

3 Método Numérico

A fim de quantificar o processo de deposição de parafina em dutos submarinos, um módulo foi desenvolvido no código numérico TRANSFLUX (Stuckenbruck, 1994) para fluxo transiente bifásico, que calcula a deposição de parafina, com base na transferência de massa convectivo. O código usa o método dos volumes finitos para resolver as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e conservação de energia. O método consiste em dividir o domínio computacional em volumes de controle, especificar um ponto nodal no centro de cada volume e integrar as equações de conservação no tempo e no espaço.

O modelo utiliza o processo de malha deslocada, ou seja, as quantidades escalares são calculadas em certos pontos nodais, enquanto que as velocidades são calculadas nas interfaces dos volumes de controle. O método evita os campos oscilatórios que dão origem a valores irrealistas de pressão e da velocidade (Patankar, 1980). A integração no tempo é realizada por um procedimento fortemente implícito para todas as equações de conservação no domínio espacial, utilizando uma aproximação *upwind* para os termos convectivos.

Mapas de padrão de fluxo, fatores de atrito, velocidade de deslizamento e correlações *black-oil* do código CORE, desenvolvido pela Universidade de Tulsa (Beggs & Brill, 1984), são utilizados pelo código.

O código TRANSFLUX (Stuckenbruck, 1994) foi desenvolvido para resolver de forma acoplada o conjunto de equações de conservação (massa, quantidade de movimento e energia). O procedimento de solução utilizado neste trabalho consistiu em determinar, primeiramente, de forma acoplada a fração de gás, pressão, velocidade e temperatura, com o procedimento já plenamente testado do código TRANSFLUX. A cada passo de tempo, com este campo fixo, se a temperatura obtida na parede é inferior a TIAC, o modelo de deposição é acionado. O fluxo de massa é obtido e a espessura do depósito é calculada.

A seguir uma rápida descrição da metodologia utilizada no código TRANSFLUX é apresentada. Em continuação, detalhe-se o tratamento utilizado neste trabalho para tratar a equação de concentração de parafina dissolvida.

3.1 Código TRANSFLUX

A Figura 3.1 ilustra uma malha de discretização típica. As equações de conservação de massa e energia, contendo informações relativas às grandezas escalares como fração volumétrica, pressão e temperatura são integradas no volume de controle principal P, entre as faces oeste (*w*, *west*) $i-1/2$ e leste (*e*, *east*) $i+1/2$ do volume. A equação de conservação da quantidade de movimento é integrada no volume de controle deslocado em relação à malha principal entre o ponto Principal (P) i e leste (E) $i+1$ sendo a velocidade do fluido $u_{i+1/2}$ armazenada na face leste (*e*, *east*) $i+1/2$ do volume.

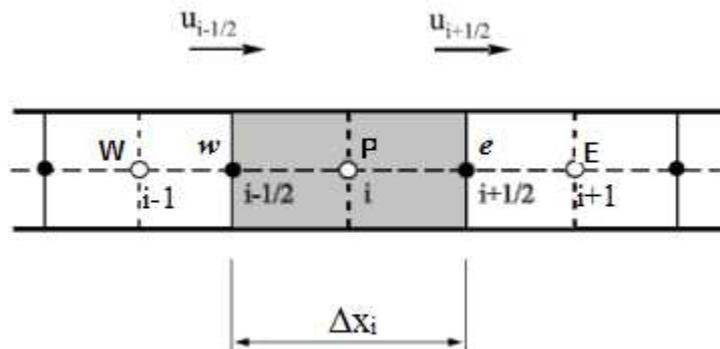


Figura 3.1: Malha de discretização deslocadas.

As equações de conservação podem ser representadas pela seguinte equação geral para a variável ϕ

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho v \phi}{\partial x} = S \quad (3.1)$$

onde S é o termo fonte.

Integrando esta equação implicitamente no tempo e no volume de controle principal de $i-1/2$ a $i+1/2$, utilizando a aproximação *upwind* para avaliar os fluxos nas faces, obtém-se, as equações discretizadas na seguinte forma

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (3.2)$$

onde os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i são os coeficientes da equação geral discretizada

$$a_i^o = \frac{\rho_i \Delta x_i}{\Delta t} \quad (3.3)$$

$$b_i = \mathbf{max}(-\rho_{i+1/2} v_{i+1/2}, 0) \quad c_i = \mathbf{max}(\rho_{i-1/2} v_{i-1/2}, 0) \quad (3.4)$$

$$a_i = b_i + c_i + a_i^o \quad d_i = S \Delta x_i + a_i^o \phi_i^o \quad (3.5)$$

O sistema indicado pela eq. 3.4, é composto pelas equações de conservação de massa (gás, mistura), de quantidade de movimento e de energia, correspondentes a um vetor Φ com quatro incógnitas: fração volumétrica de gás (α_g), velocidade da mistura (v_m) pressão (p) e temperatura (T), todas em função das variáveis independentes (x, t). Este sistema, contendo N equações para os N-blocos de discretização, é tri-diagonal, sendo facilmente resolvido por um algoritmo de solução (direta) de matrizes tri-diagonais em bloco.

No entanto, como as equações são não lineares, utiliza-se o método de Newton-Raphson para tratar as não linearidades. O procedimento geral é apresentado a seguir. Seja o sistema

$$\mathbf{G} = [\mathbf{A}] \Phi - \mathbf{b} = 0 \quad (3.6)$$

Deseja-se determinar Φ tal que satisfaça a eq. (3.6). A solução desejada na iteração $n+1$, Φ^{n+1} , é obtida corrigindo a solução da iteração anterior, Φ^n , de $\Delta\Phi$ até obter $\Delta\Phi < tol$.

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi \quad (3.7)$$

onde

$$\Delta\Phi = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{G} \quad ; \quad J_{ij} = \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \Phi_i} \quad (3.8)$$

sendo \mathbf{J} a matriz Jacobiana do sistema

Para avaliação da solução é necessário identificar a dependência das diferentes grandezas com as variáveis dependentes. Por exemplo, a massa específica das fases presente na Eq. 3.2 depende de α_g , p e T . Logo, sua variação é

$$\delta\rho_m = (\rho_g - \rho_l) \delta\alpha_g + \left[\alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p} + \alpha_l \frac{\partial \rho_l}{\partial p} \right] \delta p + \left[\alpha_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \alpha_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] \delta T \quad (3.9)$$

3.2 Discretização da Equação de Concentração de Parafina

O procedimento de discretização utilizado para a equação de concentração de parafina dissolvida é bem semelhante ao utilizado para as outras equações e descrito na seção 3.1. No entanto, um pouco mais de detalhes é apresentado a seguir.

A aplicação do princípio de conservação de massa da parafina dissolvida na solução pode ser representado por

$$\frac{\partial(\rho_o \alpha_o \alpha_l C_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_o \alpha_o \alpha_l v_l C_m)}{\partial x} = \frac{\rho_o h_m S_w}{A} (C_{int} - C_m) \quad (3.10)$$

Considere a malha ilustrada na Fig. 3.1. Integrando esta equação implicitamente no tempo e no volume de controle principal de $i-1/2$ a $i+1/2$, obtém-se

$$\frac{(\rho_o \alpha_o \alpha_l C_m)_i - (\rho_o \alpha_o \alpha_l C_m)_i^o}{\Delta t} A \Delta x + (\rho_o \alpha_o \alpha_l v_l A C_m)_{i+1/2} - (\rho_o \alpha_o \alpha_l v_l A C_m)_{i-1/2} = [\rho_o h_m S_w (C_{int} - C_m)]_i \Delta x \quad (3.11)$$

onde o sobrescrito “o” indica instante de tempo anterior e onde não há sobrescrito é referenciado ao instante de tempo atual. O subscrito “i” é o índice representativo do bloco-i.

Para avaliar variáveis nos limites da célula principal utilizou-se o esquema *upwind*, onde o valor na face é definido como sendo igual ao valor do ponto nodal à montante. Por exemplo, para a face leste ($i+1/2$) tem-se

$$\begin{aligned} \langle v_l C_m \rangle_{i+1/2} &= C_{m_i} v_{l_{i+1/2}} & \text{se} & \quad v_{l_{i+1/2}} \geq 0 \\ &= C_{m_{i+1}} v_{l_{i+1/2}} & \text{se} & \quad v_{l_{i+1/2}} < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo, tem-se

$$\left\{ \frac{(\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i}{\Delta t} A \Delta x - \max(F_e, 0) + \max(-F_w, 0) + [\rho_o h_m S_w]_i \Delta x \right\} C_{m_i} =$$

$$+ \max(-F_e, 0) C_{m_{i+1}} + \max(F_w, 0) C_{m_{i-1}} +$$

$$\frac{(\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i^o}{\Delta t} A \Delta x C_{m_i}^o + [\rho_o h_m S_w C_{int}]_i \Delta x \quad (3.13)$$

onde

$$F_e = (\rho_o \alpha_o \alpha_l v_l A)_{i+1/2}$$

$$F_e = \frac{(\rho_{o_i} + \rho_{o_{i+1}})}{2} \frac{(\alpha_{o_i} + \alpha_{o_{i+1}})}{2} \frac{(\alpha_{l_i} + \alpha_{l_{i+1}})}{2} v_{l_{i+1/2}} A \quad (3.14)$$

$$F_w = (\rho_o \alpha_o \alpha_l v_l A)_{i-1/2}$$

$$F_w = \frac{(\rho_{o_i} + \rho_{o_{i-1}})}{2} \frac{(\alpha_{o_i} + \alpha_{o_{i-1}})}{2} \frac{(\alpha_{l_i} + \alpha_{l_{i-1}})}{2} v_{l_{i-1/2}} A \quad (3.15)$$

Uma vez que pode ocorrer dissociação de gás do óleo, a equação de conservação de massa do óleo é

$$\frac{\partial(\alpha_l \alpha_o \rho_o)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \alpha_o \rho_o v_l)}{\partial x} = -\dot{m}_{gl} \quad (3.16)$$

Discretizando esta equação temos

$$\frac{(\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i - (\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i^o}{\Delta t} A \Delta x + F_e - F_w = -\dot{m}_{gl} \quad (3.17)$$

então

$$\frac{(\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i}{\Delta t} A \Delta x = \frac{(\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i^o}{\Delta t} A \Delta x - F_e + F_w - \dot{m}_{gl} \quad (3.18)$$

Substituindo a eq. (3.18) na eq. (3.13), obtém-se a seguinte equação de discretização

$$a_P C_{m_i} = a_E C_{m_{i+1}} + a_W C_{m_{i-1}} + b \quad (3.19)$$

onde

$$a_E = \mathbf{max}(-F_e, 0) \quad ; \quad a_W = \mathbf{max}(F_w, 0) \quad (3.20)$$

$$a_i^o = (\rho_o \alpha_o \alpha_l)_i^o A \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.21)$$

$$b = a_i^o C_{m_i}^o + (\rho_o h_m S_w)_i \Delta x C_{int} \quad (3.22)$$

$$a_P = a_i^o + a_E + a_W - \dot{m}_{gl} + \rho_o h_m S_w \Delta x \quad (3.23)$$

A eq. (3.19) constitui um sistema tri-diagonal para a saturação de parafina dissolvida. Deve-se destacar que equação para a concentração de parafina dissolvida está acoplada às quatro equações de conservação para a mistura. Todavia, considerando que o processo de deposição é lento, e o passo de integração para o tempo é pequeno, a equação é desacoplada do sistema principal, sendo resolvida um passo de integração atrasado com relação às equações de conservação para a mistura. Ou seja, há um atraso de Δt neste procedimento. Desta forma, a solução do problema é obtida, a cada instante de integração, em sequência. Primeiro as equações para o sistema gás-líquido, seguido da equação para a concentração de parafina. Note-se que, conforme esperado para este modelo, a fração volumétrica de óleo tem importância significativa na solução do problema.

Para solução deste sistema de equações algébricas, será utilizado o método TDMA, descrito por Patankar (1980).

3.3

Procedimento da Solução para Deposição de Parafina

Neste item é feito um resumo da metodologia empregada para cálculo do depósito de parafina implementado no código TRANSFLUX.

1. Leem-se os dados de entrada: parâmetros geométricos, número de volumes de controle, tipo de fluido, propriedades físicas, condições de contorno etc;
2. A partir dos dados de entrada inicializam-se as variáveis com seus valores característicos e calculam-se as condições iniciais;

3. O software resolve o problema de escoamento, apresentando a solução para os campos de pressão (P), temperatura (T), velocidade de mistura (v) e fração volumétrica (α);
4. Com o campo de temperatura é calculada a temperatura da interface sólido/líquido (T_{int});
5. Com a temperatura da interface, determina-se a concentração da parafina na interface (C_{int}), utilizando a equação ajustada para a curva de solubilidade de parafina do óleo, a qual é função da temperatura;
6. Calcula-se o coeficiente de transferência de massa (h_m);
7. Resolve-se a equação de concentração da parafina (C_m) utilizando a metodologia descrita na seção 3.3;
8. Com os parâmetros definidos anteriormente (C_{int} , C_m e h_m), calcula-se o fluxo de deposição de parafina (m''_{wax});
9. Com a taxa de deposição e o passo de tempo, calcula-se a espessura acumulada do depósito (δ).

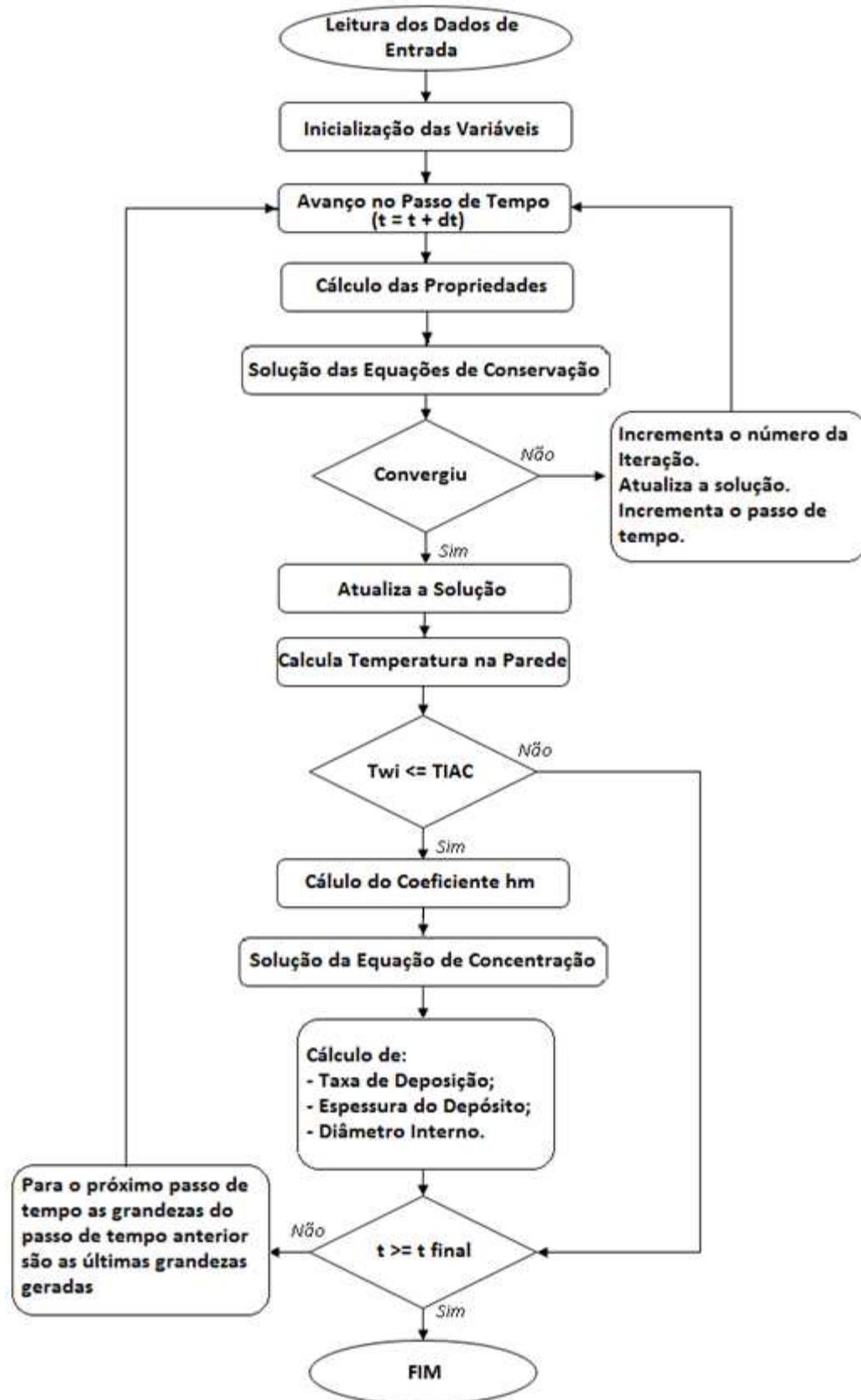


Figura 3.2: Fluxograma do Modelo Numérico