desta forma, considerando as definições apresentadas anteriormente, tem-se

$$J = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) \left( u^{h}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_{i}) \right)^{2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) \left[ \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_{i} \right]^{2}$$
(4.10)

O critério utilizado para a determinação dos coeficientes do vetor a se baseia na minimização do funcional J por meio da sua derivada em relação aos coeficientes de a, i.e.

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \tag{4.11}$$

Obtém-se o conjunto de m equações resultante:

$$\frac{\partial J}{\partial a_{1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) 2 p_{1}(\mathbf{x}_{i}) \left[ \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_{i} \right] = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) 2 p_{2}(\mathbf{x}_{i}) \left[ \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_{i} \right] = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_{m}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) 2 p_{m}(\mathbf{x}_{i}) \left[ \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_{i} \right] = 0$$

$$(4.12)$$

Em notação vetorial, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) 2 \mathbf{P}(\mathbf{x}_{i}) \left[ \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_{i} \right] = 0$$
(4.13)

$$2\sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{i}) u_{i} = 0$$
(4.14)

Eliminando o fator constante e rearranjando a Eq. (4.14) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) u_i$$
(4.15)

ou escrito na forma simplificada

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U} \tag{4.16}$$

na qual as matrizes A e B são definidas como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i)$$
(4.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_1) & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_2) & \dots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$
(4.18)

Note-se que a matriz **A** é quadrada e tem dimensão  $(m \times m)$ , enquanto a matriz **B** tem dimensão  $(m \times n)$ , e os parâmetros nodais da função variável *u* são representados pelo vetor **U**:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{4.19}$$

A solução do sistema linear da Eq. (4.16) é única e dada por:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}$$
(4.20)

Finalmente, substituindo a Eq. (4.20) na Eq. (4.5), a aproximação por mínimos quadrados móveis da função *u* resulta em

$$u^{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}$$
$$= \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{m} p_{j}(\mathbf{x}) \Big[ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Big]_{ji} u_{i}$$
(4.21)

onde, comparando com a Eq. (4.1), definimos a função de forma  $\phi_i$  associada ao *i*-ésimo nó no ponto **x**:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) \left( \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{ji}$$
(4.22)

ou escrita de forma simplificada como

$$\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i \tag{4.23}$$

Para obter as derivadas a partir do deslocamento definido na Eq. (4.21), é necessário calcular a derivada da função de forma da Eq. (4.23). Segundo Belystschko *et al.* (1994), a derivada da função de forma pode ser calculada aplicando a regra do produto, tal que para o caso bidimensional tem-se:

$$\boldsymbol{\phi}_{i,x} = \mathbf{P}_{,x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \left( \mathbf{A}^{-1} \right)_{,x} \mathbf{B}_{i} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,x}$$
(4.24)

$$\phi_{i,y} = \mathbf{P}_{,y}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \left( \mathbf{A}^{-1} \right)_{,y} \mathbf{B}_{i} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,y}$$
(4.25)

onde o subscrito representa a derivada da função.

As equações anteriores envolvem o cálculo da derivada de  $(\mathbf{A}^{-1})$  em relação a *x* e *y*. Aplicando a derivação implícita à identidade  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ , as derivadas da inversa da matriz podem ser calculadas por:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{,x} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1}$$
(4.26)

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{,y} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,y} \mathbf{A}^{-1}$$
(4.27)

Desta forma, as derivadas espaciais das matrizes **A** e **B**, definidas na Eq. 4.17 e Eq. 4.18, respectivamente, são determinadas. Assim,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_{,x} = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i})_{,x} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i})$$
(4.28)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_{,y} = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i})_{,y} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{i}) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i})$$
(4.29)

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})_{,x} = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)_{,x} \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i)$$
(4.30)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})_{,y} = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)_{,y} \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i)$$
(4.31)

A Eq. (4.1) também pode ser utilizada de modo similar para a componente de deslocamento *v*, assim tem-se:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i}^{n} \phi_{i}(\mathbf{x}) v_{i}$$
(4.32)

Desse modo, o vetor de deslocamentos na superfície do material é definido:

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases}^{h} = \sum_{i}^{n} \begin{bmatrix} \phi_{i} & 0 \\ 0 & \phi_{i} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{i} \\ v_{i} \end{cases}$$
(4.33)

As deformações em um ponto qualquer do domínio podem ser calculadas em função dos deslocamentos do ponto, considerando pequenas deformações, tem-se:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{y} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{cases}^{h} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{cases}^{h} \tag{4.34}$$

Assim, o vetor de deformações é definido a partir das derivadas parciais de primeira ordem da função peso:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{y} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{cases}^{h} = \sum_{i}^{n} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{i} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_{i} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{u}_{i} \\ \boldsymbol{v}_{i} \end{cases} = \sum_{i}^{n} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{i,x} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_{i,y} \\ \boldsymbol{\phi}_{i,y} & \boldsymbol{\phi}_{i,x} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{u}_{i} \\ \boldsymbol{v}_{i} \end{cases}$$
(4.35)

### 4.2.1. Função de Base

A consistência da aproximação dada pelo método MLS depende da ordem da base polinomial utilizada. Se a base polinomial possui monômios de ordem completa *m*, então as funções de forma geradas pelo MLS terão consistência  $C^{m}$ .

A Tab.1 mostra alguns exemplos de bases polinomiais variando a dimensão do problema e a ordem máxima *m* dos monômios.

Tabela 4.1 Algumas bases polinomiais.

Dimensão	т	$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(x)$			
1	3	$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \end{bmatrix}$			
2	3	$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}$			
3	4	$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$			
2	6	$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$			

### 4.2.2. Função Peso

A função peso é um componente importante na formulação de métodos sem malha. A sua escolha é arbitrária desde que a função seja contínua e positiva dentro do suporte. Uma característica essencial nas funções peso escolhidas é o seu suporte compacto, que permite definir as funções de aproximação em um caráter local (Dolbow e Belytschko, 1998). Algumas outras características das funções peso são:

- $w_i(\mathbf{x}) > 0$ , dentro do domínio de suporte.
- $w_i(\mathbf{x}) = 0$ , for ado domínio de suporte.
- $w_i(\mathbf{x})$  é uma função que decai monotonicamente ao longo do seu domínio.

A função peso pode ser escrita como função de um comprimento normalizado ou raio de influência, *r*:

$$r = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{dm_i} \tag{4.36}$$

onde a dimensão de *r* é calculada pela distância entre o ponto de interesse  $\mathbf{x}$  e o ponto nodal  $\mathbf{x}_i$  dividido pela dimensão do seu domínio de influência.

A seguir, algumas das funções peso unidimensionais mais encontradas na literatura de métodos sem malha são apresentadas:

• Cúbica *Spline* (Belytschko *et. al.* 1995)

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & r \le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \frac{1}{2} < r \le 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.37)

• Quártica Spline (Belytschko et. al. 1995)

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \le 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.38)

• Quinta Spline (Xiaofei et. al. 2004)

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 10r^2 + 20r^3 - 15r^4 + 4r^5, & r \le 1\\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.39)

• Exponencial (Belytschko et. al. 1995)

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/a)^2}, & r \le 1\\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.40)

• Gaussiana (Belytschko et. al. 1994)

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-(rb)^{2k}} - e^{-(b)^{2k}}}{1 - e^{-(b)^{2k}}}, & r \le 1\\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.41)

• Cônica (Belytschko et. al. 1994)

$$w(r) = \begin{cases} 1 - (r)^{2k}, & r \le 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.42)

onde a, b e k são parâmetros das funções peso.

As funções *spline* mostram certa praticidade em sua utilização quando comparadas com as funções peso exponencial, gaussiana e cônica, devido ao fato que as funções *spline* não apresentam parâmetros de ajuste. Na Fig. 4.4 são mostradas algumas funções peso apresentadas anteriormente.



Figura 4.4 Exemplo de algumas funções peso no espaço unidimensional.

Em relação às equações (4.24) e (4.25), nota-se que a derivada espacial da função peso é necessária para o cálculo das derivadas das matrizes **A** e **B**. Esta derivada pode ser calculada fazendo-se uso da regra da cadeia (Dolbow e Belytschko, 1998):

$$w_{i,k} = w_{i,r} \cdot r_{i,k}$$
 (4.43)

onde o subscrito k representa a derivada da função.

Por exemplo, no caso de um domínio circular em uma dimensão, para a função Cúbica *Spline* (Equação 4.37) tem-se:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \cdot r_{i,x} \tag{4.44}$$

calculando o valor de  $r_{i,x}$  (Equação 4.36) e substituindo na Eq. 4.44:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \frac{sign(x - x_i)}{dm_i}$$
 (4.45)

onde

$$w_{i,r} = \begin{cases} -8r + 12r^2, & r \le \frac{1}{2} \\ -4 + 8r - 4r^2, & \frac{1}{2} < r \le 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
(4.46)

Nota-se que, a função peso e a sua respectiva derivada são também contínuas ao longo de todo o domínio, as quais são mostradas na Fig. 4.5.



Figura 4.5 Função peso Cúbica *Spline* unidimensional e a sua respectiva derivada.

E, para o caso bidimensional, tem- se:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \cdot r_{i,x} \tag{4.47}$$

$$w_{i,y} = w_{i,r} \cdot r_{i,y}$$
(4.48)

substituindo o valor de  $r_{i,x}$  e  $r_{i,y}$  tem-se:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \frac{x - x_i}{r \, dm_i^2} \tag{4.49}$$

$$w_{i,y} = w_{i,r} \frac{y - y_i}{r \, dm_i^2} \tag{4.50}$$

A representação gráfica da função peso Cúbica *Spline* e as suas derivadas em relação às direções x e y são mostradas nas Figs. 4.6 a 4.8:



Figura 4.6 Função de peso Cúbica Spline bidimensional.



Figura 4.7 Derivada parcial da função de peso Cúbica *Spline* em relação à direção *x*.



Figura 4.8 Derivada parcial da função de peso Cúbica *Spline* em relação à direção *y*.

# 4.3. Exemplo Numérico: Problema Unidimensional

Nesta seção, é apresentado um problema unidimensional da referência Dolbow e Belytschko (1998). Considera-se uma barra engastada em uma das suas extremidades e livre na outra, como mostrado na Fig. 4.9. A barra unidimensional de comprimento unitário L é sujeita a uma força linear, b(x), de magnitude x.



#### Figura 4.9 Problema unidimensional.

O problema pode ser descrito por:

$$E u_{xx} + x = 0 \qquad 0 < x < 1 \tag{4.51}$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

$$u(0) = 0 (4.52) (4.52)$$

onde u é o deslocamento,  $u_{,x}$  a derivada do deslocamento em relação a x e E é o módulo de elasticidade do material.

A solução exata do problema é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{6} \right)$$
(4.53)

$$u(x)_{,x} = \frac{1}{2E} (1 - x^2)$$
(4.54)

As Figs. 4.10 e 4.11 mostram o comportamento da solução exata e a função de aproximação construída a partir do MLS, considerando 21 nós uniformemente distribuídos no domínio do problema, uma função de base cúbica *Spline*, e uma base polinomial linear dada por:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}, \quad m = 3 \tag{4.55}$$



Figura 4.10 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para u(x).



Figura 4.11 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para  $u(x)_{,x}$ .

A Tab. 4.2 apresenta o erro quadrático médio (RMS) entre a solução exata e a solução aproximada para uma distribuição de 6, 11 e 21 nós em todo o domínio.

Tabela 4.2 Erros RMS no cálculo da solução para o problema unidimensional.

Número de nós	Erro RMS u(x)	Erro RMS u(x),x		
6	$3,42 \cdot 10^{-4}$	8,22·10 <sup>-3</sup>		
11	3,16.10-5	1,61·10 <sup>-3</sup>		
21	2,86.10-6	3,04.10-4		

O erro quadrático médio (RMS) no valor aproximado da função solução é estimado tomando-se os valores calculados e comparando-a com seus valores reais:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left( f_i^{exat} - f_i^{aprox} \right)^2}$$
(4.56)

# 4.4. Exemplo Numérico: Problema Bidimensional

Nesta seção, é apresentado um problema bidimensional do livro de Thimoshenko (1970). Considera-se uma viga engastada de seção retangular e espessura unitária com uma carga, P, concentrada no seu extremo, x = 0, como mostrado na Fig. 4.12.



Figura 4.12 Problema bidimensional.

A solução exata do problema é dada por:

$$u(x, y) = -\frac{Px^2 y}{2EI} - \frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{PD^2}{8IG}\right)y$$
(4.57)

$$v(x, y) = \frac{vPxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}$$
(4.58)

onde I é o momento de inércia da viga, i.e.

$$I = \frac{D^3}{12}$$
(4.59)

O problema é resolvido com os parâmetros E = 2,4 GPa, v = 0.38, D = 20 mm, L = 80 mm, e P = 2 N. Considere-se uma distribuição de 1804 nós, distribuídos neste exemplo de forma aleatória em todo o domínio, como mostrado na Fig. 4.13.



Figura 4.13 Distribuição de nós adotada na discretização do problema.

Na solução do problema utilizando a formulação sem malha no espaço unidimensional, adotou-se como função de base a Cúbica *Spline* mostrada na Fig. 4.6. A seguir são comparadas as soluções para as componentes de deslocamento e deformação obtidas analiticamente e as geradas pelo programa desenvolvido.



Figura 4.14 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para a componente de deslocamento u(x,y).



Figura 4.15 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para a componente de deslocamento v(x,y).



Figura 4.16 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para a componente de deformação  $\varepsilon_x(x,y)$ .



Figura 4.17 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para a componente de deformação  $\varepsilon_y(x,y)$ .



Figura 4.18 Comparação entre a solução exata e a solução MLS para a componente de deformação  $\varepsilon_{xy}(x,y)$ .

A Tab. 4.3 apresenta o erro RMS entre a solução exata e a solução aproximada para as componentes de deslocamento e deformação. No cálculo do erro, utiliza-se a Eq. 4.56.

Componente	u(x,y)	v(x,y)	$\varepsilon_x(x,y)$	$\varepsilon_y(x,y)$	$\varepsilon_{xy}(x,y)$
Erro RMS	$6, 4 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$	0,319	0,173	1,327

Tabela 4.3 Erros RMS no cálculo da solução do problema bidimensional.

Os resultados apresentados nos exemplos numéricos mostram que os métodos sem malha MLS se aplicam bem à solução de problemas mecânicos. As funções de forma geradas a partir do MLS podem representar funções polinomiais de qualquer ordem e, por conseguinte, qualquer função suave.

Na metodologia proposta nesta tese, os nós utilizados na formulação sem malha serão aqueles identificados pelo algoritmo SIFT, cuja distribuição e densidade dependem muito da textura das imagens capturadas. E, para a determinação da solução aproximada, utilizando a informação de deslocamento fornecida pelos pontos SIFT, é necessário considerar alguns aspectos quanto à sua aplicação prática. Esses aspectos são apresentados e discutidos no próximo capítulo.