PUC

WLASMIR CAVALCANTI DE SANTANA

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS h-ADAPTATIVO
PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS ELÁSTICOS PLANOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Rio de Janeiro, 14 de Outubro de 1993

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 — CEP 22453

RIO DE JANEIRO — BRASIL

WLASMIR CAVALCANTI DE SANTANA

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
h-ADAPTATIVO PARA ANÁLISE DE
PROBLEMAS ELÁSTICOS PLANOS**

Dissertação apresentada ao Departamento de
Engenharia Mecânica da PUC-RJ como parte
dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR

Professor Carlos Alberto de Almeida

**Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**

Rio de Janeiro, 14 de outubro de 1993

Aos meus pais e à minha esposa

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Carlos Alberto de Almeida, pela orientação, estímulo, apoio e amizade durante o curso de mestrado e a realização deste trabalho.
- À professora Aura Conci, pelo apoio, estímulo e amizade durante o curso de mestrado e a realização deste trabalho.
- Ao **ICAD - PUC/RJ** pelo apoio computacional recebido para o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao **INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA** pelo apoio recebido para a conclusão deste trabalho.
- Aos meus colegas da pós-graduação, pela amizade e incentivo.
- À minha família, pela compreensão e incentivo.
- À **CAPES**, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho a implementação de um método adaptativo de refinamento automático de malhas de Elementos Finitos. O método aplica-se a problemas planos da elasticidade linear. Elementos triangulares e quadrilaterais (lineares e quadráticos) são utilizados. Estimativas de erro *a-posteriori* são obtidas através do estimador de erro proposto por Zienkiewicz-Zhu, empregando-se uma técnica de recuperação da solução numérica fornecida pelo MEF (superconvergent patch recovery technique). A metodologia de adaptação da malha emprega o conceito de remalhamento do domínio na forma proposta por Peraire e Zhu para malhas de elementos triangulares e quadrilaterais, respectivamente.

Implementa-se um esquema de localização de singularidades presentes no domínio baseado no conceito de concentração da energia de deformação. O uso deste esquema combinado com a metodologia de adaptação permite um processo automático sem a intervenção do usuário durante os ciclos de refinamento da malha.

Para demonstrar-se a performance do método são analisados três problemas: uma viga curta em balanço sob carregamento distribuído, uma placa quadrada com furo quadrado e uma placa quadrada com dupla trinca.

SUMMARY

This work presents the theory and the implementation techniques for an automatic h-adaptive procedure of finite element mesh refinements. The methodology is applied to plane problems in linear elasticity using triangular and quadrilateral shape elements with linear and quadratic lagrangian interpolation functions. Solution errors are *a-posteriori* evaluated using the Zienkiewicz- Zhu error estimator based on numerical solutions recovered from the finite element method solution - superconvergent patch recovery technique. For the mesh adaptivity of triangular and quadrilateral elements the remeshing concepts proposed by Peraire and Zhu are employed, respectively.

The presence of solution singularities and their intensity is identified throughout the finite element mesh from the evaluation of the strain energy concentration, considering the numerical solution obtained. This scheme combined with adaptivity methodology allows for a fully automatic procedure of mesh refinement/derefinement at the cycle of solution searching.

Three examples are considered to demonstrate the procedure ability in handling elasticity problems: a cantiliver short beam under transverse distributed loading, a square plate with a middle square hole under in plane traction distributed loading and a double notch square plate under in plane distributed loading.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
SIMBOLOGIA	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 ESTIMATIVAS DE ERRO	11
2.1 O PROBLEMA LINEAR ELÁSTICO PLANO	11
2.2 ESTIMATIVA DE ERRO <i>A-PRIORI</i>	14
2.2.1 TAXA DE CONVERGÊNCIA PARA O REFINAMENTO <i>h</i>	15
2.2.2 TAXA DE CONVERGÊNCIA PARA O REFINAMENTO <i>p</i>	17
2.2.3 TAXA DE CONVERGÊNCIA PARA O REFINAMENTO <i>h-p</i>	18
2.3 ESTIMATIVAS DE ERRO <i>A-POSTERIORI</i>	18
2.3.1 O ESTIMADOR DE ERRO Z^2 (ZIENCKIEWICZ-ZHU)	20
2.4 TESTES NUMÉRICOS.	33
3 TÉCNICAS DE ADAPTAÇÃO	47
3.1 CRITÉRIOS PARA ADAPTAÇÃO POR ENRIQUECIMENTO DE MALHA	48
3.1.1 CRITÉRIOS PARA REFINAMENTO DA MALHA	48
3.1.2 ESTRATÉGIAS DE ADAPTAÇÃO POR ENRIQUECIMENTO DE MALHA	50
3.2 CRITÉRIO PARA GERAÇÃO POR REMALHAMENTO	55
3.2.1 CRITÉRIOS PARA O REFINAMENTO DA MALHA.	55

3.2.2 ESTRATÉGIA PARA A LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES PRÓXIMAS ÀS SINGULARIDADES	57
3.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ESQUEMAS DE ENRIQUECIMENTO DE MALHA E REMALHAMENTO.	59
4 GERAÇÃO DE MALHA	62
4.1 ALGORITMOS PARA A TRIANGULARIZAÇÃO DO DOMÍNIO	63
4.2 ALGORITMO DE TRIANGULARIZAÇÃO (DEFINIÇÃO DO PROBLEMA)	63
4.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS	64
4.4 GERAÇÃO DE NÓS NO CONTORNO	67
4.5 LINHA FRONTAL INICIAL	69
4.6 TRIANGULARIZAÇÃO DO DOMÍNIO	69
4.7 SUAVIZAÇÃO DA MALHA	74
4.8 GERAÇÃO QUADRILATERAL	75
4.8.1 CONSIDERAÇÕES BÁSICAS	75
4.8.2 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO	76
4.8.3 APRIMORAMENTO DA MALHA	84
4.8.3.1 SUAVIZAÇÃO DA MALHA QUADRILATERAL	84
4.8.3.2 MODIFICAÇÃO DA MALHA QUADRILATERAL	85
5 TESTES NUMÉRICOS.	89
5.1 VIGA CURTA EM BALANÇO SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO ...	90
5.2 PLACA QUADRADA COM FURO QUADRADO.....	99

5.3 PLACA QUADRADA SOB TRAÇÃO COM DUPLA TRINCA.	108
5.4 ANÁLISE DO MODELO DE VIGA ENGASTADA CONSIDERANDO O DESREFINAMENTO.	109
5.5 LOCALIZAÇÃO DE SINGULARIDADES.	109
6 CONCLUSÕES	120
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1 Diagrama de blocos da análise numérica por Elementos Finitos.	2
Fig. 1.2 - Método adaptativo versão r para um problema de contato: (a) malha original; (b) malha modificada.	5
Fig. 1.3 - Método adaptativo versão h para um problema axissimétrico: (a) malha original; (b) malha com adaptação h.	6
Fig. 1.4 - Método adaptativo versão p.	7
Fig 2.1 Valores de λ para sólidos elásticos isotrópicos.	16
Fig 2.2 Diferenças entre o campo de tensões suavizadas e o campo de tensões do MEF em 3 elementos unidimensionais.	22
Fig 2.3 Extrapolação de tensões - elemento biquadrático.	26
Fig 2.4 malha de elementos finitos unidimensionais: Δ Pontos de Gauss; $\sqcup$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação	28
Fig 2.5 Cálculo dos valores nodais superconvergentes para elementos quadrilaterais li- near e quadrático: δ Pontos de Gauss; $\bullet$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação	28
Fig 2.6 Cálculo dos valores nodais superconvergentes para elementos triangulares linear e quadrático: δ Pontos de amostragem; $\bullet$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação	29
Fig 2.7 Estratégia de suavização para valores nodais no contorno: δ Pontos de amostragem; $\bullet$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação	33
Fig 2.8 Cilindro de paredes espessas.	34

Fig 2.9 Tensões no ponto C da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy}	36
Fig 2.10 Tensões no ponto B da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy}	36
Fig 2.11 Tensões no ponto D da malha; (a) σ_x , (b) σ_y , (c) σ_{xy}	37
Fig 2.12 Tensões no ponto D da malha; (a) σ_x , (b) σ_y , (c) σ_{xy}	39
Fig 2.13 Tensões no ponto C da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy}	40
Fig 2.14 Tensões no ponto B da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy}	40
Fig 2.15 (a) Viga submetida a carregamento uniforme. (b) Malha inicial e condições de contorno.	42
Fig 2.16 Tensões no ponto A da malha.	44
Fig 2.17 Tensões no ponto F da malha.	45
Fig 2.18 Tensões no ponto G da malha.	46
Fig 3.1 Exemplo de adaptação numa malha de elementos quadrilaterais; (a) $\parallel$ elemento a ser subdividido. (b) $\circ$ nó irregular.	50
Fig 3.2 Imposição das equações de restrição associadas a um nó irregular de uma malha quadrilateral; $\bullet$ nó regular $\circ$ nó irregular.	51
Fig 3.3 Refinamento de um triângulo T: $\bullet$ nó irregular (a) $T \in T_e$. (b,c,d) $T \notin T_e$	53
Fig 3.4 Refinamento de um triângulo T resultante do refinamento apresentado na figura 3.3(b).	53
Fig 3.5 Elementos de transição utilizados em estratégias adaptativas.	54
Fig 4.1 Diferentes malhas base para um domínio plano considerado.	66
Fig 4.2 Segmentos de contorno e linhas de corte de um domínio.	67

Fig 4.3 Atualização da linha frontal no decorrer da triangularização do domínio; (a) linha frontal inicial, (b) Estágio do processo de triangularização , (c) atualização da linha frontal.	70
Fig 4.4 Construção de um elemento triangular.	71
Fig 4.5 Exemplo de uso do algoritmo de busca; a) Coordenadas de área: $L_i(M) = A_i/A$, $L_j(M) = A_j/A$, $L_k(M) = A_k/A$, $A = A_i + A_j + A_k$, b) e_i, e_j, e_k elementos vizinhos do elemento e.	73
Fig 4.6 Suavização de malha triangular.	74
Fig 4.7 Elementos quadrilaterais obtidos da composição de triângulos: (a) elemento com todos os ângulos internos inferiores a 180° , (b) elemento com ângulo interno igual a 180° , (c) elemento com ângulo interno superior a 180°	76
Fig 4.8 Geração do elemento quadrilateral ABCD.	78
Fig 4.9 posição ideal do o nó auxiliar para $\theta \leq 120^\circ$: (a) $\theta \leq 90^\circ$, (b) $\theta > 90^\circ$	80
Fig 4.10 posição ideal do o nó auxiliar para $120^\circ < \theta \leq 240^\circ$: (a) $\theta \leq 180^\circ$, (b) $\theta = 180^\circ$, (c) $\theta > 180^\circ$	81
Fig 4.11 posição ideal do o nó auxiliar para $240^\circ < \theta \leq 315^\circ$	82
Fig 4.12 posição ideal do o nó auxiliar para $\theta > 315^\circ$	83
Fig 4.13 Suavização de malha quadrilateral.	84
Fig 4.14 Eliminação de nó no processo de modificação da malha quadrilateral para $NE_A = 2$. (nó A é eliminado).	86
Fig 4.15 Eliminação de elemento no processo de modificação de malha quadrilateral para $NE_A = NE_B = 3$. (elemento E_i é eliminado).	86

Lista de figuras	xi
Fig 4.16 Troca de diagonal.	87
Fig 4.17 Eliminação de lado, lado EF é eliminado.	88
Fig 5.1 Viga curta.	90
Fig 5.2 Problema 1 analisado com o elemento T3: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento. NN - número de nós ; NE - número de elementos.	92
Fig 5.3 Problema 1 analisado com o elemento T6: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	93
Fig 5.4 Problema 1 analisado com o elemento Q4: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	94
Fig 5.5 Problema 1 analisado com o elemento Q9: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	95
Fig 5.6 Taxas de convergência para o Problema 1.	96
Fig 5.7 Placa quadrada com furo quadrado.	99
Fig 5.8 Problema 2 analisado com o elemento T3: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento. NN - número de nós ; NE - número de elementos.	101
Fig 5.9 Problema 2 analisado com o elemento T6: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	102
Fig 5.10 Problema 2 analisado com o elemento Q4: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	103
Fig 5.11 Problema 2 analisado com o elemento Q9: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	104
Fig 5.12 Taxas de convergência para o Problema 2.	105

Fig 5.13 Placa quadrada com dupla trinca.	108
Fig 5.14 Problema 3 analisado com o elemento T3: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento. NN - número de nós ; NE - número de elementos.	111
Fig 5.15 Problema 3 analisado com o elemento T6: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento.	112
Fig 5.16 Problema 3 analisado com o elemento Q4: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento.	113
Fig 5.17 Problema 3 analisado com o elemento Q9: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.	114
Fig 5.18 Taxas de convergência para o Problema 3.	113
Fig 5.19 Sequência de malhas para exemplo de desrefinamento.	118
Fig 5.20 Valores de φ_i para a malha na figura 5.3(c).	119

SIMBOLOGIA

$\|e\|$ Erro de discretização medido pela norma de energia.

$\|\bar{e}\|$ Estimativa do erro de discretização medido pela norma de energia.

$\|\bar{e}_i\|$ Estimativa do erro de discretização , a nível de elemento, medido pela norma de energia.

$\bar{e}_m$ Erro máximo permissível a nível de elemento.

$\|u\|^2$ Dobro da energia de deformação .

$\|u^h\|^2$ Solução numérica para o dobro da energia de deformação .

$\|\bar{u}\|^2$ Estimativa do dobro da energia de deformação .

h dimensão de um elemento finito.

ICED Índice de concentração de energia de deformação .

IGCED Índice global de concentração de energia de deformação .

$ICED_m$ Valor máximo do índice de concentração de energia de deformação .

p ordem de interpolação de discretização .

v Campo de deslocamentos analítico.

v^h Solução numérica para o campo de deslocamentos.

v Solução numérica nodal para o campo de deslocamentos

ϵ Campo de deformações .

θ Índice de efetividade.

σ Campo de tensões analítico.

σ Solução numérica para o campo de tensões .

σ^* Campo de tensões suavizadas.

$\bar{\sigma}^*$ Valores nodais do campo de tensões suavizadas.

η Erro relativo na norma de energia.

$\bar{\eta}$ Estimativa do erro relativo na norma de energia.

INTRODUÇÃO

Frequentemente, o engenheiro é desafiado por problemas cujo modelo matemático não possui solução analítica conhecida. Este tipo de situação tem servido de motivação para uma intensa utilização de métodos numéricos na solução de problemas complexos de engenharia.

Ao longo das últimas décadas, várias metodologias de aproximação como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos, elementos de contorno, etc têm sido propostas para a solução numérica destes problemas. Dentre estas metodologias destaca-se o método dos elementos finitos (MEF) que, baseado na condição de que a estacionariedade de um funcional fornece diretamente as equações de equilíbrio/balço e correspondentes condições de contorno naturais, é hoje universalmente utilizado em variadas formas no campo da mecânica dos sólidos, termociências, eletromagnetismo, etc. O grande número de usuários do MEF e o volume de recursos voltado a pesquisas relacionadas ao método testemunham a sua versatilidade e aplicação na solução de problemas com importante base tecnológica. Sem dúvida, muito da popularidade do método está associada à generalidade de sua aplicação e à precisão dos resultados fornecidos.

Mesmo na área da mecânica dos fluidos e particularmente em aplicações aeroespaciais nas quais, por razões históricas, o método das diferenças finitas é largamente utilizado, o MEF vem tendo o seu emprego cada vez mais estendido para a solução de problemas de grande porte em aerodinâmica.

Fig. 1.1 Diagrama de blocos da análise numérica por Elementos Finitos.

A figura 1.1 ilustra o procedimento de análise por elementos finitos em que o problema físico (real) de uma estrutura ou componente estrutural é submetido a um carregamento. A idealização do problema físico por um modelo mecânico, através do uso de hipóteses simplificadoras, leva a um sistema de equações diferenciais que governam o problema. Este processo de idealização envolve um aspecto da "aproximação" do problema físico e deve ser desenvolvido criteriosamente: nenhuma informação adicional, além das associadas às hipóteses do modelo mecânico, devem ser esperadas como resultado do método numérico.

Após a formulação do modelo mecânico, um esquema de discretização é adotado. Esta fase envolve a escolha da ordem de discretização das variáveis e a forma dos elementos, construção da malha, representação do carregamento e das condições de contorno, etc.

De posse dos resultados numéricos, o analista quantifica o erro dos resultados obtidos através de algum critério e decide quanto a qualidade destes em atender às necessidades da análise. Em caso negativo, modificações no esquema de discretização segundo critérios pré estabelecidos são efetuadas e a análise é repetida. Assim, a obtenção de resultados satisfatórios com este procedimento de análise numérica é fortemente dependente da experiência do analista no uso do método, do conhecimento da formulação dos elementos utilizados e do reconhecimento dos fenômenos importantes presentes no problema físico a ser resolvido.

A necessidade de se obter de forma eficiente soluções numéricas de problemas de engenharia, para que decisões confiáveis de projeto possam ser tomadas baseando-se nestas informações numéricas, fez com que os pesquisadores se voltassem para as questões de otimização do uso do método e da quantificação da qualidade dos resultados numéricos.

Para qualificar-se os resultados numéricos obtidos da análise é necessário atentar para as duas principais fontes de incerteza:

- a) a aproximação inerente a formulação do modelo mecânico utilizado (Babuska [1] [2], Bathe et al [3] e Shephard [4] apresentam uma excelente introdução a este aspecto da modelagem do problema físico);
- b) a aproximação utilizada na discretização do modelo mecânico contínuo para a obtenção de um modelo numérico finito a ser resolvido numericamente.

Neste trabalho, admite-se consistente a formulação do modelo mecânico utilizado com o problema físico a ser resolvido e serão abordados apenas aspectos relacionados a quantificação do erro de discretização inerente ao uso do método numérico e a modificações (adaptações) da malha de discretização .

Os principais objetivos do método adaptativo para elementos finitos são de fornecer ao usuário ferramentas para controlar a qualidade dos resultados da análise numérica e automatizar a busca de uma malha ótima. A solução numérica obtida deve satisfazer a um nível de erro pré-especificado utilizando um menor possível número de graus-de-liberdade e a malha assim obtida apresenta uma distribuição uniforme do erro de discretização sobre os elementos [8].

As etapas básicas do método adaptativo são também mostradas no diagrama de blocos da figura 1.1 e estão perfeitamente integradas com os procedimentos de discretização e solução do MEF. Após a análise numérica, o erro de discretização é quantificado através de estimativas de erro *a-posteriori* : no caso deste ser maior que um valor especificado, a malha é modificada e o processo se repete.

Durante a fase de modificação (adaptação) da malha de elementos finitos pode-se utilizar três principais tipos de adaptação :

a) O método-r baseado nos trabalhos iniciais do desenvolvimento do método adaptativo, que reloca a posição dos nós modificando a forma geométrica inicial dos elementos finitos, com o objetivo de atingir a condição de otimização da malha: “erro constante em cada elemento”. Neste caso, o número de graus de liberdade da análise permanece inalterado e torna-se muitas vezes impossível reduzir o erro de discretização ao nível pré-especificado pelo usuário. A principal característica desta estratégia é a uniformização do erro sobre a malha.

Fig. 1.2 - Método adaptativo versão r para um problema de contato: (a) malha original; (b) malha modificada.

A figura 1.2 (a) ilustra um modelo numérico de elementos finitos para um problema de contato entre um corpo rígido e um corpo elástico. Após a análise numérica, é realizada uma adaptação da malha (figura 1.2 (b)), baseada na análise de erro *a-posteriori* utilizando

o método r-adaptativo.

b) Com o método-h refinam-se os elementos que possuem o nível de erro mais elevado sem modificar a sua forma geométrica original. Como exemplo, se o elemento quadrilateral de quatro nós (linear) é utilizado na discretização, este pode ser dividido em quatro elementos do mesmo lineares em cada adaptação. Devido ao acréscimo no número de graus-de-liberdade inerente a esta estratégia, é teóricamente sempre possível atingir-se um nível de erro pré-especificado para a análise.

Fig. 1.3 - Método adaptativo versão h para um problema axissimétrico: (a) malha original; (b) malha com adaptação h.

A figura 1.3 apresenta uma malha de elementos finitos utilizada na análise de um problema axissimétrico, ilustrando um exemplo de adaptação tipo h aplicada a esta malha.

c) No método-p a ordem das funções de forma de elementos que possuem um nível de erro mais elevado é modificada, uma vez que o método é relacionado ao aumento da ordem dos polinômios dos elementos. Neste caso, a malha original é mantida e torna-se

interessante utilizar o método com elementos finitos hierárquicos que permite uma implementação mais eficiente do processo de adição de termos de maior ordem aos polinômios de elementos existentes.

A figura 1.4 ilustra a adaptação da malha de elementos mostrada na figura 1.3 (a) utilizando o método p, os elementos indicados tiveram a ordem dos polinômios de discretização modificada.

Outras alternativas do processo de adaptação podem ser empregadas com a combinação destas estratégias como os métodos r-p [16], h-p [17] e outros.

Fig. 1.4 - Método adaptativo versão p.

O método-p, em geral, possui uma taxa de convergência superior ao método-h porém, sua implementação utilizando formulação hierárquica acarreta em consideráveis modificações nos códigos de elementos finitos.

Como será mostrado adiante, para aplicações típicas na engenharia, exigindo um nível de erro na ordem de 5%, o uso do método-h com elementos de baixa ordem (lineares e

quadráticos) é suficiente e particularmente eficiente para elementos quadráticos, além de permitir uma implementação sem alterar o código de elementos finitos. Em aplicações exigindo um nível de erro na ordem de 1% ou menos, o uso do método p ou de uma combinação do tipo h - p torna-se necessária.

As primeiras publicações em que a otimização do uso do MEF é tratada remontam ao início da década de 70. Nestes trabalhos iniciais o conceito de adaptação *a-posteriori* com a adaptação automática de malha baseada nestas estimativas ainda não era claro. Este conceito só foi introduzido por Babuska e seus colaboradores no final da década de 70.

Neste período, Babuska e Rheiboldt [5,6,7,8] desenvolveram os fundamentos matemáticos da teoria do método adaptativo baseado na análise de erro da discretização. A introdução de estimativas de erro *a-posteriori* utilizando os resíduos nos elementos e as descontinuidades de tensões nos contornos dos elementos, tornou possível a concepção de uma estratégia adaptativa para o método, que, estima o erro de discretização do elemento finito de forma que um refinamento apropriado em certos elementos poderia ser efetuado. Um aspecto importante introduzido por Babuska foi o da abordagem passo a passo na análise até que resultados satisfatórios são atingidos. Ainda neste período foi também introduzida por Peano [9] e Szabo [10] a idéia do método p de refinamento.

Também importante é o trabalho de Zienckiewicz et al [11] que, abordando estratégias hierárquicas para o MEF, fez uma significativa introdução do método adaptativo na comunidade de engenharia.

O desenvolvimento do método dos elementos finitos adaptativos a partir da década de

80 é acompanhado pela rápida transformação das técnicas de computação gráfica. Técnicas de modelagem geométrica e de geração automática de malhas foram utilizadas com o objetivo de associar o método adaptativo a sistemas CAE (Computer Aided Engineering) por Shepard [13]. Destaca-se também neste período o trabalho apresentado por Kikuchi [14] um dos primeiros a abordar a geração automática de malhas adaptativas.

Mais recentemente, Zienckiewicz e Zhu [15] propuseram técnicas de estimativa de erro e geração automática de malha que tornam a implementação do método adaptativo muito eficiente do ponto de vista de esforço computacional uma vez que é realizada sem alterar a estrutura convencional dos códigos de elementos finitos.

O método adaptativo para elementos finitos vem tendo aplicação cada vez maior em diferentes áreas de engenharia; análise de tensões, dinâmica estrutural, otimização da forma de componentes mecânicos, análise de problemas não lineares (conformação mecânica), dinâmica dos fluidos computacional são algumas das áreas onde a técnica adaptativa vem sendo aplicada devido às vantagens que ela propicia (economia computacional em termos de número de graus de liberdade, quantificação do erro de discretização, automatização da análise, etc).

Neste trabalho será abordada a implementação de técnicas de estimativa de erro *a-posteriori* e de estratégias de adaptação de malhas tipo *h* aplicadas à solução de problemas planos de elasticidade utilizando elementos triangulares e quadriláteros, lineares e quadráticos.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2 são feitas considerações a respeito da taxa de convergência do MEF.

para refinamento tipo h e é apresentada uma técnica de estimativa de erro *a-posteriori*, utilizando procedimentos de suavização do campo de tensões de elementos finitos.

No capítulo 3 apresentam-se os critérios para adaptação de malha utilizando o método- h e discute-se suas vantagens e desvantagens.

No capítulo 4 são apresentadas as estratégias para implementação da geração automática de malhas adaptativas aplicadas a elementos triangulares e quadrilaterais.

No capítulo 5 são apresentados os resultados com testes numéricos. Problemas que possuem soluções analíticas e/ou numéricas conhecidas são analisados com o intuito de testar-se a precisão das estimativas de erro e a performance da geração adaptativa de malhas.

ESTIMATIVAS DE ERRO.

Neste capítulo, apresenta-se a estratégia utilizada para a obtenção das estimativas do erro associado à solução numérica fornecida pelo método dos elementos finitos. Os procedimentos abordados neste trabalho utilizam a norma da energia de deformação e uma estratégia de suavização do campo de tensões do MEF para a obtenção destas estimativas, permitindo que elas sejam computadas *a-posteriori* tanto a nível local como a nível global.

Na seção 2.1 são apresentadas considerações sobre o uso da norma da energia, as estimativas de erro *a-priori* abordando propriedades de convergência do MEF são discutidas na seção 2.2 e na seção 2.3 é apresentada a metodologia utilizada na implementação da técnica de estimativa de erro *a-posteriori*.

2.1 O PROBLEMA LINEAR ELÁSTICO PLANO

Neste trabalho as soluções de problemas planos são abordados já que permitem uma melhor visualização dos resultados da estratégia adaptativa utilizada e representam um passo inicial no desenvolvimento de estratégias de geração de malhas adaptativas para problemas tridimensionais. Considerando-se um problema linear elástico plano com deslocamentos $\mathbf{v}$ definidos em um domínio Ω , e cujo equilíbrio ao carregamento $\mathbf{q}$ é caracterizado pelo sistema de equações diferenciais:

$$\mathbf{L}\mathbf{v} - \mathbf{q} = 0 \quad (2.1)$$

com deslocamentos prescritos $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ no contorno Γ_v e com tensões prescritas $\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{t}'$ no contorno Γ_t , são também válidas as relações

$$\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_t \quad (2.2)$$

e

$$\Gamma_v \cap \Gamma_t = \emptyset \quad (2.3)$$

Nas expressões acima, tem-se os operadores lineares

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}^t \mathbf{D} \mathbf{S} \text{ e } \mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{S}$ é o operador que relaciona os campos de deformações ϵ e deslocamentos $\mathbf{v}$ na forma

$$\epsilon = \mathbf{S} \mathbf{v}, \quad (2.5)$$

$\mathbf{D}$ é a matriz de elasticidade que define as tensões

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon \quad (2.6)$$

e $\mathbf{G}$ é um operador linear que relaciona o campo de tensões e as forças no contorno do domínio.

Para este problema o Método dos Elementos Finitos fornecerá uma solução aproximada v^h definida no domínio Ω através de:

$$v^h = \mathbf{N} \bar{v} \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{N}$ representa as funções de forma adotadas para a discretização do problema e $\bar{v}$ é a solução numérica nodal para o campo de deslocamentos do problema. Com este resultado pode-se avaliar, através do procedimento convencional de elementos finitos, o campo de tensões aproximado σ^h

$$\sigma^h = \mathbf{D} \mathbf{S} \bar{v} \quad (2.8)$$

A medida do erro de aproximação do MEF utilizada é a diferença entre a solução analítica do problema e a solução aproximada fornecida pelo método, e pode ser expressa em termos de deslocamentos e_v ou tensões e_σ na forma:

$$e_v = v - v^h \quad (2.9)$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma^h \quad (2.10)$$

onde v e σ representam soluções analíticas para o problema. Na quantificação do erro cometido em uma análise numérica, é conveniente utilizar uma norma definida para todo o domínio Ω ou em partes deste domínio Ω_i ; a avaliação pontual do erro como definida nas equações 2.9 e 2.10 não permite uma avaliação

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (S e_v)^t D(S e_v) d\Omega = \int_{\Omega} [S(v - v^h)]^t D[S(v - v^h)] d\Omega. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.9) em (2.11) e considerando a solução numérica de elementos finitos em termos de deformação tem-se

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon^h)^t D(\varepsilon - \varepsilon^h) d\Omega \quad (2.12)$$

ou ainda em termos de tensões

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^h)^t D^{-1}(\sigma - \sigma^h) d\Omega \quad (2.13)$$

A vantagem de utilizar-se a norma de energia está relacionada com o fato do parâmetro $\|e\|$ ser um escalar estritamente positivo e ser avaliado em todo o domínio Ω ou em subdomínios Ω_i do problema. Para valores da medida do erro é válida a expressão:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \quad (2.14)$$

onde o índice i refere-se a subdivisões (elementos) individuais Ω_i do domínio Ω discretizado pelo MEF e m é o número total de elementos utilizados.

Note-se que a quantificação de erro utilizando a norma de energia como proposto às equações (2.11) à (2.13) só adquire sentido se avaliada em relação à energia total de deformação. Com esta finalidade, define-se o erro relativo na norma de energia

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \quad (2.15)$$

onde $\|u\|$ é o valor positivo da raiz quadrada do dobro da energia de deformação

$$\|u\| = (\int_{\Omega} \sigma^t D)^{-1} \sigma d\Omega)^{1/2}$$

2.2 ESTIMATIVAS DE ERRO A-PRIORI

Nesta seção são apresentados os resultados teóricos da teoria de aproximação dos elementos finitos obtidos por Babuska e Szabo [18]. Os conceitos associados a estes resultados são importantes para a descrição do esquema adaptativo apresentado no próximo capítulo. Estes resultados são utilizados como estimativas de erro *a-priori* para a análise de erro do modelo numérico. Estimativas de erro *à-priori* fornecem apenas uma descrição qualitativa a re-

speito da taxa de convergência da solução de elementos finitos durante o refinamento h,p ou $h-p$. Uma vez que o processo de geração de malhas adaptativas exige uma quantificação da distribuição de erro sobre o domínio do modelo, a aplicação direta destas estimativas é de difícil implementação, fornecendo porém uma ferramenta muito útil na predição da taxa de convergência do método e dos valores de erro obtidos com a norma de energia. Zienckiewicz [19] apresenta um processo de extrapolação a partir de valores conhecidos de estimativas de erro em etapas sucessivas de refinamento para a avaliação de estimativas de erro utilizadas em refinamento versão $h-p$.

2.2.1 TAXA DE CONVERGÊNCIA PARA O REFINAMENTO h

No refinamento tipo h , à medida que a malha é discretizada de forma uniforme e o tamanho h dos elementos tende para zero, o erro estimado satisfaz [18] a seguinte expressão:

$$\|e\| \leq C_1 h^{\min(p,\lambda)} \approx C_2 N^{-(\frac{1}{2})\min(p,\lambda)} \quad (2.16)$$

onde C_1 e C_2 são constantes independentes de h ou N , p é a ordem das funções de interpolação adotadas para a discretização por elementos finitos. λ é uma constante que depende da “suavidade” da solução analítica sobre o domínio do problema [19]. Os valores de λ estão associados à existência de singularidades no problema (pontos de concentração de tensões, entalhes e reentrâncias presentes em geometrias complexas, pontos de aplicação de cargas concentradas, etc), valores típicos de λ para alguns casos de singularidade comuns em

problemas de engenharia são mostrados na figura 2.1.

Fig 2.1 Valores de λ para sólidos elásticos isotrópicos.

Na equação (2.16) N é o número de graus de liberdade. Em problemas bidimensionais, pode-se supor que N seja proporcional a h^{-2} e o valor absoluto

do expoente de N é a taxa de convergência assintótica.

Se durante o refinamento for utilizada uma sequência de malhas ótimas (malhas em que se obtém uma distribuição uniforme de erro entre os elementos), a influência das singularidades será eliminada e diz-se que uma taxa ótima de convergência é obtida:

$$\|e\| \leq C_1 h^p \approx C_2 N^{-(1/2)p} \quad (2.17)$$

O objetivo do refinamento adaptativo versão h é atingir esta taxa de convergência de maior ordem e encontrar solução com a precisão especificada a um custo computacional mínimo.

Mesmo em problemas que não apresentem singularidade, o uso do refinamento adaptativo é vantajoso porque neste caso o valor das constantes C_1 e C_2 são inferiores aos encontrados no uso de refinamento uniforme [20].

2.2.2 TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O REFINAMENTO p

No refinamento versão p , o número de elementos na malha é fixado enquanto a ordem dos elementos é modificada. Neste caso, a estimativa de erro, de acordo com Babuska [18], obedece à relação

$$\|e\| \leq C N^{-\beta} \quad (2.18)$$

onde β é uma constante positiva que depende da suavidade da solução analítica sobre o domínio do problema e da qualidade da malha de elementos finitos. No caso de refinamento p uniforme verifica-se a relação $\beta = \lambda$, e, neste caso,

a taxa de convergência obtida é o dobro da taxa observada no refinamento h uniforme.

2.2.3 TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O REFINAMENTO h - p

No refinamento h - p um rearranjo ótimo da malha é utilizado simultaneamente com uma distribuição ótima da ordem p dos elementos sobre o domínio. Neste caso a taxa de convergência obtida tem a forma exponencial [16]

$$\|e\| \leq C e^{-\gamma N^\theta} \quad (2.19)$$

onde γ e θ são constantes positivas dependentes da suavidade da solução analítica sobre o domínio do problema e $\theta \geq 1/3$.

2.3 ESTIMATIVAS DE ERRO *A-POSTERIORI*

As técnicas de estimativa de erro após a obtenção da solução numérica (*a-posteriori*), permitem uma descrição quantitativa da distribuição de erro sobre o domínio discretizado podendo ser diretamente utilizadas para a geração de malhas adaptativas. As técnicas de estimativa de erro *a-posteriori* disponíveis na literatura são geralmente classificadas em dois tipos principais:

A) Estimativas de erro que usam os resíduos da solução de elementos finitos. Expressões para a avaliação do erro de discretização a nível de elemento são apresentadas por Babuska e Rheinboldt [5-7] em problemas bidimensionais. Estas expressões baseiam-se no resíduo obtido no domínio do elemento após a inserção da solução de elementos finitos na equação de equilíbrio do problema $r = Lv^h - q$, e nas descontinuidades em valores de tensões nos contornos entre

elementos.

B) Estimativas de erro que utilizam técnicas de pós-processamento dos resultados numéricos para obter uma solução de ordem maior que a fornecida diretamente pelo método numérico. As técnicas de estimativa de erro que utilizam os resíduos e aquelas de pós-processamento da solução numérica relacionam-se para elementos lineares, conforme demonstrado por Rank e Zienckiewicz em [21].

As técnicas de estimativa de erro classificadas neste último tipo são as que propiciam uma implementação computacional mais simples e eficiente. O estimador de erro abordado neste trabalho, proposto por Zienckiewicz e Zhu, pertence a este tipo e é aplicável a elementos de qualquer ordem, ele utiliza um campo de tensões contínuo (suavizado) sobre o domínio como uma estimativa para a solução analítica do problema para obter via norma de energia uma estimativa de erro $\|e\|_1$ a nível de elemento. Este estimador de erro têm sido utilizado com sucesso em análises adaptativas em diversos tipos de problemas. Como em aplicações na solução de problemas de elasticidade plana [15], placas [26] e conformação mecânica utilizando formulação euleriana [27]. Habraken [25] apresenta um estimador de erro baseado nas idéias de Zienckiewicz para aplicação em conformação mecânica utilizando formulação lagrangeana.

A maior vantagem em utilizar uma solução pós-processada para a avaliação do estimador de erro é a possibilidade de se ter estimativas de erro não apenas a nível global mas também a nível de elemento e, adicionalmente, dispõe-se

também de uma estimativa de erro pontual.

2.3.1 O ESTIMADOR DE ERRO Z^2 (ZIENCKIEWIZ-ZHU)

Na análise de um problema físico genérico, em que não se conhece o campo de tensões σ correspondente à solução analítica (“exata”) do problema, a avaliação do erro utilizando a norma de energia descrita na equação 2.13 é impossível.

Uma estimativa para o erro $\|e\|$ pode ser obtida se conhecida, através de algum critério numérico, uma solução σ^* para o campo de tensões que possua uma melhor precisão que a solução σ^h fornecida pelo MEF. Assim, adota-se a aproximação

$$\sigma \approx \sigma^* \quad (2.20)$$

e nos procedimentos discutidos neste trabalho uma representação de σ^* é obtida a partir de seus valores nodais σ^* na forma

$$\sigma^* = P\bar{\sigma}^* \quad (2.21)$$

onde P são funções de interpolação. Usualmente, as mesmas funções utilizadas pelo MEF na discretização dos deslocamentos são empregadas, isto é, $P = N$.

Aplicando-se a definição de norma de energia na equação (2.13) uma estimativa para o erro de discretização associado ao MEF reduz-se a

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma^h)^t D^{-1} (\sigma^* - \sigma^h) d\Omega \quad (2.22)$$

Neste trabalho, a estimativa de erro é calculada a nível local (elemento) e posteriormente obtida a nível global através da relação (2.14). A estimativa

para o erro relativo na norma de energia $\bar{\eta}$, partindo da definição na equação (2.15), é calculada adotando-se as aproximações $\|u\| \approx \|\bar{u}\|$ e $\|e\| \approx \|\bar{e}\|$ e, através da relação

$$\|\bar{u}\|^2 = \|u^h\|^2 + \|\bar{e}\|^2 \quad (2.23)$$

obtem-se

$$\bar{\eta} = \frac{\|\bar{e}\|}{\sqrt{\|u^h\|^2 + \|\bar{e}\|^2}} \quad (2.24)$$

onde $\|u^h\|^2$ é o dobro da energia de deformação obtida da solução numérica e $\|\bar{e}\|^2$ refere-se ao erro medido pela norma de energia.

A qualidade da estimativa de erro depende dos valores numéricos do campo de tensões σ^* obtido, e pode ser avaliada através do índice de efetividade

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (2.25)$$

Neste ponto o processo de avaliação do erro é dependente da estratégia a ser empregada na obtenção de σ^* . Considerando-se a formulação do MEF aplicado a problemas de elasticidade em termos de deslocamentos, adota-se um campo de deslocamentos de continuidade C^0 sobre o domínio do problema. Como consequência o campo de tensões obtido da diferenciação das componentes do campo de deslocamentos apresenta valores descontínuos nos contornos dos elementos utilizados para a discretização do domínio.

Através de técnicas de suavização (projeção) do campo de tensões pode-se obter um campo de continuidade C^0 que satisfaça a condição de continuidade

das tensões nos contornos dos elementos. Este campo de tensões suavizado é então adotado como uma estimativa para a avaliação da solução exata. A figura (2.2) ilustra, para o caso unidimensional, o significado físico do campo suavizado obtido na discretização com elementos lineares.

Fig 2.2 Diferenças entre o campo de tensões suavizadas e o campo de tensões do MEF em 3 elementos unidimensionais.

Para obtenção deste campo suavizado σ^* várias estratégias podem ser adotadas. Uma das primeiras alternativas propostas por Zienckiewicz [21] é de determinar-se os valores nodais σ^* do campo suavizado que satisfaçam a relação

$$\int_{\Omega} N^t (\sigma^* - \sigma^h) d\Omega = 0 \quad (2.26)$$

Com a forma adotada para σ^* em (2.21), fazendo-se $P = N$, substituindo-se em (2.26) chega-se ao sistema linear de equações em termos do vetor $\bar{\sigma}^*$, compo-

mentes de tensões nos pontos nodais,

$$\Phi \bar{\sigma}^* = \Psi \quad (2.27)$$

com

$$\Phi = \int_{\Omega} N^t N d\Omega \quad (2.28)$$

que é a matriz de tensões suavizadas e possui a mesma forma numérica que a matriz massa do elemento, e o vetor de tensões suavizadas

$$\Psi = \int_{\Omega} N^t \sigma^h d\Omega. \quad (2.29)$$

A montagem e a solução do sistema de equações em (2.27) requer um esforço computacional semelhante ao da análise numérica para solução dos deslocamentos. Uma alternativa de menor custo é a de obter-se uma forma discreta (diagonal) para a matriz Φ reduzindo assim o esforço computacional na avaliação de $\bar{\sigma}^*$ a uma sequência de operações de divisão. Note-se que a matriz Φ é proporcional a matriz de massa, comumente diagonalizada em muitas classes de problemas de dinâmica estrutural. Uma série de testes numéricos abordando a implementação deste estimador de erro em sua forma consistente e diagonal é obtida em Shephard [25].

A suavização do campo de tensões na forma mais simples obtida através da média dos valores nodais também pode ser utilizada na implementação de estratégias adaptativas. Porém, verificou-se na implementação deste trabalho que ela não fornece resultados satisfatórios para elementos quadráticos.

Outras estratégias podem ainda ser utilizadas, baseadas-se no fato de existirem no domínio do elemento pontos em que as tensões fornecidas pela solução de elementos finitos são as mais precisas. Estes pontos são denominados de superconvergentes porque a solução numérica, em termos das tensões, converge para a solução analítica a uma taxa superior à observada em outros pontos do elemento. A localização dos pontos superconvergentes depende das funções de forma utilizadas na formulação do elemento e geralmente coincide com a posição dos pontos de integração gaussiana do elemento.

Uma estratégia largamente utilizada, proposta por Hinton e Campbell [26], é determinar os valores do campo de tensões nos pontos de integração do elemento e por extrapolação obter valores das tensões para os nós de cada elemento. O valor nodal do campo de tensão é então obtido pela média de valores para os nós compartilhados por diferentes elementos.

A figura 2.3 apresenta a aplicação desta estratégia para o elemento bi-quadrático. Considerando-se um elemento (quadrilátero de 8 nós) com a localização dos pontos de Gauss (2x2) em seu domínio, define-se um campo de tensões bilinear intermediário em cada elemento

$$\sigma = a\xi + b\eta + c\xi\eta + d \quad (2.30)$$

com a determinação das constantes a,b,c e d através da imposição da igualdade $\sigma = \sigma^h$ nos quatro pontos de integração. Se $(\sigma_i^h)^j$ representa a i-ésima componente de tensão no j-ésimo ponto de integração obtida pela aproximação

de elementos finitos, o resultado para as constantes representando a i -ésima componente de tensão será:

$$a_i = \frac{(\bar{\sigma}_i)^2 + (\bar{\sigma}_i)^4 - (\bar{\sigma}_i)^1 - (\bar{\sigma}_i)^3}{4\xi_1} \quad (2.31a)$$

$$b_i = \frac{(\bar{\sigma}_i)^3 + (\bar{\sigma}_i)^4 - (\bar{\sigma}_i)^1 - (\bar{\sigma}_i)^2}{4\xi_1} \quad (2.31b)$$

$$c_i = \frac{(\bar{\sigma}_i)^1 + (\bar{\sigma}_i)^4 - (\bar{\sigma}_i)^2 - (\bar{\sigma}_i)^3}{4\xi_1^2} \quad (2.32c)$$

$$d_i = \frac{(\bar{\sigma}_i)^1 + (\bar{\sigma}_i)^2 - (\bar{\sigma}_i)^3 - (\bar{\sigma}_i)^4}{4} \quad (2.33d)$$

Onde $\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Os valores nodais de σ^n de σ são então calculados introduzindo-se as coordenadas apropriadas em ξ e η .

Quando um nó pertence a n_e elementos Ω_i , a ele estarão associados n_e valores nodais $(\sigma^n)_{\Omega_i}$ e o valor nodal suavizado $\bar{\sigma}^*$ é obtido da média aritmética destes valores nodais,

$$\bar{\sigma}^* = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} (\bar{\sigma}^n)_{\Omega_i}. \quad (2.32)$$

Fig 2.3 Extrapolação de tensões - elemento biquadrático.

Habraken[24] utiliza esta estratégia para obtenção do campo suavizado de tensões ao aplicar o estimador de erro Z^2 na análise de conformação mecânica na formulação lagrangeana.

Note-se que em ambas estratégias citadas impõe-se a nível global uma continuidade de baixa ordem, do tipo C^0 , para o campo de tensões na fronteira entre elementos. Para contornar este problema, Zienkiewicz e Zhu [27-28] propõem um procedimento para a recuperação de valores do campo de tensões no qual uma expansão polinomial única e contínua é empregada sobre um conjunto (patch) de elementos que envolvem o nó considerado no processo de recuperação. Esta expansão é obtida através de um processo de ajuste por mínimos quadrados utilizando-se como valores de amostragem os resultados do campo de tensões nos pontos que apresentam propriedades de super-

convergência. Uma vez que o processo numérico envolve cálculos ao nível de apenas alguns elementos do domínio, seu custo computacional é comparável ao das estratégias mais simples de suavização de tensões e os resultados numéricos mostram uma melhor convergência.

Assim, considerando-se um conjunto (patch) de elementos envolvendo um nó interior da malha de elementos finitos (este será um nó vértice destes elementos), o objetivo deste processo de recuperação é calcular o valor nodal do campo contínuo de tensões $\bar{\sigma}^*$ neste nó de montagem de referência (assembly node) que define o conjunto de elementos ou, eventualmente, em outros nós pertencentes ao conjunto de elementos. Com esta finalidade supõe-se que:

- a) Os valores nodais σ^* pertencem à expansão polinomial σ_p^* .
- b) A expansão σ_p^* tem a mesma ordem das funções de forma adotadas para o elemento e é válida apenas sobre o conjunto de elementos considerado.

A sequência de figuras (2.4) a (2.6) ilustra definições do conjunto de elementos utilizados em análises uni e bi-dimensionais. Na primeira apresentam-se duas malhas de elementos finitos unidimensionais lineares e quadráticos, o ajuste por mínimos quadrados do campo de tensões é realizado com auxílio dos valores nos pontos de integração dos elementos. Na segunda figura o cálculo dos valores nodais superconvergentes para elementos quadrilaterais linear e quadrático é feito através dos valores superconvergentes dos pontos de integração de Gauss. Os valores nodais são determinados pelo processo de recuperação.

Fig 2.4 malha de elementos finitos unidimensional: Δ Pontos de Gauss; $\square$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação .

Fig 2.5 Cálculo dos valores nodais superconvergentes para elementos quadriláteros linear e quadrático: Δ Pontos de Gauss; $\bullet$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação .

Fig 2.6 Cálculo dos valores nodais superconvergentes para elementos triangulares linear e quadrático: Δ Pontos de amostragem; $\bullet$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação .

Na tercela figura o cálculo dos valores nodais superconvergentes para elementos triangulares linear e quadrático é obtido no ponto central do elemento para o caso linear e no ponto médio dos lados para o caso quadrático. Valores nodais são determinados pelo processo de recuperação .

A expansão polinomial utilizada é assim definida na forma

$$\sigma_p^* = Pa \quad (2.33)$$

Onde P contém os termos de expansão polinomial e o vetor a os parâmetros a serem determinados no processo de ajuste por mínimos quadrados. Note-se que no processo de suavização o vetor a deve ser determinado para cada

componente de tensão . A determinação dos termos polinomiais em P depende do tipo de elemento finito utilizado na análise. Em problemas unidimensionais utiliza-se a forma

$$P = [1, x, x^2, \dots, x^p] \quad (2.34)$$

onde p é a ordem do elemento. Em problemas planos, adota-se no caso do elemento triangular linear e quadrático, respectivamente,

$$P = [1, x, y] \quad (2.35)$$

$$P = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (2.36)$$

e no caso do elemento quadrilateral linear (4 nós) e quadrático (9 nós) adotam-se, respectivamente,

$$P = [1, x, y, xy] \quad (2.37)$$

$$P = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2] \quad (2.38)$$

Como mencionado anteriormente, a determinação dos parâmetros $a^t = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ é obtida através de um procedimento de ajuste utilizando o processo de mínimos quadrados com o intuito de minimizar o quadrado das diferenças entre a expansão polinomial adotada e o campo de tensões de elementos finitos $(\sigma^h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2$ em pontos do domínio de amostragem (conjunto de elementos). Assim, defina-se uma função F na forma

$$F(a) = F(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n (\sigma^h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2 \quad (2.39)$$

ou

$$F(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma^h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a)^2 \quad (2.40)$$

onde $n = mk$ é o número de pontos de amostragem definidos no conjunto de elementos sendo k o número de pontos de amostragem definidos em cada elemento m_j ($m_j = 1, 2, 3, \dots, m$) do conjunto de elementos $\Omega_s = \cup_{j=1}^m \Omega_{m_j}$. O processo de minimização da função $F(a)$ envolve a avaliação de derivadas parciais em relação a cada uma de suas variáveis impondo-se então a nulidade destas. Assim, tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2(\sigma^h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a)(-1) \quad (2.41a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^n 2(\sigma^h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a)(-x_i) \quad (2.41b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = \sum_{i=1}^n 2(\sigma^h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a)(-y_i) \quad (2.41c)$$

⋮

onde, igualando a zero cada derivadas parcial obtém-se um sistema de equações na forma:

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix} \sigma^h(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix} P(x_i, y_i)a \quad (2.42)$$

que pode ser reescrito como

$$\sum_{i=1}^n P^t(x_i, y_i) \sigma^h(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n P^t(x_i, y_i) P(x_i, y_i)a \quad (2.43)$$

ou na forma matricial

$$Aa = b \quad (2.44)$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^n P^t(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \quad e \quad b = \sum_{i=1}^n P^t(x_i, y_i) \sigma^h(x_i, y_i) \quad (2.45)$$

A ordem do sistema de equações a ser resolvido é igual ao número de nós do elemento utilizado considerando-se as expansões polinomiais adotadas nas equações (2.34) à (2.38). O processo de recuperação nodal é executado apenas para nós vértice da malha e, uma vez que a matriz A independe de valores do campo de tensões, ela será a mesma para todas as componentes da expansão σ_p^* necessitando ser avaliada apenas uma vez. Assim, o procedimento de suavização é de baixo custo, e comparável ao custo de outras técnicas de suavização menos sofisticadas.

Uma vez que sejam adotados como pontos de amostragem para o processo de recuperação aqueles nos quais a solução de elementos finitos em termos de tensões apresenta uma taxa de convergência superior à verificada em outros pontos, espera-se que os valores das tensões obtidas por esta técnica apresentem também esta propriedade.

Observa-se que com a utilização desta estratégia, haverá uma sobreposição dos valores calculados para nós médios internos e para os nós no interior do elemento. Para estes nós ocorrerão dois valores determinados por expansões definidas em diferentes domínios de amostragem, e adotar-se-á como valor final

a média aritmética destes dois valores. Note-se que os valores recuperados nos nós de montagem (assembly node) são únicos.

No caso dos elementos de um domínio de amostragem pertencerem ao contorno observam-se situações mais complexas. Nestes casos a definição de conjunto de elementos na forma descrita acima pode envolver apenas dois ou, eventualmente, apenas um elemento. Zienckiewicz apresenta uma definição de conjunto de elementos de contorno a ser adotado nestes casos na forma ilustrada na figura (2.7) que, porém não é adotada neste trabalho.

Fig 2.7 Estratégia de suavização para valores nodais no contorno: Δ Pontos de amostragem; $\bullet$ Valores nodais determinados pelo processo de recuperação .

Como generalização neste trabalho utilizam-se os conjuntos de elementos

mostrados nas figuras 2.5 e 2.6 para avaliar também os valores de tensão nos nós do contorno.

2.4 TESTES NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados dois testes numéricos que ilustram a técnica de recuperação por conjunto de elementos do campo de tensões de elementos finitos. O propósito aqui é validar a aplicação do método na estimativa do erro cometido com as aproximações do MEF objetivando análises numéricas h-adaptativas.

Fig 2.8 Cilindro de paredes espessas.

No primeiro exemplo considera-se o problema de um cilindro de paredes espessas ($b/a = 2$) submetido a pressão interna p_i com discretização numérica, condições de contorno, constantes de material e carregamento conforme especificados na Figura 2.8. A solução analítica deste problema para o campo de tensões em função da posição radial r fornece [29]

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (2.46a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (2.46b)$$

onde a e b são os raios interno e externo do cilindro.

Uma sequência do refinamento é utilizada para a análise pelo MEF utilizando elementos quadrilaterais linear e quadrático (9 nós). Para o elemento linear foi utilizada uma sequência de cinco malhas com 220, 840, 1860, 3280 e 5100 graus de liberdade. A figura 2.9 (a) e (b) ilustram os resultados para as componentes de tensão do estado axissimétrico observados para estas malhas no ponto C da parede interna do cilindro e de coordenadas polares $(r, \theta) = (1.0, 45^\circ)$ são apresentados os valores numéricos obtidos através da técnica de recuperação por conjunto de elementos e média nodal. Na figura (2.10) apresentam-se os resultados das componentes de tensão para o ponto B $(r, \theta) = (1.5, 45^\circ)$, a figura (2.11) ilustra os resultados no ponto D $(r, \theta) = (1.0, 0^\circ)$.

Fig 2.9 Tensões no ponto C da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy} .

Fig 2.10 Tensões no ponto B da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy} .

Fig 2.11 Tensões no ponto D da malha;(a) σ_x ,(b) σ_y ,(c) σ_{xy} .

Como observado, os resultados numéricos com a técnica de recuperação por conjunto de elementos apresentam uma convergência para a solução analítica superior à técnica de média nodal exceto na componente σ_{xy} do ponto B. Esta superioridade nos resultados também foi verificada em outros pontos do domínio. Nos pontos apresentados nas Figs 2.9 a 2.11, o erro percentual para os valores numéricos da malha final associados à recuperação por conjunto de elementos está entre 0.007% e 0.2%, enquanto a técnica de média nodal apresenta valores numéricos com erro percentual entre 0.04% e 9.8%.

Na análise com o elemento quadrático foi utilizada uma sequência de 3 malhas com 840, 3280 e 4704 graus de liberdade. A figura (2.12) ilustra os resultados numéricos obtidos para estas malhas no ponto D do modelo (coordenadas polares $(r, \theta) = (1.0, 0^\circ)$) utilizando-se três técnicas de suavização de tensões : a recuperação por conjunto de elementos, a recuperação utilizando procedimentos de extrapolação e a média nodal. As figuras (2.13) e (2.14) apresentam a evolução numérica com estas técnicas nos pontos C $(r, \theta) = (1.0, 45^\circ)$ e B $(r, \theta) = (1.5, 45^\circ)$ respectivamente.

Fig 2.12 Tensões no ponto D da malha; (a) σ_x , (b) σ_y , (c) σ_{xy} .

Fig 2.13 Tensões no ponto C da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy} .

Fig 2.14 Tensões no ponto B da malha; (a) σ_x , (b) σ_{xy} .

Dos resultados apresentados, observa-se que a técnica de recuperação por conjunto de elementos apresenta desempenho de convergência numérica igual ou superior às demais técnicas. Todas as técnicas apresentam um erro percentual mínimo de 0.04% nos valores de tensões para a malha final porém, o erro percentual máximo é de 0.08% ,0.217% e 0.668% para as técnicas de recuperação por conjunto de elementos, extrapolação e média nodal respectivamente.

No segundo exemplo considera-se o problema de uma viga bi-apoiada submetida a um carregamento distribuído. As informações acerca da geometria e carregamento do problema estão descritas na figura 2.15. A condição de simetria do problema em relação ao eixo y permite a utilização do modelo numérico indicado com as condições de contorno: $u(x, y) = 0$ em $x = 0$ e $v(x, y) = 0$ nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$.

O campo de tensões analítico, fornecido pela teoria da elasticidade [29], é

$$\sigma_x = -\frac{3q}{4c^3}(x^2y - \frac{2}{3}y^3) + \frac{3q}{4c}(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5})y \quad (2.47a)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3) \quad (2.47b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x \quad (2.47c)$$

onde $I = \frac{2c^3}{3}$ é o momento de inércia da seção transversal da viga de espes-

sura unitária.

Malhas (elemento linear)	$E = 1.0$	$\nu = 0.3$
1 - 2 x 4 elem. - 24 g.lb.	$q = 1.0$	
2 - 4 x 8 elem. - 80 g.lb.	$l = 0.5$	$c = 0.5$
3 - 8 x 16 elem. - 288 g.lb.		
4 - 16 x 32 elem. - 1088 g.lb.		
5 - 32 x 64 elem. - 4224 g.lb.		

Fig 2.15 (a) Viga submetida a carregamento uniforme.(b) Malha inicial e condições de contorno.

Neste problema também utilizou-se uma sequência de refinamento uniforme para a análise pelo MEF empregando-se o elemento quadrilateral linear. A malha inicial está indicada na figura 2.15 (b) e, as malhas utilizadas possuem 24 (inicial), 80, 288, 1088 e 4224 graus de liberdade.

A figura 2.16 apresenta os valores numéricos para o campo de tensões da viga no ponto A obtidos através da técnica de recuperação por conjunto de elementos e por média nodal. Nas figuras 2.17 e 2.18 apresentam-se os valores de tensões nos pontos F e G respectivamente, as componentes de tensão σ_x e

σ_y para o ponto G não são apresentadas pois para todas as malhas o resultado numérico coincidiu com o resultado analítico.

A avaliação do erro percentual associado aos resultados numéricos fornecidos pela última malha indica que o erro percentual para os valores obtidos pela técnica de recuperação por conjunto de elementos é sempre inferior ao erro percentual dos valores obtidos por média nodal. No ponto F (de maior discrepância) o erro percentual para o valor obtido por média nodal é de 11.62% enquanto que a outra técnica fornece um erro de 1.7%.

Fig 2.16 Tensões no ponto A da malha.

Fig 2.17 Tensões no ponto F da malha.

Fig 2.18 Tensões no ponto G da malha.

TÉCNICAS DE ADAPTAÇÃO .

No capítulo anterior, foram apresentadas técnicas de estimativa de erro de discretização associados à malha de elementos finitos. Estas técnicas permitem a quantificação do erro tanto a nível global (estrutura) quanto a nível local (elemento). Neste capítulo abordam-se técnicas de adaptação da malha. O objetivo destas técnicas de adaptação é estabelecer critérios e estratégias de modificação da malha que utilizem as informações geradas durante a etapa de estimativa de erro para obter uma malha que atenda ao nível de erro pré-especificado pelo usuário. É importante que a estratégia de adaptação adotada elimine a influência das singularidades sobre o problema (caso elas existam) obtendo-se desta forma a taxa de convergência máxima prevista pela teoria de aproximação do MEF.

Durante o processo de adaptação de uma malha de elementos finitos, dois tipos de estratégias disponíveis na literatura podem ser utilizados: a) A adaptação por enriquecimento de malha e b) a adaptação por regeneração de malha (remalhamento). No primeiro caso, a modificação da malha é feita localmente (nos elementos que possuem um maior nível de erro). No segundo caso, a modificação ocorre a nível global; a malha é completamente redefinida utilizando critérios que procuram determinar uma sequência de malhas ótimas para o processo de adaptação . Neste trabalho implementou-se uma estratégia de remalhamento pelo fato desta propiciar um processo de adaptação mais eficiente apresentando um menor número de passos necessário para atingir-se a solução final.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: A seção 3.1 apresenta os critérios de refinamento e as estratégias de adaptação para procedimentos adaptativos por enriquecimento de malha, na seção 3.2 apresentam-se os critérios de refinamento e as estratégias de adaptação para procedimentos adaptativos por regeneração de malha (remalhamento) e, na seção 3.2 apresentam-se considerações a respeito das vantagens e desvantagens das duas alternativas de adaptação .

3.1 CRITÉRIOS PARA ADAPTAÇÃO POR ENRIQUECIMENTO DE MALHA

O objetivo desta seção é ilustrar como o conceito de erro medido pela norma da energia de deformação pode ser utilizado nos critérios de refinamento da malha e apresentar algumas alternativas para estratégias de adaptação por enriquecimento de malha.

3.1.1 CRITÉRIOS PARA REFINAMENTO DA MALHA

No processo adaptativo torna-se necessário definir-se dois tipos de critérios para o refinamento da malha de elementos finitos: um critério global que determina se a malha deve ser modificada e um critério local que define as regiões (elementos) da malha que necessitam ser modificados. Nesta seção é apresentada uma alternativa de critério global e duas alternativas de critérios locais que podem ser utilizadas num processo de adaptação por enriquecimento de malha.

O critério global mais simples a ser adotado é o de limitar o erro relativo à norma de energia $\bar{\eta}$, a um valor máximo especificado η^* . Desta forma, uma malha é considerada ótima quando é satisfeita a relação

$$\bar{\eta} \leq \eta^* \quad (3.1)$$

Usualmente em problemas de engenharia um valor de $\eta = 5\%$ é satisfatório.

Caso a malha não atenda a relação (3.1) torna-se necessário determinar os elementos que devem ser adaptados (critério local). Uma alternativa [30] é adaptar os elementos possuindo um erro estimado $\|\bar{e}\|_i$ superior a uma fração γ do erro estimado máximo (máximo $\|\bar{e}\|_i$).

$$\|\bar{e}\|_i \geq \gamma(\text{máximo}\|\bar{e}\|_i) \quad (3.2)$$

A definição de malha ótima requer uma distribuição uniforme do erro sobre a malha. Assim, estabelece-se uma segunda alternativa do critério de refinamento dos elementos considerando que o erro admissível para a malha seja apenas uma fração da energia de deformação da estrutura obtida do erro relativo na norma de energia $\bar{\eta}$. Assim tomando-se

$$\bar{\eta}\|u\|^2 \approx \bar{\eta}(\|u^h\|^2 + \|\bar{e}\|^2) \quad (3.3)$$

em que cada elemento o erro estimado $\|\bar{e}\|_i$ não possa exceder ao valor limite

$$\bar{e}_m = \bar{\eta} \left(\frac{\|u^h\|^2 + \|\bar{e}\|^2}{m} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

onde m é o número de elementos na malha. Definindo-se então a razão

$$\xi_i = \frac{\|\bar{e}\|_i}{\bar{e}_m} \quad (3.5)$$

um elemento deve ser subdividido sempre que $\xi_i > 1$, e, nos casos em que uma economia computacional maior é desejada, uma estratégia de desrefinamento também deve ser aplicada para os elementos em que $\xi_i < 1$.

3.1.2 ESTRATÉGIAS DE ADAPTAÇÃO POR ENRIQUECIMENTO DE MALHA

Após a escolha dos critérios de refinamento, é necessário adotar-se uma estratégia de adaptação aplicada aos elementos candidatos ao refinamento. Para evitar um refinamento excessivo da malha é necessário limitar o nível de refinamento nestes elementos em cada passo de adaptação. Tomando-se como exemplo o elemento quadrilateral, pode-se estabelecer este limite impondo que em cada refinamento este elemento seja subdividido em quatro elementos do mesmo tipo conforme ilustrado na figura 3.1. Observe-se o aparecimento dos nós b e c na interface entre o elemento adaptado e seus elementos vizinhos. Estes nós são denominados irregulares pois a formulação dos elementos vizinhos não considera a sua existência, tornando o campo de deslocamentos incompatível na aresta.

Fig 3.1 Exemplo de adaptação numa malha de elementos quadriláteros; (a) # elemento a ser subdividido. (b) • nó irregular.

A presença destes nós irregulares na malha de discretização torna necessária a utilização de equações de restrição (constraint equations) na análise, que prescrevem a condição de que os deslocamentos destes nós irregulares sejam completamente determinados em função dos deslocamentos dos nós adjacentes conforme ilustrado na figura 3.2 a implementação destas equações de restrição resulta em um acréscimo no esforço computacional da análise numérica [31].

$$u_3 = u_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right) + u_2 \frac{a}{l}$$

$$v_3 = v_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right) + v_2 \frac{a}{l}$$

Fig 3.2 Imposição das equações de restrição associadas a um nó irregular de uma malha quadrilateral; • nó regular ○ nó irregular.

Várias estratégias podem ser utilizadas com o intuito de se evitar o surgimento de nós irregulares na malha de elementos finitos durante a análise adaptativa:

- a) A utilização de elementos triangulares e estratégias de adaptação apropriadas pro-

postas por Wyberg [32] evitam o surgimento de nós irregulares conforme ilustrado na figura 3.3. Com esta estratégia o conjunto T_e de elementos triangulares candidatos ao refinamento tem seus elementos subdivididos em quatro triângulos na forma mostrada pela figura 3.3 (a) , enquanto que elementos não pertencentes a T_e e nos quais surgem nós irregulares com a subdivisão são refinados na forma mostrada em 3.3 (b)-(d). Em 3.3 (b) apresenta-se um elemento com um nó irregular originado da subdivisão de um elemento vizinho, o elemento é subdividido em dois triângulos. Em 3.3 (c) e (d) apresentam-se os casos em que surgem dois e três nós irregulares, o elemento é subdividido em três novos elementos. Caso sejam necessários outros passos de refinamento na malha os triângulos na forma 3.3 (b) originarão elementos muito distorcidos. Para estes elementos é necessário adotar-se uma estratégia específica mostrada na Fig 3.4 (a) em que o elemento candidato ao refinamento é subdividido em três novos elementos. No caso de aparecerem nós irregulares uma nova subdivisão é adotada, como indicado na Fig 3.4 (b), em duas possibilidades. Outras alternativas podem ainda ser adotadas utilizando-se a estratégia de elementos triangulares, como proposto por Rivara[33], porém ela não pode ser estendida para o caso de elementos quadriláterais.

Fig 3.3 Refinamento de um triângulo T : • nó irregular (a) $T \in T_e$. (b,c,d) $T \notin T_e$.

Fig 3.4 Refinamento de um triângulo T resultante do refinamento apresentado na figura 3.3(b).

b) Uma segunda alternativa é implementar-se elementos de transição [34] [35] e utilizá-los em substituição aos elementos vizinhos a elementos refinados como ilustrado na figura 3.5. Porém, esta estratégia exige modificações substanciais no esquema de integração numérica das equações de equilíbrio [34].

Fig 3.5 Elementos de transição utilizados em estratégias adaptativas.

c) Shephard et al [36] apresenta uma estratégia de geração de malha utilizando técnicas de modelagem de sólidos. Esta estratégia de geração de malha permite que a malha seja refinada localmente sem que ocorra o surgimento de nós irregulares. Porém, ela requer um algoritmo e uma estrutura de dados mais complexa que as demais técnicas apresentadas.

3.2 CRITÉRIO PARA GERAÇÃO POR REMALHAMENTO

Por se basear na introdução de graus de liberdade em algumas regiões da malha pré-existente, as estratégias citadas acima são classificadas na categoria de adaptação por enriquecimento de malha. Porém, uma estratégia mais eficiente (menor número de passos de adaptação) baseia-se na idéia de remalhamento do domínio do problema. Wyberg[32], Peraire[38-39] e S.H.Lo na ref[37] apresentam exemplos de aplicação desta estratégia de adaptação em problemas planos. O critério para a adaptação da malha através desta estratégia baseia-se nos resultados da teoria de aproximação do MEJ' para a taxa de convergência prevista para o método h. Neste trabalho, implementou-se uma estratégia de adaptação por regeneração de malha na forma apresentada por Peraire[38].

3.2.1 CRITÉRIOS PARA O REFINAMENTO DA MALHA.

O critério de refinamento global adotado está apresentado na seção 3.1.1 (equação 3.1). O objetivo da estratégia de remalhamento é reconstruir a malha que discretiza o domínio de forma que todos os elementos desta nova malha satisfaçam a relação

$$\xi_i \leq 1 \quad (3.6)$$

Para isto, assume-se, a nível de elemento, que a expressão (2.16) seja válida e que não existe influência de singularidades no problema. Desta forma a taxa de convergência satisfaz a equação :

$$\|e\|_i \propto h_i^p \quad (3.7)$$

Onde h_i é a "dimensão" atual do elemento e p é a ordem de interpolação adotada. Considere a malha de elementos finitos com um valor de erro permissível $\bar{\epsilon}_m$. Determina-

se uma nova dimensão $h_{i'}$ para o elemento, que satisfaça a condição

$$\|\bar{e}\|_{i'} \leq \bar{e}_m = \left(\frac{1}{\xi_i}\right) \|\bar{e}\|_i \quad (3.8)$$

usando (3.7)

$$h_{i'} = \xi_i^{-1/p} h_i \quad (3.9)$$

Porém, em problemas envolvendo singularidades a condição (3.7) não é válida em pontos próximos à singularidade, e para levar-se em conta o efeito das singularidades, estabelece-se nestes pontos o critério

$$h_{i'} = \xi_i^{-1/\lambda} h_i \quad (3.10)$$

Desta forma, o novo tamanho h_{novo} do elemento na malha redefinida será fornecido pela expressão

$$h_{novo} = h_i / \xi_i^{\phi_i} \quad (3.11)$$

Onde $\phi_i = 1/p$ quando não existirem singularidades no problema ou o elemento localizar-se muito distante de singularidades e $\phi_i = 1/\lambda$ quando o elemento localizar-se próximo a uma singularidade. O conceito de proximidade de um elemento em relação a um ponto de singularidade está relacionado à maior dificuldade em representar o campo analítico de tensões nestes pontos. O procedimento utilizado na localização de regiões próximas às singularidades será apresentado na próxima seção. Se definirmos $\phi_i = 1/p$ para todos os elementos, haverá um refinamento inadequado nas regiões próximas às singularidades e um número maior de passos de adaptação serão necessários na análise. Se definirmos $\phi_i = 1/\lambda$ para todos os elementos, ocorrerá um refinamento excessivo da malha.

Neste trabalho, adota-se para λ o valor 0.5 que corresponde ao caso de uma trinca em um corpo elástico. Um eventual excesso de refinamento causado por se tomar um valor tão pequeno para λ ocorrerá localmente não afetando significativamente o esforço computacional. Utilizando-se a expressão (3.11) é possível, para cada elemento da malha, obter-se um novo tamanho h_{novo} e associar a cada nó do elemento este valor numérico. Posteriormente, tomando-se a média do conjunto de valores associados à cada nó da malha, obtém-se uma função espaçamento nodal (node spacing function) definida implicitamente em todo o domínio do problema a qual permite associar, através das funções de interpolação do elemento, um valor de espaçamento (positivo) a cada ponto (x,y) do domínio.

Uma vez definida a função espaçamento nodal, o sucesso na implementação desta estratégia de regeneração de malha depende da disponibilidade de geradores de malha que sejam capazes de construir uma malha de elementos finitos a partir de informações fornecidas pela função espaçamento. No próximo capítulo aborda-se a implementação de um gerador de malha de elementos triangulares com esta característica e a sua extensão para a geração de malhas de elementos quadrilaterais.

A razão para o sucesso desta estratégia de regeneração da malha é o fato de que com o refinamento da malha a influência local das singularidades tende a desaparecer e com isto a taxa de convergência prevista para o MEF pode ser obtida.

3.2.2 ESTRATÉGIA PARA A LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES PRÓXIMAS ÀS SINGULARIDADES

Para a localização automática de elementos próximos à singularidades utilizou-se a estratégia proposta por S.H.Lo, Ref[40] através da determinação dos valores numéricos ϕ_i

associados a estes elementos. Define-se a nível de elemento um *índice de concentração de energia de deformação* (ICED) na forma

$$ICED_i = \frac{U_i}{V_i} \quad (3.12)$$

Onde U_i e V_i são a energia de deformação e o volume do elemento respectivamente. Sendo U_i relacionado a $\|u^h\|$ pela expressão

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \sigma^{ht} D^{-1} \sigma^h d\Omega_i = \frac{1}{2} \|u^h\|_i^2 \quad (3.13)$$

Define-se então o *índice global de concentração de energia de deformação* IGCED na forma

$$IGCED = \frac{U}{V} \quad (3.14)$$

Onde U e V são a energia de deformação e o volume totais da estrutura, respectivamente. Para a comparação entre elementos define-se uma variável adimensional φ_i para cada elemento

$$\varphi_i = \frac{ICED_i}{IGCED} \quad (3.15)$$

O valor numérico associado a φ_i indicará se o elemento localiza-se próximo ou não a uma singularidade. Para isto, define-se uma tolerância ε e assume-se que um elemento não está próximo a uma singularidade quando satisfaz a relação $\varphi_i < \varepsilon$ e neste caso adota-se $\phi_i = 1/p$. Quando o elemento apresenta um valor ϕ_i tal que $\phi_i \geq \varepsilon$ será considerado próximo a uma singularidade e terá um valor ϕ_i obtido pelo procedimento mostrado abaixo:

Determina-se o valor máximo do índice de concentração de energia de deformação da malha

$$ICED_m = \max_{i=1,M}(ICED_i) \quad (3.16)$$

e

$$\varphi_m = \frac{ICED_m}{IGCED} \quad (3.17)$$

Se $\varphi_m \geq \varepsilon$ os valores de ϕ_i para elementos satisfazendo $\varphi_i = \varphi_m$ são arbitrados como $1/\lambda$. Para elementos satisfazendo $\varepsilon \leq \varphi_i < \varphi_m$ o valor de ϕ_i estará entre $1/\lambda$ e $1/p$. Neste trabalho, adota-se uma função linear de interpolação para determinar-se os valores de ϕ_i

$$\phi_i = \frac{1}{2} \left[(1 - w_i) \frac{1}{\lambda} + (1 + w_i) \frac{1}{p} \right] \quad (3.17)$$

Onde w_i é um parâmetro dependente de φ_i satisfazendo as condições $w_i = -1$ quando $\varphi_i = \varphi_m$ e $w_i = 1$ quando $\varphi_i = \varepsilon$. Uma expressão para w_i é obtida do fato da influência da singularidade ser diretamente proporcional a quantidade $1/r$ onde r é a distancia entre o ponto do domínio considerado e a singularidade [12]. Assim, considera-se que $w_i(\varphi_i) = A/\varphi_i + B$ onde A e B são constantes numéricas a serem determinadas pelas condições citadas acima. Então obtém-se que

$$w_i = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varphi_m}\right)} \left(\frac{1}{\varphi_i} - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varphi_m} \right) \quad (3.18)$$

Quando houver mais de um ponto de singularidade no domínio do problema, o refinamento mais acentuado ocorrerá no ponto de singularidade mais intensa pois nos elementos próximos a este ponto φ_i apresentará os valores máximos.

3.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ESQUEMAS DE ENRIQUECIMENTO DE MALHA E REMALHAMENTO.

Do exposto são as seguintes as características dos esquemas de enriquecimento e remalhamento.

ENRIQUECIMENTO DE MALHA

- i) A subdivisão de elementos é feita localmente em regiões onde o erro excede um valor permissível.
- ii) Um limite para o nível de refinamento em cada passo da análise deve ser imposto para assegurar uma transição suave no tamanho do elemento, porém, esta imposição impede que uma redução drástica no tamanho do elemento possa ser efetuada caso seja necessário.
- iii) O surgimento de nós irregulares exige que o uso de equações de restrição (constraint equations) ou de esquemas especiais de subdivisão de elementos ou ainda de elementos de transição .
- iv) O enriquecimento local da malha, seja através do método p ou do método h, resulta em cada passo de adaptação num tempo de computação inferior ao necessário para o remalhamento de todo o domínio do problema.

REMALHAMENTO

- i) O domínio do problema é re-discretizado baseando-se na malha existente e em uma função de espaçamento nodal obtida a partir dos resultados da análise numérica para esta malha.
- ii) O processo de remalhamento torna-se indispensável em problemas nos quais o corpo sofre grandes deformações e os elementos apresentam-se severamente distorcidos.
- iii) O refinamento e desrefinamento da malha podem ser efetuados num mesmo passo de remalhamento.
- iv) Testes numéricos apresentados nas referências [40],[44] e [45], mostram que utilizando

a estratégia de remalhamento, a malha ótima para um nível de erro pré-especificado pelo usuário pode ser obtida com um número de passos de análise adaptativa inferior ao exigido por esquemas de enriquecimento de malha.

GERAÇÃO DE MALHA.

No capítulo anterior o conceito de geração de malha por regeneração de uma discretização inicial do domínio, usualmente com poucos elementos, foi apresentada juntamente com uma metodologia para a construção da função espaçamento nodal (node spacing function) que expressa a densidade de elementos na malha regenerada necessária para atingir-se um nível de erro pré-especificado. Esta função espaçamento é obtida através da metodologia de estimativa do erro de discretização do método numérico, conforme apresentada no Capítulo 2. Uma vez obtida a função de espaçamento nodal e as informações geométricas que definem o domínio do problema, a estratégia adaptativa fica completa com a obtenção de um gerador da malha de discretização do domínio. Neste capítulo apresenta-se a metodologia utilizada para a implementação deste gerador de malhas baseado nestas informações. O procedimento para a geração triangular é apresentado inicialmente e, posteriormente, sua extensão para o caso de geração quadrilateral. O capítulo está organizado em oito seções. Na primeira, são descritas algumas metodologias de triangularização publicadas na literatura, enquanto que na segunda define-se o problema de remalhamento de um domínio discretizado. As considerações básicas da estratégia de geração são apresentadas na terceira seção e, nas seções quatro a sete descreve-se as etapas do processo de geração de malhas triangulares. Finalmente, na seção oito é apresentada a extensão da metodologia para a geração de malhas quadrilaterais.

4.1 ALGORITMOS PARA TRIANGULARIZAÇÃO DO DOMÍNIO

Vários algoritmos voltados para a geração automática de malhas têm sido propostos na literatura nos últimos anos e, em sua maioria, enfocam procedimentos de triangularização do domínio a partir das informações da geometria do problema. Shephard [41] apresenta uma revisão dos vários algoritmos para a geração de malhas deste tipo. A vantagem de se utilizar geração de malhas triangulares reside no fato de ser esta a forma mais fácil de construir a discretização de um domínio de contorno geométrico arbitrário. Este fato é particularmente importante quando há necessidade de haver uma transição no tamanho dos elementos que definem a malha. Alguns dos algoritmos mais representativos da técnica são : a) A técnica frontal (front technique) proposta por S.H.Lo [43] na qual todos os nós do domínio são introduzidos anteriormente à triangularização do domínio, b) a técnica frontal com avanço (advancing front technique) proposta por Peraire et al [38] utilizada neste trabalho por permitir uma implementação simples e a possibilidade de extensão para a geração de malhas quadrilaterais, c) a técnica de triangularização baseada nas isolinhas da função espaçamento, apresentada por Wyberg[32], e investigada mais recentemente por Lo [40] e d) a abordagem de geração de malha pelo uso de técnicas de modelagem de sólidos apresentada por Shephard[36].

4.2 ALGORITMO DE TRIANGULARIZAÇÃO (DEFINIÇÃO DO PROBLEMA)

O problema de remalhamento em análise bidimensional é definido da seguinte forma: Considere-se um domínio Ω bidimensional e uma discretização de elementos finitos para Ω em termos de um conjunto $\pi = \Delta_i, i = 1, N_e$ de triângulos, onde Δ_i é o i -ésimo elemento

triangular e N_e é o número de elementos triangulares do conjunto π , juntamente com uma função espaçamento nodal $h=h(x,y)$, para todo $(x,y) \in \Omega$, define-se como remalhamento a discretização do domínio Ω baseando-se na malha existente π e em consistência com a função espaçamento nodal estabelecida.

A função espaçamento nodal que define a densidade dos elementos na próxima discretização pode ser definida explícita ou implicitamente. Na forma explícita, para cada ponto (x,y) do domínio um valor numérico positivo $h(x,y)$ é definido. Em sua forma implícita, a função espaçamento nodal tem os valores definidos nos nós da malha e os valores requeridos em outros pontos do domínio são determinados utilizando-se as funções de interpolação dos elementos. Neste trabalho, com o objetivo de automatizar o processo a função espaçamento nodal é definida implicitamente baseando-se nos resultados da técnica de estimativa de erro *a-posteriori*, na forma mostrada nos capítulos anteriores.

4.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Fornecidas as informações geométricas que definem o domínio do problema, o processo de regeneração da malha triangular é efetuado em três etapas:

a) *Geração dos nós no contorno.* Nós são gerados ao longo do contorno do domínio em número e localizações que dependem da função de espaçamento nodal especificada. Os contornos curvos do domínio são aproximados por segmentos de reta.

b) *Triangularização do domínio.* A construção de elementos triangulares sobre o domínio do problema ocorre paralelamente à criação dos nós interiores ao domínio e segue os procedimentos da técnica frontal com avanço a ser detalhada mais adiante. A densidade dos elementos em cada ponto do domínio é determinada pelos valores da função

espaçamento nodal definidos na malha corrente (malha base).

c) *Suavização da malha.* Após a geração da malha triangular torna-se necessário efectuar um processo de suavização com o intuito de aprimorar a forma dos elementos gerados e eliminar a presença de elementos distorcidos na malha que podem introduzir modos espúrios de deformação na avaliação das equações de equilíbrio.

A malha base utilizada é a discretização corrente de elementos finitos para o domínio Ω com os correspondentes valores da função espaçamento associados aos pontos nodais. O único propósito de uso da malha base é o da interpolação. Nenhuma exigência é requerida no sentido de que a malha base represente com precisão o domínio do problema, mas é desejável que a malha cubra inteiramente o domínio do problema. Exemplos de malha base para um domínio plano são ilustrados na Figura 4.1. O número e a localização dos nós na malha base devem ser escolhidos de forma a propiciarem uma adequada representação da função espaçamento nodal. Em um processo adaptativo a malha base é construída apenas uma vez e corresponde à malha inicial do modelo numérico usualmente contendo poucos elementos. Se após a análise numérica for necessário o refinamento da malha, a malha atual (corrente) da análise servirá como malha base no processo de regeneração da malha. A função espaçamento nodal referida à malha atual é calculada com base no erro máximo pré-especificado pelo usuário e na análise de erro da solução numérica fornecido pela discretização atual.

Fig 4.1 Diferentes malhas base para um domínio plano considerado.

O domínio a ser discretizado é definido pelo contorno constituído por segmentos de reta e curvas. No caso do domínio possuir orifício interno, linhas de corte são adotadas de forma a permitir que o contorno do domínio seja constituído por um “loop” fechado de segmentos de reta e curvas. O número destas linhas de corte é igual ao número de orifícios no interior do domínio. As linhas de corte e os segmentos de contorno são tratados da mesma forma durante o processo de triangularização, exceto durante o processo de suavização da malha em que as primeiras não são consideradas como integrantes do contorno. Os segmentos curvilíneos do contorno são tratados como segmentos de arco de circunferência. A modelagem de curvas genéricas pode ser feita utilizando-se a técnica de splines mas esta estratégia não será abordada neste trabalho. A orientação dos segmentos de contorno e das

linhas de corte é arbitrada neste trabalho no sentido anti-horário de forma que o domínio a ser remalhado está sempre no semi-plano à esquerda do segmento de reta considerado. A figura 4.2 ilustra esta orientação arbitrada para os segmentos de contorno e linhas de corte de um domínio.

Fig 4.2 Segmentos de contorno e linhas de corte de um domínio.

4.4 GERAÇÃO DE NÓS NO CONTORNO

Como afirmado anteriormente, os contornos do domínio são constituídos por conjuntos de segmentos de reta e/ou de circunferência. Durante o processo de geração de nós no contorno cada segmento considerado recebe um número N de nós que depende do valor da função espaçamento nodal para aquele segmento. A posição dos nós gerados também dependerá do comportamento da função espaçamento nodal. O processo de geração de nós é realizado em três fases;

- a) determina-se uma função $\delta(s)$ ao longo do segmento de contorno onde s é um parâmetro associado ao comprimento do segmento do contorno, $0 \leq s \leq 1$.
- b) Através da função $\delta(s)$ determina-se o número de nós a serem definidos no segmento de contorno.
- c) Através da função $\delta(s)$ determina-se a localização dos nós a serem definidos no segmento de contorno. A metodologia para definição da função $\delta(s)$ é discutida no seguinte exemplo:

Considerando-se que em um segmento do contorno de comprimento l_i é alocado um conjunto de pontos de amostragem uniformemente distribuídos ao longo do comprimento, o valor do espaçamento associado a cada ponto de amostragem é calculado através da interpolação na malha base. Com este conjunto de valores numéricos, determina-se a função espaçamento $\delta(s)$ contínua definida ao longo do segmento, o valor desta função em um determinado ponto do segmento é definido por um processo de interpolação linear dos dois valores numéricos associados aos pontos vizinhos de amostragem.

Com o fim de determinar o número de nós a serem gerados, divide-se o segmento de contorno em um número N_i de segmentos de reta, estes segmentos de reta serão referidos como "lados" no decorrer deste trabalho. N_i é calculado como o inteiro mais próximo do valor numérico

$$A_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{1}{\delta(s)} \right) ds \quad (4.1)$$

onde l_i é o comprimento do segmento de contorno. Interpreta-se $\frac{1}{\delta(s)}$ como uma função de densidade nodal ao longo do segmento de contorno.

Na determinação da localização de um novo nó no segmento de contorno associa-se a cada k -ésimo nó n_k gerado ($k=0,1,2,\dots,N_i$) uma posição s_k determinada pela expressão

$$k = \frac{N_i}{A_i} \int_0^{s_k} \left(\frac{1}{\delta(s)} \right) ds \quad (4.2)$$

4.5 LINHA FRONTAL INICIAL

Define-se como linha frontal inicial, no processo de regeneração de malha, o conjunto de lados de todos os segmentos que compõem o contorno discretizado do problema juntamente com os lados pertencentes às linhas de corte existentes em problemas envolvendo domínio multiplamente conexo. A definição destes lados ocorre por ocasião da geração de nós no contorno, na fase inicial do processo de regeneração de malha. A linha frontal é constituída então por uma curva fechada definida por um conjunto de segmentos de reta. Os lados na linha frontal são definidos por dois pontos extremos (nós), e, associa-se a cada lado uma direção arbitrada de forma que a curva fechada tenha uma orientação anti-horária. O número de lados na linha frontal inicial é, por construção, sempre igual ao número de nós no contorno do problema.

4.6 TRIANGULARIZAÇÃO DO DOMÍNIO

No início do processo a linha frontal é constituída por uma sequência de segmentos de reta conectando nós do contorno (cada um destes segmentos de reta é aqui referenciado como "lado"). Neste momento, todos os lados estão disponíveis para a formação de um elemento. Durante todo o processo estes lados são classificados como ativos, e um lado indisponível para a formação de um elemento é classificado como inativo; de forma análoga define-se o conceito de nó ativo e nó inativo. No decorrer do processo de triangularização

a posição da linha frontal é constantemente atualizada e, para cada elemento formado uma nova posição é obtida. A figura 4.3 ilustra este processo de atualização da posição da linha frontal. na fig 4.3(a) a linha frontal se apresenta na posição inicial representada pelo contorno do domínio (todos os lados são ativos). Em 4.3(b) e 4.3(c) são apresentados instantes subseqüentes do processo de triangularização em que se dá a formação de um novo elemento (triângulo) e a correspondente atualização da linha frontal; um lado é retirado da linha frontal no momento em que se torna inativo. Neste caso os lados 12-13 e 13-14 se tornam inativos quando o lado 12-14 é criado.

Fig 4.3 Atualização da linha frontal no decorrer da triangularização do domínio; (a) linha frontal inicial, (b) Estágio do processo de triangularização, (c) atualização da linha frontal.

Fig 4.4 Construção de um elemento triangular.

No processo da geração de elementos triangulares, a formação de um novo elemento envolve as seguintes etapas:

- i) Seleciona-se um lado ativo da linha frontal como base. No início do processo recomenda-se a escolha do lado de menor comprimento, Ref[38]. Iniciado o processo, este lado pode ser um dos lados ativos do último elemento formado.
- ii) Considerando-se que o lado selecionado une os nós A e B, determina-se então o valor de espaçamento δ_M no ponto médio M do lado AB por interpolação através da malha base.
- iii) Defina-se um parâmetro δ_1 de acordo com os seguintes critérios

$$\delta_1 = 0.55AB \text{ se } \delta_M < 0.55AB$$

$$\delta_1 = \delta_M \text{ se } 0.55AB < \delta_M < 2AB \quad (4.3)$$

$$\delta_1 = 2AB \text{ se } 2AB < \delta_M$$

Este critério é proposto por Peraire [38] para assegurar a compatibilidade geométrica e evitar a formação de elementos muito distorcidos. Determina-se um ponto C distante δ_1 de A e B. (Figura 4.4)

- iv) Determina-se todos os nós ativos contidos no interior do círculo de centro C e raio nAB (neste trabalho arbitra-se $n=5$). Elabora-se então uma lista de nós ativos ordenados sequencialmente em função de sua distância ao ponto C com o primeiro nó N_1 sendo o mais próximo ao ponto C, denota-se esta lista por $N_1, N_2, N_3, \dots, N_p$.
- v) Coloque C no início desta lista a não ser que ambas as condições seguintes sejam satisfeitas

$$AN_1 < 1.5\delta_1 \text{ e } BN_1 < 1.5\delta_1 \quad (4.4)$$

- vi) O novo nó N_j procurado é escolhido tomando-se o primeiro nó da lista que satisfaça as condições :

- (a) O interior do triângulo ABN_j não contém nenhum outro nó N_i incluído na lista (excluindo-se o ponto C).
- (b) A reta MN_j não possui interseção com outros lados ativos da linha frontal.

O processo de geração triangular termina quando todos os lados ativos na linha frontal tornam-se inativos.

Algoritmo de busca. Na determinação do valor de δ_M no passo (ii) do processo torna-se necessário localizar o ponto M no interior da malha base para se identificar o elemento

da malha base que contém o ponto. Neste trabalho, utiliza-se uma rotina de busca na forma proposta por Peraire[38] a qual requer para cada elemento o conhecimento de seus elementos vizinhos; conhecidas as coordenadas do ponto M e, selecionado um elemento da malha base para o início da busca, determinam-se as coordenadas de área [42] do elemento em relação ao ponto M . Se todas as coordenadas de área possuírem um valor no intervalo $[0,1]$ o elemento contém o ponto M . Em caso contrário, determina-se o próximo elemento a ser testado através da coordenada de área de valor mínimo como ilustrado na Figura 4.5. Na figura 4.5(b), as coordenadas de área L_i, L_j e L_k do elemento e são avaliadas em relação ao ponto M externo ao elemento e . No caso, $L_i(M) < L_k(M) < L_j(M)$ e o próximo elemento a ser testado é o elemento e_i . Este esquema evita a verificação em todos os elementos da malha base.

Fig 4.5 Exemplo de uso do algoritmo de busca; a) Coordenadas de área: $L_i(M) = A_i/A$, $L_j(M) = A_j/A$, $L_k(M) = A_k/A$, $A = A_i + A_j + A_k$, b) e_i, e_j, e_k elementos vizinhos do elemento e .

4.7 SUAVIZAÇÃO DA MALHA

No processo de suavização da malha, as conectividades dos elementos e nós permanecem inalterados porém, os nós são reposicionados com o objetivo de melhorar-se a forma geométrica dos triângulos. Para isto, desloca-se cada nó interno da malha para o centróide do polígono constituído por todos os elementos que envolvem o nó. A Figura 4.6 ilustra este processo, a nova localização P_i do nó interno i é dada por:

$$P_i = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P_m \quad (4.5)$$

onde M é o número de nós envolvendo o nó i . Durante o processo de suavização de malha são necessários 2 ou 3 passos de reposicionamento em que cada passo é feito para todos os nós interiores da malha.

Fig 4.6 Suavização de malha triangular.

4.8 GERAÇÃO QUADRILATERAL

Além da geração de malhas triangulares apresenta-se neste trabalho um algoritmo para a geração automática de malhas quadrilaterais. A metodologia utilizada baseia-se em duas observações :

- i) Uma região pode ser inteiramente subdividida em quadriláteros se o polígono que constitui o seu contorno possuir um número par de lados.
- ii) Um quadrilátero pode ser constituído por um par de triângulos que partilhem um lado comum.

e uma técnica para a geração de malha quadrilateral utilizando o gerador de malha triangular é implementada. Apresentam-se também técnicas para o aprimoramento da malha gerada.

4.8.1 CONSIDERAÇÕES BÁSICAS

Considerando-se um domínio a discretizar, as etapas para a geração de malha quadrilateral são análogas as efetuadas na geração triangular: (a) Geração de nós no contorno, (b) Construção de elementos quadrilaterais, (c) aprimoramento e suavização de malha. A etapa de geração de nós no contorno segue os mesmos critérios adotados para o processo de geração triangular com a única diferença de que a linha frontal inicial deve ser formada com um número par de lados. A descrição das etapas de geração quadrilateral e o aprimoramento da malha serão feitas nas próximas seções .

Um aspecto importante na construção de um quadrilátero a partir de dois triângulos é a possibilidade de obtenção de quadriláteros com ângulos internos superiores a 180° , conforme mostrado na figura 4.7. Este aspecto, embora dê uma maior flexibilidade ao

processo de geração, exige uma estratégia de eliminação de distorções eventualmente apresentadas pelos elementos gerados.

Fig 4.7 Elementos quadrilaterais obtidos da composição de triângulos: (a) elemento com todos os ângulos internos inferiores a 180° , (b) elemento com ângulo interno igual a 180° , (c) elemento com ângulo interno superior a 180° .

4.8.2 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

Nesta seção as etapas do processo de geração de malha quadrilateral são apresentadas. Consideram-se inicialmente as técnicas utilizadas no processo de geração triangular para se construir dois triângulos que possuam um lado comum. Um quadrilátero é então formado pela combinação destes dois triângulos.

- i) Seleciona-se um lado ativo na linha frontal como uma base para a construção do primeiro triângulo. (o critério de escolha é o mesmo utilizado na geração triangular).
- ii) Constroe-se um triângulo com os nós A, B e C seguindo o processo de geração triangular descrito anteriormente. O nó C é um nó ativo da linha frontal ou um novo nó criado

no interior do domínio a ser discretizado.

- iii) Caso o novo nó selecionado pertença à linha frontal, considera-se uma subdivisão desta em duas linhas frontais SF1 e SF2. Ambas as subdivisões constituem um laço fechado de lados e nós ativos. Nenhuma subdivisão ocorrerá caso o ponto C seja selecionado como um novo nó.
- iv) Considera-se os lados do primeiro triângulo formado ABC, um lado é qualificado como ativo se puder ser utilizado na formação de um novo elemento; caso contrário, ele qualifica-se como inativo.
- v) Seleciona-se um lado ativo do triângulo ABC como uma base para a construção do segundo triângulo. Existem assim três possibilidades:
 - a) Nenhuma subdivisão ocorreu na linha frontal, ou seja, o ponto C foi escolhido como o novo nó na formação do primeiro triângulo ABC e, neste caso, pode-se adotar qualquer lado ativo do triângulo ABC.
 - b) Ocorre a subdivisão da linha frontal, porém, uma das subdivisões é vazia, i.e. não possui lados ativos, e, neste caso, pode-se novamente selecionar qualquer lado ativo do triângulo ABC.
 - c) Ambas as subdivisões SF1 e SF2 contém lados ativos. Neste caso, uma subdivisão SF1 contém um número par de lados ativos e a outra SF2 contém um número ímpar de lados ativos. O lado ativo contido em SF2 e pertencente ao triângulo ABC é o escolhido como base para a construção do segundo triângulo.
- vi) Chamando-se A e C os nós unidos pelo lado ativo selecionado, o segundo triângulo ACD é então construído utilizando o procedimento de geração triangular com um re-

querimento adicional para a seleção do novo nó D; na construção do segundo triângulo ACD as duas subdivisões da linha frontal, eventualmente formadas, terão ambas um número par de lados ativos.

- vii) Neste instante está formado o elemento quadrilateral ABCD na forma ilustrada pela figura 4.8. Na fig 4.8(a) não ocorre a subdivisão da linha frontal na formação do elemento e em 4.8(b), são criadas as subdivisões SF1 e SF2.

Fig 4.8 Geração do elemento quadrilateral ABCD.

Observe-se que nenhuma restrição foi feita quanto à forma deste elemento, qualquer tipo de combinação de um par de triângulos contíguo por um lado é aceita. Esta flexibilidade torna o processo de geração quadrilateral tão efetivo quanto o da geração triangular. O aprimoramento da forma do elemento será discutido na próxima seção .

- viii) Atualizar a linha frontal. Os lados utilizados na formação do novo elemento são retirados e novos lados formados (ativos) são incluídos na linha frontal. Este processo de geração quadrilateral continua até que o número de lados ativos na linha frontal

seja anulado.

O procedimento apresentado é genérico e pode ser aplicado partindo-se da linha frontal inicial obtida pelo processo de geração de nós no contorno. Porém, implementa-se neste trabalho um esquema de geração de uma camada de elementos e nós auxiliares (offset nodes and offset elements) ao longo do contorno (linha frontal inicial) antes de se utilizar o procedimento apresentado. O objetivo da aplicação deste esquema é a obtenção de elementos de forma regular ao longo do contorno. A geração de nós auxiliares inicia-se na linha frontal inicial e é feita considerando-se cada nó ativo e seus lados vizinhos correspondentes. A posição ideal de um nó auxiliar dependerá: (a) dos valores da função espaçamento nodal, (b) do ângulo formado pelos lados ativos vizinhos ao nó ativo considerado. O esquema para a determinação da posição ideal dos nós auxiliares é apresentado a seguir:

Um nó ativo A, os nós ativos vizinhos B e C e os correspondentes lados ativos vizinhos AB e AC que formam um ângulo interno θ estão dispostos como na Figura 4.9. Considere-se o valor médio de espaçamento para os nós A, B e C avaliado na forma

$$\delta(M) = \frac{1}{3}[\delta(A) + \delta(B) + \delta(C)] \quad (4.6)$$

Onde $\delta(A)$, $\delta(B)$, $\delta(C)$ são valores da função espaçamento nodal avaliados nos nós A, B e C respectivamente.

O procedimento adotado dependerá dos diferentes valores do ângulo θ :

- (a) Se $\theta < 120^\circ$, a posição ideal para o nó auxiliares é definida pelo vetor S na forma ilustrada pela figura 4.9

Fig 4.9 posição ideal do nó auxiliar para $\theta \leq 120^\circ$: (a) $\theta \leq 90^\circ$, (b) $\theta > 90^\circ$.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (4.7)$$

onde S_1 e S_2 têm a mesma direção do vetor soma $(\vec{AB} + \vec{AC})$ e,

$$|\mathbf{S}_1| = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) \quad (4.8)$$

- b) Se $120^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$, a posição ideal do nó auxiliar é determinada pelo vetor $\mathbf{S}$ conforme ilustrado na figura 4.10. A direção de $\mathbf{S}$ é determinada por $\vec{AB} + \vec{AC}$ se $\theta < 180^\circ$, $\mathbf{S} \perp \vec{AB}$ se $\theta = 180^\circ$ e $-(\vec{AB} + \vec{AC})$ se $\theta > 180^\circ$.

O módulo de S é dado por

$$|S| = \min(\delta(A), \delta(M)) \quad (4.9)$$

Fig 4.10 posição ideal do nó auxiliar para $120^\circ < \theta \leq 240^\circ$: (a) $\theta \leq 180^\circ$, (b) $\theta = 180^\circ$, (c) $\theta > 180^\circ$.

b) Se $240^\circ < \theta \leq 315^\circ$, são construídos três nós auxiliares. A posição ideal destes nós é representada respectivamente pelos vetores S_1, S_2 e S_3 como ilustrado na figura 4.11.

Observe-se que construtivamente adota-se $S_1 \perp \vec{AC}$ e $S_2 \perp \vec{AB}$

$$|S_1| = |S_2| = \min(\delta(A), \delta(M)) \quad (4.10)$$

com

$$S_3 = S_1 + S_2 \quad (4.11)$$

Fig 4.11 Posição ideal do nó auxiliar para $240^\circ < \theta \leq 315^\circ$.

- d) Se $\theta > 315^\circ$, são construídos cinco nós auxiliares cujas posições ideais são representadas por S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 como ilustrado na figura 4.12. As direções dos vetores S_1, S_2 e S_3 são adotadas com as seguintes características geométricas: $S_1 \perp \vec{AC}$, S_2 na direção $-(\vec{AB} + \vec{AC})$ e $S_3 \perp \vec{AB}$ sendo

$$|S_1| = |S_2| = |S_3| = \min(\delta(A), \delta(M)) \quad (4.12)$$

com

$$S_4 = S_1 + S_2 \quad (4.13)$$

$$S_5 = S_2 + S_3 \quad (4.14)$$

Fig 4.12 Posição ideal do nó auxiliar para $\theta > 315^\circ$.

O procedimento de construção dos elementos auxiliares é análogo ao processo convencional de geração quadrilateral, porém, utilizam-se as posições ideais dos nós auxiliares como uma sugestão inicial para localização no domínio. A linha frontal é atualizada sempre que um elemento auxiliar é formado e o processo cessa quando todos os lados ativos da linha frontal inicial forem utilizados. Deve-se observar que o emprego deste esquema de geração de elementos auxiliares não é obrigatório, porém, fornece um bom ponto de partida para o processo de geração convencional ao produzir elementos de melhor forma ao longo do contorno do domínio.

4.8.3 APRIMORAMENTO DA MALHA

Como discutido anteriormente, o processo de geração quadrilateral, devido à sua flexibilidade, pode gerar elementos distorcidos principalmente em regiões nas quais ocorre uma variação brusca no tamanho dos elementos. Técnicas de suavização e de modificação da malha são utilizados para o aprimoramento da discretização obtida.

4.8.3.1 SUAVIZAÇÃO DA MALHA QUADRILATERAL

O processo de suavização de malha implementado possui as mesmas características do processo implementado para a suavização de malha triangular. Porém, no caso da malha quadrilateral, a nova posição P_i do nó i será dada por (Figura 4.13)

$$P_i = \frac{1}{4M} \sum_{m=1}^M (P_j + P_l + 2P_k) \quad (4.15)$$

onde M é o número de elementos envolvendo o nó i e P_j e P_l são posições dos nós adjacentes a elementos vizinhos e P_k é a posição do quarto nó do elemento E_m . A suavização de malha é o último processo de aprimoramento de malha a ser executado.

Fig 4.13 Suavização de malha quadrilateral.

4.8.3.2 MODIFICAÇÃO DA MALHA QUADRILATERAL

Após a geração de malha, efetua-se a avaliação da relação nó - número de elementos envolventes, denotada por NE (número de elementos que envolvem um nó interior) para uma malha de elementos quadriláteros este número tem um valor ótimo igual a quatro. No caso de uma malha possuir valores de $NE = 4$ para todos os seus nós interiores, muito provavelmente não há a presença de elementos distorcidos. A ocorrência de elementos distorcidos é muito difícil de ser evitada quando se trabalha com variações acentuadas de tamanho do elemento. O fato da função espaçamento local ter sido considerada apenas localmente no decorrer do processo de geração também contribui para o surgimento de elementos distorcidos. Nesta seção, apresentam-se técnicas de modificação de malha que alteram a sua topologia com o objetivo de reduzir o número de elementos distorcidos na malha. As técnicas aqui apresentadas possuem a característica de não alterar a localização dos nós pertencentes ao contorno do domínio.

Eliminação de nó. O processo de eliminação de nó consiste em se percorrer todos os nós interiores da malha e eliminar o nó caso o valor de NE associado a este nó seja dois. Os dois elementos adjacentes ao nó são reduzidos a um único elemento retirando-se os lados comuns conforme ilustrado na figura 4.14.

Eliminação de elemento. Consiste em eliminar o elemento que possuir dois nós (interiores) A e B formando uma das diagonais do quadrilátero e com valores de NE_A e NE_B iguais a 3. No processo de eliminação de elemento as coordenadas destes dois nós são

reduzidas a coordenada de um único nó (o ponto médio), como ilustrado na figura 4.15.

Fig 4.14 Eliminação de nó no processo de modificação da malha quadrilateral para $NE_A = 2$. (nó A é eliminado)

Fig 4.15 Eliminação de elemento no processo de modificação de malha quadrilateral para $NE_A = NE_B = 3$. (elemento E_i é eliminado).

Troca de diagonal. O processo de troca de diagonal examina todos os lados de elemento conectando dois nós interiores. Considerando-se a disposição dos nós no hexágono formado por A,F,D,B,E e C pertencentes aos elementos adjacentes E_i e E_j ilustrado na figura 4.16, a troca de diagonais será considerada apenas se a seguinte condição for satisfeita

$$NE_A + NE_B \geq 9 \quad (4.16)$$

permitindo assim a redução em um elemento dos valores de NE_A e NE_B , já que o ideal é que $NE_A = NE_B = 4$. A diagonal AB do hexágono será trocada pela diagonal CD se

$$(NE_A + NE_B) - (NE_C + NE_D) \geq (NE_A + NE_B) - (NE_E + NE_F) \geq 3 \quad (4.17)$$

ou, pela diagonal EF, se

$$(NE_A + NE_B) - (NE_E + NE_F) \geq (NE_A + NE_B) - (NE_C + NE_D) \geq 3 \quad (4.18)$$

Se nenhuma das condições é satisfeita não haverá troca de diagonal.

Eliminação de lado. O processo de eliminação de lado também verifica todo lado de elemento conectando dois nós interiores. Um lado EF, ilustrado na figura 4.17, será eliminado se ambos os seus nós possuírem valores $NE_E = 3$ e $NE_F = 3$ e nenhum dos elementos adjacentes E_i e E_j possuir um lado pertencente ao contorno do domínio. No processo, os elementos E_i e E_j também são eliminados. um novo lado AD será formado se a seguinte condição for satisfeita:

$$NE_A + NE_D \leq NE_B + NE_C \quad (4.19)$$

caso contrário, o novo lado formado será o lado BC.

Fig 4.16 Troca de diagonal.

Fig 4.17 Eliminação de lado, lado EF é eliminado.

5.0 TESTES NUMÉRICOS.

Testes numéricos são apresentados neste capítulo para demonstrar a performance da estratégia discutida nos capítulos anteriores de análise de problemas lineares pelo método de elementos finitos adaptativos. Os exemplos considerados para análise representam problemas planos discretizados utilizando elementos triangulares linear (T3) e quadrático (T6) e elementos quadrilaterais linear (Q4) e quadrático (Q9). Na avaliação da performance do processo de estimativa de erro, consideram-se como resultados "exatos" para o problema os valores de norma de energia fornecidos na literatura. Estes valores de comparação foram obtidos por dois processos: a) extrapolação dos resultados numéricos a partir de malhas cada vez mais refinadas [42] e b) aplicação de métodos adaptativos mais sofisticados (adaptação h-p) para a análise do problema.

5.1 VIGA CURTA EM BALANÇO SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO.

Deformações planas
 $E = 1.0$ $\nu = 0.3$
 $F = 1.0$

Fig 5.1 Viga curta.

O primeiro problema considera o comportamento de uma viga curta engastada em uma face e submetida a carregamento transversal distribuído conforme mostrado na Figura 5.1. No modelo numérico utilizado a cinemática é do estado plano de deformação. As sequências de malha obtidas na análise ao se utilizar os elementos triangulares (T3, T6) e quadrangulares (Q4 e Q9) estão apresentadas nas figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, respectivamente. Considerando-se a análise com elementos triangulares utilizou-se como critério de parada para o processo adaptativo a obtenção de um valor para η inferior a 5% enquanto que para os elementos quadrilaterais o critério foi de $\eta \leq 7\%$. Em todas as análises estes critérios foram atingidos em dois passos de adaptação, exceto, naquela utilizando o elemento triangular linear (T3) em que foram necessários três passos de adaptação. A Tabela 5.1 apresenta os diversos parâmetros de controle do processo de estimativa de erro para cada malha utilizada. Observe-se que o índice de efetividade θ da análise converge para o valor

1.0 à medida em que as malhas são refinadas. Em alguns casos, devido à aproximação dos resultados numéricos o valor teórico 1.0 é ultrapassado. As taxas de convergência obtidas nas diversas análises estão mostradas na Figura 5.6, indicando que os valores numéricos obtidos convergem para os correspondentes valores teóricos considerando-se o refinamento h -adaptativo: 0.5 para elementos lineares e 1.0 para elementos quadráticos.

Zienkiewicz [45] apresenta a análise deste problema utilizando o elemento quadrilateral linear (Q4) com uma técnica de adaptação por enriquecimento de malha e, partindo de malha inicial idêntica à empregada neste trabalho obtém a solução requerida ($\eta \leq 5\%$) após 6 passos de adaptação de malha. É interessante notar que com a estratégia de enriquecimento de malha a condição $\eta \leq 7\%$ é atingida apenas após 5 passos de adaptação de malha. Y.C.Liu [44] analisa o mesmo problema utilizando elementos quadrilaterais linear e quadrático (Q4 e Q9) e, empregando uma estratégia de adaptação por regeneração de malha distinta da empregada neste trabalho, obtém a solução com a precisão requerida em 2 passos de adaptação partindo da mesma malha inicial. C.K.Lee e S.H.Jo [40] analisam o problema empregando elementos triangulares e uma técnica de regeneração de malha diferente da empregada neste trabalho. A solução requerida, ($\eta \leq 10\%$) para análise com elemento T3 e ($\eta \leq 5\%$) para análise com elemento T6, foi obtida com 3 e 2 passos de adaptação para os elementos T3 e T6 respectivamente, empregando-se a mesma malha inicial aqui utilizada. Estes resultados mostram que as técnicas de remalhamento apresentadas nas referências [44] e [40] e a implementada neste trabalho fornecem a solução requerida em um número de passos de adaptação inferior ao obtido quando se empregam as técnicas de adaptação por enriquecimento de malha propostos na literatura.

(a) malha inicial, $NN = 9$, $NE = 8$

(b) segunda malha, $NN = 160$, $NE = 274$

(c) terceira malha, $NN = 916$, $NE = 1716$

(d) quarta malha, $NN = 1532$, $NE = 2870$

Fig 5.2 Problema 1 analisado com o elemento T3: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento. NN - número de nós ; NE - número de elementos.

(a) malha inicial, $NN = 25$, $NE = 8$

(b) segunda malha, $NN = 100$, $NE = 41$

(c) terceira malha, $NN = 195$, $NE = 82$

Fig 5.3 Problema 1 analisado com o elemento T6: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

(a) malha inicial, $NN = 9$, $NE = 4$

(b) segunda malha, $NN = 122$, $NE = 101$

(c) terceira malha, $NN = 461$, $NE = 414$

Fig 5.4 Problema 1 analisado com o elemento Q4: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

(a) malha inicial, $NN = 25$, $NE = 4$

(b) segunda malha, $NN = 16$, $NE = 81$

(c) terceira malha, $NN = 28$, $NE = 137$

Fig 5.5 Problema 1 analisado com o elemento Q9: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

Fig 5.6 Taxas de convergência para o Problema 1.

Tabela 5.I Viga curta - deformação plana

Solução exata por extrapolação

$$\|u\|^2 = 1.903697$$

Tab 5.I.1 Elemento T3

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ e\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
12	1.232291	0.527282	0.819394	0.64	59.38	42.91
294	1.843924	0.203566	0.244483	0.833	17.72	14.83
1742	1.895953	0.082298	0.088002	0.94	6.38	5.96
2922	1.900362	0.057910	0.057754	1.01	4.18	4.19

Tab 5.1.2 Elemento T6

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ e\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
40	1.764758	0.196159	0.372745	0.53	27.01	14.61
174	1.890383	0.099318	0.115386	0.86	8.36	7.20
312	1.899229	0.059887	0.066847	0.89	4.84	4.34

Tab 5.1.3 Elemento Q4

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ e\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
12	1.548419	0.356668	0.596052	0.60	43.20	27.55
222	1.860717	0.152652	0.207316	0.74	15.02	11.12
864	1.897467	0.075843	0.078926	0.95	5.72	5.46

Tab 5.1.4 Elemento Q9

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ e\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
40	1.828231	0.240623	0.274710	0.876	19.91	17.52
144	1.880203	0.142476	0.153277	0.93	11.09	10.33
230	1.897467	0.087662	0.077588	1.13	5.62	6.35

Tempo de análise computacional

no último passo de adaptação

elemento T3

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	30
Solução do sistema de equações	158
Geração de malha	85
Aprimoramento da malha	97

elemento T6

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	5
Solução do sistema de equações	18
Geração de malha	12
Aprimoramento da malha	17

elemento Q4

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	11
Solução do sistema de equações	47
Geração de malha	27
Aprimoramento da malha	45

elemento Q9

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	3
Solução do sistema de equações	13
Geração de malha	7
Aprimoramento da malha	11

5.2 PLACA QUADRADA COM FURO QUADRADO.

Fig 5.7 Placa quadrada com furo quadrado.

No segundo problema considerado uma placa quadrada é submetida a um carregamento uniforme em uma das faces. Devido às condições de simetria do problema apenas um quarto do domínio é utilizado no modelo numérico que emprega relações de compatibilidade geométrica do estado plano de tensões, conforme mostrado na figura 5.7. As sequências de malha obtidas na análise ao se utilizar os elementos T3, T6, Q4 e Q9 estão mostradas nas figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 respectivamente. Como critério de parada do processo adaptativo utilizou-se o parâmetro η inferior a 7% para os elementos lineares e inferior a 3% para os elementos quadráticos. Em todas as análises estes critérios foram atingidos em três passos de adaptação. Os valores dos parâmetros numéricos de controle do processo de estimativa de erro para os refinamentos subsequentes das malhas estão mostrados na Tabela 5.II. Como no exemplo anterior observa-se a convergência do índice de efetividade θ para o valor teórico 1.0 à medida em que as malhas são refinadas. As taxas de convergência obtidas nas análises estão ilustradas na Figura 5.12 observando-se

a convergência dos resultados numéricos aos valores teóricos.

Este problema foi considerado por C.K. Lee e S.H.Lo na referência [40], utilizando um modelo numérico de elementos triangulares (T3 e T6) e com técnica de remalhamento distinta da empregada neste trabalho. Partindo da mesma malha inicial aqui empregada e utilizando critérios de parada com η inferior a 10% e 5% para os elementos linear e quadrático, respectivamente, os autores obtiveram soluções em 3 passos de adaptação para o modelo de elementos lineares e 2 passos de adaptação para o de elementos quadráticos.

(a) malha inicial, $NN = 21$, $NE = 24$

(b) segunda malha, $NN = 276$, $NE = 478$

(c) terceira malha, $NN = 1499$, $NE = 2828$

Fig 5.8 Problema 2 analisado com o elemento T3: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento. NN - número de nós ; NE - número de elementos.

(a) malha inicial, $NN = 65$, $NE = 24$

(b) segunda malha, $NN = 257$, $NE = 114$

(c) terceira malha, $NN = 507$, $NE = 232$

Fig 5.9 Problema 2 analisado com o elemento T6: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

(a) malha inicial, $NN = 40$, $NE = 27$

(b) segunda malha, $NN = 478$, $NE = 431$

(c) terceira malha, $NN = 1104$, $NE = 1033$

Fig 5.10 Problema 2 analisado com o elemento Q4: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

(a) malha inicial, $NN = 133$, $NE = 27$ (b) segunda malha, $NN = 375$, $NE = 84$ (c) terceira malha, $NN = 855$, $NE = 197$

Fig 5.11 Problema 2 analisado com o elemento Q9: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

Fig 5.12 Taxas de convergência para o Problema 2.

Tabela 5.II Placa Quadrada - Tensão plana

Solução exata por extrapolação

$$\|u\|^2 = 0.3113332$$

Tab 5.II.1 Elemento T3

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
36	0.243354	0.184328	0.2607	0.71	46.72	35.0
529	0.304669	0.072822	0.081636	0.89	14.63	13.1
2958	0.310245	0.031489	0.0329	0.96	5.91	5.64

Tab 5.II.2 Elemento T6

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
120	0.304283	0.052418	0.083962	0.62	15.0	9.46
500	0.310205	0.023973	0.033580	0.71	6.0	4.3
1000	0.311124	0.011676	0.014460	0.81	2.59	2.09

Tab 5.II.3 Elemento Q4

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
72	0.292359	0.118599	0.137744	0.86	24.68	21.42
926	0.309098	0.047069	0.047275	0.99	8.47	8.4
2180	0.310535	0.03546	0.028245	1.08	5.06	5.47

Tab 5.II.4 Elemento Q9

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
252	0.30920	0.044205	0.046181	0.96	8.27	7.92
736	0.310956	0.019796	0.019401	1.02	3.47	3.54
1684	0.311285	0.007271	0.006878	1.05	1.23	1.3

Tempo de análise computacional

no último passo de adaptação

elemento T3

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	38
Solução do sistema de equações	221
Geração de malha	114
Aprimoramento da malha	130

elemento T6

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	20
Solução do sistema de equações	69
Geração de malha	48
Aprimoramento da malha	74

elemento Q4

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	27
Solução do sistema de equações	119
Geração de malha	67
Aprimoramento da malha	111

elemento Q9

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	26
Solução do sistema de equações	119
Geração de malha	62
Aprimoramento da malha	101

5.3 PLACA QUADRADA SOB TRAÇÃO COM DUPLA TRINCA.

Fig 5.13 Placa quadrada com dupla trinca.

O terceiro problema numérico considerado neste trabalho é o de uma placa espessa sob carregamento de tração no seu plano com trincas transversais nos pontos médios das faces livres. Devido à condição de dupla simetria do problema, apenas um quarto do domínio da placa foi considerado para análise, conforme mostrado na Figura 5.13. No modelo numérico a cinemática é do estado plano de deformações e as sequências de malhas obtidas na análise com elementos T3, T6, Q4 e Q9 estão mostradas nas figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17, respectivamente. Como critério de parada utilizou-se no processo de refinamento da discretização valores limites do parâmetro η inferiores a 7% e 5% para os elementos lineares e para os elementos quadráticos, respectivamente. Nas análises estes critérios foram satisfeitos em três passos de adaptação, exceto para a análise com o elemento Q9 que exigiu apenas dois passos de adaptação. Valores dos parâmetros utilizados no controle do processo de estimativa de erro para refinamento crescente da malha estão apresentados na tabela 5.III. Como nos dois exemplos anteriores observa-se a convergência do índice de

efetividade θ para o valor 1.0 à medida em que as malhas são refinadas. A Figura 5.18 ilustra as taxas de convergência dos resultados numéricos obtidos nas análises: os valores obtidos com o procedimento convergem para os valores teóricos.

5.4 ANÁLISE DO MODELO DE VIGA ENGASTADA CONSIDERANDO O DESREFINAMENTO

Para demonstrar a performance da estratégia em análises onde o desrefinamento de malha pode ocorrer considere-se agora o problema de viga curta engastada analisado no primeiro exemplo numérico e apresentado na Figura 5.1. A malha inicial considerada é uniforme com 1860 graus de liberdade ativos representada por elementos triangulares lineares. Neste exemplo, adota-se como critério de parada a obtenção de um valor de η inferior a 15% , portanto superior ao da análise descrita na seção 5.1. Na sequência de malhas apresentada na figura 5.19 a metodologia verifica o critério de convergência da análise em dois passos de adaptação e a malha final mostrada apresenta 158 graus de liberdade ativos.

5.5 LOCALIZAÇÃO DE SINGULARIDADES

Valores do parâmetro $\varphi_i = ICED_i/IGCED$ para os elementos da malha na figura 5.3 (c) são apresentados na figura 5.20. A distribuição de φ_i no domínio mostra que o esquema de localização de singularidades apresentado no capítulo 3 identifica a presença de singularidades e, qualifica a região do domínio quanto à densidade da malha a ser utilizada especialmente quando mais de uma região de singularidade estão presentes no domínio. Observe-se na figura que as faixas de valores de φ_i ($5.8 \leq \varphi \leq 14.0$ e $14.0 \leq \varphi \leq 35.0$) identificam a presença de duas regiões de singularidade localizadas nas quinas da aresta

engastada e, adicionalmente, aquela de maior intensidade situada na quina superior.

(a) malha inicial, $NN = 9$, $NE = 8$

(b) segunda malha, $NN = 100$, $NE = 163$

(c) terceira malha, $NN = 498$, $NE = 931$

(d) quarta malha, $NN = 1199$, $NE = 2280$

Fig 5.14 Problema 3 analisado com o elemento T3: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento. NN - número de nós ; NE - número de elementos.

(a) malha inicial, $NN = 25$, $NE = 8$

(b) segunda malha, $NN = 173$, $NE = 74$

(c) terceira malha, $NN = 490$, $NE = 223$

(d) quarta malha, $NN = 1300$, $NE = 613$

Fig 5.15 Problema 3 analisado com o elemento T6: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento.

(a) malha inicial, $NN = 9$, $NE = 4$

(b) segunda malha, $NN = 83$, $NE = 65$

(c) terceira malha, $NN = 408$, $NE = 373$

(d) quarta malha, $NN = 951$, $NE = 892$

Fig 5.16 Problema 3 analisado com o elemento Q4: (a) Malha inicial, (b)-(d) Malhas obtidas por remalhamento.

(a) malha inicial, $NN = 25$, $NE = 4$

(b) segunda malha, $NN = 295$, $NE = 65$

(c) terceira malha, $NN = 647$, $NE = 149$

Fig 5.17 Problema 3 analisado com o elemento Q9: (a) Malha inicial, (b)-(c) Malhas obtidas por remalhamento.

Fig 5.18 Taxas de convergência para o Problema 3.

Tabela 5.III Placa quadrada com dupla trinca - Deformação plana

Solução exata por extrapolação

$$\|u\|^2 = 1.468742$$

Tab 5.III.1 Elemento T3

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
13	1.146293	0.350698	0.567845	0.62	46.86	31.13
184	1.391038	0.216826	0.278753	0.77	23.0	18.1
971	1.454826	0.103384	0.117963	0.88	9.73	8.54
2346	1.464403	0.066364	0.065875	1.01	5.43	5.47

Tab 5.III.2 Elemento T6

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
42	1.351434	0.416790	0.342502	1.22	28.26	33.75
324	1.435966	0.199663	0.181041	1.11	14.94	16.44
938	1.462344	0.088601	0.079989	1.11	6.6	7.31
2524	1.467662	0.036543	0.032864	1.11	2.71	2.49

Tab 5.III.3 Elemento Q4

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
13	1.226182	0.350265	0.492504	0.71	40.64	30.16
150	1.406525	0.215508	0.249434	0.86	20.58	17.88
788	1.460414	0.087296	0.091256	0.96	7.53	7.20
1856	1.465012	0.063346	0.061069	1.04	5.04	5.23

Tab 5.III.4 Elemento Q9

DOF	$\ u^h\ ^2$	$\ \bar{e}\ $	$\ e\ $	θ	η	$\bar{\eta}$
42	1.376731	0.329098	0.303332	1.08	25.03	27.00
560	1.450192	0.130856	0.1361199	0.96	11.24	10.8
1252	1.467330	0.088318	0.037575	1.02	3.10	3.16

Tempo de análise computacional

no último passo de adaptação

elemento T3

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	23
Solução do sistema de equações	125
Geração de malha	64
Aprimoramento da malha	78

elemento T6

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	41
Solução do sistema de equações	143
Geração de malha	97
Aprimoramento da malha	127

elemento Q4

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	23
Solução do sistema de equações	99
Geração de malha	56
Aprimoramento da malha	94

elemento Q9

etapa	tempo (seg)
Montagem do Sistema de equações	16
Solução do sistema de equações	68
Geração de malha	39
Aprimoramento da malha	60

(a) malha inicial, $NN = 961$, $NE = 1800$

(b) segunda malha, $NN = 171$, $NE = 288$

(c) terceira malha, $NN = 92$, $NE = 148$

Fig 5.19 Sequência de malhas para exemplo de desrefinamento.

Fig 5.20 Valores de φ_i para a malha na figura 5.3(c).

CONCLUSÕES

Técnicas de estimativa de erro e geração de malhas triangulares e quadrangulares de elementos finitos planos são apresentadas e foram implementadas em um algoritmo para a análise de estruturas utilizando modelos planos com cinemática de deformação de estado plano de tensões ou deformações. A análise numérica é executada de forma automática com o mínimo de intervenção do usuário, mesmo em problemas apresentando o fenômeno da concentração de tensões (presença de singularidades). O emprego do índice de concentração de energia de deformação como critério na localização de singularidades do modelo permite que a análise seja realizada sem a necessidade de qualquer informação *a-priori* com respeito a presença de singularidades no domínio.

Nos exemplos apresentados, os resultados numéricos confirmam a convergência do índice de efetividade da análise ao valor unitário, demonstrando a efetividade do estimador de erro empregado. As taxas de convergência para um crescente número de elementos (graus de liberdade) considerado convergem para os valores teóricos preditos para o refinamento *h*-adaptativo e o nível de erro pré-especificado pelo usuário (erro relativo à norma de energia) é satisfeito. Observou-se, durante a implementação, que a utilização do índice de concentração de energia de deformação no esquema de localização de singularidade é uma condição necessária para que sejam obtidos os valores teóricos dos termos de convergência.

Os exemplos mostram que o processo de adaptação por remalhamento fornece uma solução em um número de passos de adaptação de malha semelhante ao obtido por outras técnicas de remalhamento apresentadas nas referências [40] e [43] e inferior ao fornecido pela técnica convencional de adaptação por enriquecimento de malha apresentada na literatura na referência [44]. Observe-se porém, que o esforço computacional envolvido na reconstrução de toda a discretização do domínio é mais elevado que o correspondente à adaptação localizada da malha. Uma provável solução seria a utilização combinada das duas técnicas como proposto por Wyberg[32]: inicia-se a análise com um procedimento de adaptação por remalhamento até atingir-se um resultado intermediário, a partir deste estágio a análise continua com um procedimento de adaptação por enriquecimento de malha até atingir-se a solução final requerida. Este tratamento é porém deixado para um estudo posterior.

A implementação da geração de malha quadrilateral foi realizada baseando-se na técnica de geração de elementos triangulares implementada. Como observado nas análises consideradas, o uso de elementos quadrilaterais oferece uma opção de análise mais econômica que com elementos triangulares, em termos do número de graus de liberdade utilizados, para uma discretização com mesma ordem polinomial.

A técnica de estimativa de erro como apresentada pode ser estendida para aplicações em problemas 3D, requerendo, no entanto, uma investigação de métodos mais robustos e eficientes para a geração e adaptação de malhas em domínios tridimensionais.

Como apresentado, o método adaptativo oferece uma sólida base para a implementação de um método h-p-adaptativo aplicável a problemas planos exigindo níveis de erro inferiores

a 1%, ($\eta < 1\%$). Isto pode ser realizado com a combinação do método h-adaptativo apresentado neste trabalho com um método p de refinamento intercalados em etapas do processo de obtenção da malha, na forma proposta por Zienkiewicz na referência [19].

Neste trabalho, utilizou-se um método direto (Eliminação de Gauss) na solução do sistema de equações do MEF. Propõe-se como sugestão para trabalho futuro a utilização de métodos iterativos ou ainda, a implementação de um renumerador de malha que proporcionaria uma menor largura de banda na matriz e portanto, a redução no esforço computacional nesta etapa da análise.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Babuska, I., Adaptive mathematical modeling, in: J.E.Flaherty,P.J.Palow, M.S.Shephard and J.D.Vasilakis,eds. Adaptive Methods for Partial Differential Equations.(SIAM Philadelphia, PA,1989)1-14.
- [2] Babuska, I. The problem of modeling the elastomechanics in Engineering, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering,82,155-182,(1990)
- [3] Klaus-Jurgen Bathe, et al, On the use of hierarchical models in engineering analysis, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering 82 (1990) 5-26
- [4] Mark S.Shephard, et al. Framework for the reliable generation and control of analysis idealizations, Computer Methods Applied in Mechanics and Engineering,82,257-280,(1990)
- [5] Babuska,I. and Rheiboldt, W.C., *A-posteriori* error estimates for finite element problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering,12, 1597-1615,1978.
- [6] Babuska, I. and Rheiboldt, W.C., Error estimates for adaptive finite element computations, SIAM Journal of Numerical Analysis,15,736-754,1978.
- [7] Babuska, I. and Rheiboldt, W.C., Adaptive approaches and reliability estimation in finite element analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 18 (1979) 519-540

- [8] Babuska, I. and Rheinboldt, W.C., Analysis of Optimal finite element meshes in R^1 , Mathematics of Computations, Vol 33, number 146, pp 435-463, april, 1976.
- [9] Peano, A.G., Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending, Computational Mathematics with Applications, 2, 1976.
- [10] Szabo, B.A. and Mentha, A.K., P-convergent finite element approximation in fracture mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering 12, 551-560, 1978.
- [11] Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W., Gago, J.P. de S.R. and Babuska, I., Hierarchical finite element approaches, adaptive refinement and error estimates, The Mathematics of finite elements and application, ed. by J.R. Whiteman, MAFELAP 1975, Academic Press, New York 1982.
- [12] Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J. and Oliveira, E.R. de A., Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations, John Wiley & Sons, Chichester 1986.
- [13] Shephard, M.S., Adaptive finite elements and CAD, Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations, I. Babuska *et al* Edited, 205-225, John Wiley & Sons, Chichester 1986.
- [14] Kikuchi, N. Adaptive grid design methods for finite element analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 55, 129-160, 1986.
- [15] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 337-357, 1987.

- [16] Las Casas, Mixed adaptive methods for finite elements, RBCM Vol XIII, 3, pp 205-216,1991.
- [17] Zienkiewicz.O.C., Zhu.J.Z., Craig.A.W., Ainsworth.M., Simple and Pratical Error Estimation and Adaptivity:h and h-p Version Procedures. in: J.E.Flaherty,P.J.Palow, M.S.Shephard and J.D.Vasilakis,eds. Adaptive Methods for Partial Differential Equations.(SIAM Philadelphia, PA,1989)100-114.
- [18] Babuska, I., Szabo,B., On the rates of convergence of the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering ,18,323-341,1982.
- [19] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z.,Gong,N.G., Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering ,28,879-891,1989.
- [20] Zhu, J., Z., Hinton,E. and Zienkiewicz, O.C., Adaptive finite element analysis with quadrilaterals, Computers & structures 40,No 5,1097-1104,1991.
- [21] Rank, E., Zienkiewicz.O.C., A simple error estimator in the finite element method, Communications in Applied Numerical Methods,3,243-249,1987.
- [22] Zienckiewicz, O.C., Zhu, Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering,28,2839-2853,1989.
- [23] Zienckiewicz, O.C., Liu, Y.C.,Huang, G.C., Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering,25,23-42,1988.

- [24] Habraken, A., Cescotto, S., An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, 1503, 1525, 1990.
 - [25] Shephard, M.S., Baehmann, P.L., Some results using stress projectors for error indication and estimation *Adaptive Methods for Partial Differential Equations SIAM proceedings*, chapter 7, 83-99, 1989.
 - [26] Hinton, E., and Campbell, J.S., Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8, 461-480, 1974.
 - [27] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., The superconvergent patch recovery and *a-posteriori* error estimates. part 1: the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1331-1364, 1992.
 - [28] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., The superconvergent patch recovery and *a-posteriori* error estimates. part 2: error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1365-1382, 1992.
 - [29] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, third edition MacGraw-Hill.
 - [30] Ribeiro, F.L.B., *Estratégia h-p de refinamento para o método dos elementos finitos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.
 - [31] Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, *Concepts and applications of finite element analysis*. 3th ed. John Wiley & Sons.
-

- [32] H.Jin and N.-E.Wiberg, Two-dimensional mesh generation, adaptive remeshing and refinement, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,29,1501-1526,(1990).
- [33] Cecilia Rivara, M., Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,20,745-756,1984.
- [34] Chang-Koon Choi and Yong-Myung Park, Compatible transition plate bending elements for adaptive mesh refinement. *Numeta 90 Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*, pp 1074-1081, Vol 2, 1990.
- [35] Gopalakrishnan, R., Vijayakar, S. and Busby, H., An iterative algorithm for adaptive element splitting using transition elements, *Computers & Structures* ,37,3,283-294
- [36] Peggy L.Baehmann, Scott L. Wittchen, Mark S. Shephard, Kurt R. Grice and Mark A. Yerry, Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,24,1987,1043-1078.
- [37] S.H.Lo, Automatic mesh generation and adaptation by using contours, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,31,689-707,1991.

- [38] Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K, Zienkiewicz, O.C., Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics* ,72,449-466,1989.
- [39] Peraire, J., Peiro, J., Morgan, K, Zienkiewicz, O.C., Finite element euler computations in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,26,2135,2159-1988.
- [40] Lee, C.K.,and Lo, S.H., An automatic adaptive refinement finite element procedure for 2D elastostatic analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,35,1967-1989,1992.
- [41] Shephard, M.S., Approaches to the automatic generation and control of finite element meshes, *Applied Mechanics Review* vol 41,no 4, Apr 1988
- [42] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L, *The finite element method - 4th ed. vol 1* McGraw-Hill 1989.
- [43] S.H.Lo, A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 21, 1985, p219-249.
- [44] Y.C.Liu and H.A.Elmaraghy, Assesment of discretized error and adaptive refinement with quadrilateral finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,33,781-798,1992.
- [45] M. Ainsworth, J.Z.Zhu, A.W.Craig and O.C. Zienkiewicz, Analysis of the Zienkiewicz-Zhu *a-posteriori* error estimator in the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,28,2161-2174,1989.