PUC

JORGE AURELIO SANTA CRUZ PASTOR

**MODELO DE VIGA TRIDIMENSIONAL COM ACOPLAMENTO
FLEXO-TORSIONAL E EMPENAMENTO DA SEÇÃO RETA**

Dissertação de Mestrado

Departamento de Engenharia Mecânica

Rio de Janeiro, 27 de Outubro de 1994

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 – CEP 22453

RIO DE JANEIRO – BRASIL

JORGE AURELIO SANTA CRUZ PASTOR

MODELO DE VIGA TRIDIMENSIONAL COM ACOPLAMENTO
FLEXO-TORSIONAL E EMPENAMENTO DA SEÇÃO RETA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
MECÂNICA DA PUC/RJ COMO PARTE
DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA MECÂNICA.

ORIENTADOR: PROF. CARLOS ALBERTO DE ALMEIDA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

RIO DE JANEIRO, OUTUBRO DE 1994

A Hugo e América, meus pais

Se Deus pensasse apenas em si mesmo, e
para si recolhesse o seu espírito e o seu
sopro, toda a carne juntamente expiraria,
e o homem voltaria para o pó.

Jó 34:14-15

Meus agradecimentos:

- ao professor Carlos Alberto de Almeida, pelo apoio e dedicação na orientação deste trabalho.
- à minha família que com amor e abnegação permitiram que eu chegasse até aqui.
- à minha família em Cristo, os amados irmãos da Comunidade Evangélica da Tijuca, especialmente para Antonio e Silvia, pelo carinho e incentivo e pelo amor que tem transformado minha vida.
- aos funcionários da Fundação Padre Leonel França pelo apoio e confiança.
- aos funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica, pela diligência no atendimento.
- ao Grupo de Tecnologia em Engenharia de Petróleo, especialmente ao professor Sérgio Fontoura e a Marcelo Frydman, pelo valioso apoio, sem o qual teria sido impossível a concretização deste trabalho
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a PUC/RJ, pela ajuda financeira recebida durante o curso.
- ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, O Autor da Vida, a quem amo.

RESUMO

Apresenta-se a formulação de um modelo isoparamétrico para a análise de viga tridimensional por elementos finitos que inclui a cinemática de deformação axial, de flexão, de torção e do empenamento da seção reta. A geometria do elemento e o campo de deslocamentos são aproximados, na direção longitudinal, por funções cúbicas de interpolação definidas na linha central. O elemento possui três graus-de-liberdade de translação e um grau-de-liberdade de rotação em torno do eixo axial da viga que permitem representar as deformações lineares longitudinais e de cisalhamento devidas aos esforços axiais, de flexão e de torção na viga. Além destes um número de graus-de-liberdade generalizados é utilizado na representação do estado de deformações resultante do empenamento da seção reta. Condições de compatibilidade dos deslocamentos entre elementos contíguos ou entre um elemento e uma parede rígida são obtidas através de um procedimento de penalização na expressão da energia de deformação. A condensação estática dos graus-de-liberdade generalizados na matriz de rigidez do elemento permite reduzir o desenvolvimento a uma formulação com quatro graus-de-liberdade por nó. A formulação foi implementada e resultados numéricos são utilizados para ilustrar as características do elemento em representar análises típicas de engenharia com vigas.

ABSTRACT

The formulation of a three-dimension isoparametric beam element model that includes kinematics of axial, bending, torsional and warping displacements is presented. The element geometry and displacement fields are approximated using cubic interpolation functions along the element length coordinate, on the beam center axis. The displacements are represented by three translation and one rotation degrees-of-freedom, that account for linear and shear strains, and a number of generalized degrees-of-freedom to represent strains in the beam due to cross-section warping. Continuity conditions between adjoining element and between an element and a rigid wall are achieved by using rotation compatibility conditions at the common node. These are obtained with a penalty procedure added to the element strain energy. Static condensation of the generalized degrees-of-freedom is performed in the element stiffness matrix such the formulation results into a four degree-of-freedom per node element. The formulation has been implemented and some sample analysis results are furnished to illustrate the element capabilities in handling typical engineering beam analyses.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - CINEMÁTICA DAS DEFORMAÇÕES DE UMA VIGA CURVA	10
2.1 Vetor posição de um ponto genérico numa viga	10
2.2 Elemento diferencial	11
2.3 Compatibilidade geométrica	12
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO ELEMENTO	22
3.1 Formulação do elemento tridimensional de viga curva	22
3.2 Obtenção da matriz de rigidez	28
3.3 Integração numérica	32
3.4 Condensação estática da matriz de rigidez	33
3.5 Rotação da matriz de rigidez	35
3.6 Rotações	37
3.7 Carregamentos nodais equivalentes	39
CAPÍTULO 4 - CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE E DE FIXAÇÃO DO ELEMENTO	41
4.1 Método de penalidade	41
4.2 Aplicação do método de penalidade na formulação do elemento	42
4.2.1 Condições de continuidade	43
4.2.2 Condições de fixação	48

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE RESULTADOS	52
5.1 Viga de seção elíptica sob torção constante	52
5.2 Viga curva submetida a carregamento concentrado fora do plano	53
5.3 Torção de viga reta longa com seção transversal I	54
5.4 Torção de viga reta curta com seção transversal I	57
5.5 Viga curva de seção H	60
5.5.1 Caso 1	61
5.5.2 Caso 2	62
5.5.3 Caso 3	63
5.5.4 Caso 4	64
5.5.5 Caso 5	65
5.5.6 Caso 6	66
 CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	 68
 APÊNDICE A - CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL	 70
A.1 Representação paramétrica de uma curva no espaço	70
A.2 Comprimento de arco	71
A.3 Vetor tangente	72
A.4 Curvatura e raio de curvatura	73
A.5 Derivada dos vetores unitários	75
 APÊNDICE B - VETORES UNITÁRIOS NA POSIÇÃO DEFORMADA	 77
 APÊNDICE C - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	 82
C.1 Introdução ao Método dos Elementos Finitos	82
C.2 Derivação geral das equações de equilíbrio de elementos finitos	83
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 89

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1	Hipóteses cinemáticas de deformação	4
Fig. 2.1	Geometria de um ponto genérico numa viga	10
Fig. 2.2	Posições indeformada e deformada da viga	13
Fig. 2.3	Vetores unitários na posição deformada	15
Fig. 2.4	Flange superior em uma viga I sujeita ao efeito flexo-torsional	18
Fig. 2.5	Flange direita em uma viga H sujeita ao efeito flexo-torsional	20
Fig. 3.1	Elemento de viga tridimensional	23
Fig. 3.2	Funções de interpolação unidimensionais para um elemento com número variável de nós	24
Fig. 3.3	Retângulo excêntrico nas direções coordenadas x e y	33
Fig. 4.1	Continuidade das rotações entre dois elementos contíguos	44
Fig. 4.2	Continuidade das rotações e deslocamentos de empenamento entre dois elementos contíguos	46
Fig. 4.3	Fixação das rotações no ponto nodal de um elemento fixo a uma parede rígida	49
Fig. 5.1	Análise de uma viga reta de seção elíptica	52
Fig. 5.2	Análise de uma viga curva sob carregamento concentrado fora do plano	54
Fig. 5.3	Modelo de elementos finitos para a análise de uma viga I longa	55
Fig. 5.4	Comparação de resultados para uma viga reta longa de seção I	56
Fig. 5.5	Parâmetros físicos e geométricos empregados na análise da viga curta I	58
Fig. 5.6	Comparação de resultados para uma viga reta curta de seção I	59
Fig. 5.7	Viga curva de seção H	60
Fig. 5.8	Análise tridimensional de viga curva - Caso 1	61
Fig. 5.9	Análise tridimensional de viga curva - Caso 2	62
Fig. 5.10	Análise tridimensional de viga curva - Caso 3	63
Fig. 5.11	Análise tridimensional de viga curva - Caso 4	64

Fig. 5.12	Análise tridimensional de viga curva - Caso 5	65
Fig. 5.13	Análise tridimensional de viga curva - Caso 6	66
Fig. A.1	Representação paramétrica de uma curva no espaço cartesiano	70
Fig. A.2	Tangente de uma curva	72
Fig. A.3	Redefinição dos vetores unitários	75
Fig. B.1	Posições indeformada e deformada da curva	77
Fig. C.1	Corpo tridimensional submetido a um carregamento geral	84

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos vem se tornando, nas últimas décadas, a técnica mais popular na solução numérica de problemas complexos de engenharia. Com a ajuda de computadores mais velozes e a disponibilidade cada vez maior de memória a um baixo custo, o campo de aplicações do método tem-se estendido a praticamente todas as áreas da engenharia mecânica, permitindo a simulação numérica de problemas envolvendo a simultaneidade de fenômenos classicamente estudados em áreas distintas.

Em aplicações da engenharia estrutural moderna, os componentes do modelo de uma estrutura podem ser divididos de acordo com as características dos mecanismos (cinemática) de deformação, em duas classes: (a) componentes sólidos, cuja cinemática de deformação é representada por campos de deslocamentos definidos em todo o volume e (b) componentes estruturais, compostos geralmente por corpos esbeltos, cuja cinemática permite a representação do campo de deslocamentos a partir da definição em uma linha/superfície de referência. Nesta última classe destacam-se placas e cascas, vigas com seção transversal sólida, vigas de seção transversal de parede fina (ou vigas de parede fina) e barras. Vigas com seção transversal sólida são componentes que se caracterizam por possuir as dimensões que constituem a seção transversal, muito menores do que a terceira dimensão longitudinal. Por outro lado, as vigas de parede fina possuem uma forma resultante da combinação de longas cascas prismáticas. Estes elementos são análogos às vigas sólidas mas caracterizados, no entanto, pelo fato de que uma das dimensões da seção transversal, a espessura da casca, é pequena em relação a qualquer outra dimensão característica da seção transversal.

São exemplos de vigas de parede fina vigas metálicas de perfis laminados, soldados ou rebitados, colunas, elementos de enrijecedores, quadros, etc. Em estruturas espaciais típicas da engenharia estrutural estes componentes são geralmente empregados na transmissão de esforços como enrijecedores de estruturas esbeltas de placas e cascas ou na sustentação de cargas, como elemento de apoio. Quando submetidas a esforços de torção, estas vigas apresentam efeitos de deslocamento fora do plano da seção reta (empenamento), requerendo o emprego de métodos mais avançados que os tradicionais métodos analíticos para representar este comportamento, como o método dos elementos finitos.

A importância dos efeitos da torção no comportamento estrutural de vigas tem chamado a atenção de muitos pesquisadores nos últimos anos. Cascos de navios, pontes, fuselagens na construção aeronáutica, vasos de pressão e outras estruturas complexas, utilizam freqüentemente vigas esbeltas como elementos de transmissão e distribuição do carregamento, nos quais a torção é um fator decisivo. Atualmente é uma prática rotineira de engenharia verificar-se a influência da torção num membro estrutural e, em muitas situações, as tensões e deformações provocadas pelos esforços de torção determinam as dimensões dos parâmetros geométricos da seção transversal. Para tais desenvolvimentos, dois importantes fatores têm contribuído significativamente: i) o contínuo aumento da precisão dos modelos propostos, de maneira a diminuir o grau de incerteza no cálculo estrutural e, ii) o desenvolvimento orientado ao uso de vigas de parede fina, em lugar de vigas sólidas, com o propósito de obter-se uma melhor relação peso-resistência da estrutura.

Na análise linear por elementos finitos o elemento estrutural mais básico é, provavelmente, o elemento de viga, amplamente empregado na representação de sistemas estruturais. A teoria linear de vigas hoje implementada em elementos unidimensionais de viga é capaz de modelar com grande precisão complexas estruturas espaciais. Quando os efeitos de empenamento da seção reta não são levados em consideração, os modelos de elementos finitos existentes podem ser classificados em dois grupos, baseados em considerações sobre a inclusão

ou não dos efeitos de cisalhamento transversal: a) Modelos de elementos finitos baseados nas hipóteses de Euler-Bernoulli, em que os efeitos de cisalhamento transversal não são considerados e, b) Modelos baseados na cinemática de deformação proposta por Timoshenko, que permitem uma melhor representação destes efeitos. Considerando-se o caso de vigas submetidas a esforços de flexão, que se deformam em um único plano e cujo deslocamento transversal w é a única variável necessária na definição da cinemática de deformações a hipótese básica, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, é de que uma reta normal a linha central da viga permanece reta durante a deformação e que, por consequência, o ângulo de rotação da seção reta é medido pela inclinação da linha central da viga. Esta hipótese cinemática, ilustrada na Fig. 1.1(a), conduz a conhecida equação diferencial que governa a flexão de vigas e, por conseguinte, o emprego de modelos de elementos finitos de viga formulados a partir desta teoria requer, para a compatibilidade de deslocamentos entre elementos contíguos, que as funções solução $w(x)$ e dw/dx sejam contínuas. Por outro lado, uma análise que inclua os efeitos de cisalhamento transversal, como ilustrado na Fig. 1.1(b), baseia-se na hipótese que seções inicialmente planas e normais à linha central da viga permanecem planas, porém não mais normais à linha deformada após a aplicação do carregamento. Como consequência, a rotação do plano da seção reta inicialmente normal à linha central da viga é obtida subtraindo-se a rotação, caso não houvesse cisalhamento, da deformação angular (devida ao esforço cortante) na seção transversal.

Um modelo de viga formulado a partir da teoria Euler-Bernoulli, corresponde à situação física de deformação de vigas em que a altura da seção reta da viga é pequena em relação ao seu comprimento, resultando em contribuições desprezíveis das deformações por cisalhamento transversal à energia de deformação da viga quando comparadas às dos efeitos das deformações por flexão. Para a geometria correspondente a uma viga curva, esta condição é equivalente a espessura da viga ser pequena (uma ordem de grandeza menor) do que o raio de curvatura. Uma extensão desta hipótese à análise tridimensional de vigas por elementos finitos, requer que sejam incluídos os seguintes modos de deformação: as deformações axiais e

de flexão através de graus-de-liberdade de deslocamento da viga e, a deformação por torção, introduzida no modelo considerando-se o grau-de-liberdade de rotação da seção reta em relação à linha central da viga. Neste modelo, as rotações devidas a flexão não são representa-

Fig. 1.1 Hipóteses Cinemáticas de Deformação

das por graus-de-liberdade independentes, de maneira que a continuidade entre elementos deve ser garantida através de outros procedimentos, tal como o método de penalidades. Portanto, considerando-se a análise tridimensional de vigas utilizando a teoria de Euler-Bernoulli, apenas

quatro graus-de-liberdade por ponto nodal são suficientes para caracterizar a cinemática de deformação do elemento e, desta forma, um ganho no esforço computacional em relação ao modelo clássico com seis graus-de-liberdade é obtido na resolução das equações de equilíbrio. Este modelo clássico corresponde ao de um elemento de viga isoparamétrico tridimensional com graus-de-liberdade de rotação e deslocamento independentes. Formulado a partir da extensão do modelo de viga a uma análise tridimensional da cinemática de deformação que inclua os efeitos de cisalhamento transversal acima considerados, neste modelo seis graus-de-liberdade são requeridos para representar as deformações devidas aos esforços axiais, de flexão e de torção na viga.

Quando um carregamento de torção atua sobre uma viga de seção transversal não circular, as condições de compatibilidade geométrica nos contornos da seção, devidas à distribuição das tensões de cisalhamento, só podem ser satisfeitas por campos de deslocamentos tridimensionais, onde os deslocamentos no plano da seção resultam da rotação longitudinal da viga e o campo de deslocamento normal à seção é não uniforme, representando o seu empenamento. No caso de vigas com seção transversal de parede fina, o acoplamento da torção com a flexão deve ser ainda considerado, representando uma parcela adicional na energia de deformação acumulada. Em uma seção transversal com flanges excêntricas ao centro de cisalhamento, estas são deslocadas lateralmente quando a seção reta é submetida a torção, resultando em deformações lineares longitudinais equivalentes ao mecanismo de flexão de uma viga cuja seção transversal é a área do flange. Observe-se que em situações onde empenamento da seção reta é restrito, como no caso de uma viga reta engastada, a inclusão do efeito flexo-torsional produz um estado de deformação caracterizado por uma torção não-uniforme, Ref. [7].

Quando os efeitos de empenamento são importantes, os modelos de elementos finitos acima considerados assumem que o deslocamento de empenamento é proporcional a uma variável, definida em função da coordenada axial da viga. Esta variável é, no caso mais

simples, a derivada do ângulo de torção da seção reta, e pode ser tratada genericamente através de deslocamentos generalizados para representar o empenamento.

Usando-se elementos tridimensionais, elementos gerais de casca ou uma combinação dos dois modelos, em teoria, qualquer viga reta ou curva de seção transversal de parede fina pode ser corretamente modelada empregando-se uma malha de discretização por elementos finitos suficientemente refinada, de forma que os efeitos de empenamento sejam adequadamente considerados [5]. Não obstante, na prática, a análise de uma simples estrutura de vigas envolve a solução de um grande número de equações de equilíbrio, resultando que a análise linear de uma estrutura de vigas requer um esforço computacional elevado, a análise não-linear é de custo proibitivo e a análise não-linear para uma aplicação típica de engenharia pode estar além do estado-da-arte das ferramentas computacionais atuais.

Dos trabalhos pioneiros publicados na literatura para a formulação do problema da análise de vigas com empenamento da seção reta destaca-se o de Vlasov, que desenvolveu, na Ref. [9], uma teoria para a análise de vigas retas de seção transversal de parede fina, com a hipótese básica de que a seção transversal permanece indeformada no seu plano, permitindo-se porém o empenamento fora do plano. Nesta teoria, o empenamento devido ao acoplamento flexão-torção é associado a um esforço interno auto equilibrado, chamado por Vlasov de "bimomento". Dvorkin, Ref[10] desenvolveu um elemento de viga reta que, baseado na teoria de Vlasov para seções abertas e paredes finas, utiliza para funções de interpolação do grau-de-liberdade da rotação devida a torção as obtidas da solução analítica de vigas retas. Estas funções, incorporam as condições de movimento de corpo rígido da viga fornecendo a solução exata de problemas simples da torção não-uniforme, utilizando um único elemento. Lee & Kim[11] desenvolveram um modelo para a correta representação do empenamento de vigas com seção transversal arbitrária utilizando a teoria de elementos sólidos. Neste modelo, o campo de deslocamentos longitudinais devidos ao empenamento da seção, é considerado através da interpolação dos deslocamentos em pontos nodais localizados sobre a seção

utilizando funções de forma tridimensionais. A partir de combinações lineares das soluções exatas para representar o empenamento de seções elípticas e quadradas, Bathe e Chaudhary[4] propuseram funções apropriadas para representar a cinemática de deslocamentos longitudinais devidos ao empenamento de vigas de seção transversal retangular. Estas funções foram empregadas diretamente em uma formulação isoparamétrica de vigas com numero variável de pontos nodais apropriada para a análise linear e não-linear. Uma comparação da rigidez torsional linear elástica de seções retangulares calculadas segundo soluções analíticas disponíveis da teoria da elasticidade[2] e, uma implementação no programa ADINA[3] utilizando as funções propostas, resultou numa discrepância máxima de 3.5%, demonstrando a aplicabilidade destas funções em descrever os deslocamentos de empenamento. O estudo do modelo de viga reta com seção retangular sugere que a representação de vigas com seções transversais do tipo I, L e T pode também ser obtida através da superposição dos modelos individualizados das seções retangulares que compõem a seção completa. Baseado neste conceito, Clapis[7] desenvolveu e implementou a formulação de um modelo para a análise por elementos finitos, da torção de vigas retas com seção transversal I simétrica e não simétrica, e T. Além de demonstrar a aplicabilidade e efetividade da formulação na representação de problemas de torção linear em vigas retas para estas seções, Clapis obteve, através de experimentações numéricas, os termos mais significativos das expansões polinomiais completas representativas da função empenamento. Estas funções definidas nas coordenadas da seção reta da viga, foram utilizadas na representação do campo de deslocamentos longitudinais devidos ao empenamento, na alma e nos flanges da seção. As funções obtidas para a alma da seção I simétrica são as mesmas utilizadas por Bathe[4] na análise de vigas de seção retangular, porque a solução proposta corresponde ao do empenamento de seções retangulares centradas. No entanto, para a representação nos flanges é necessário levar-se em consideração a cinemática de deformação da torção excêntrica. Observe-se que a implementação desta cinemática de deslocamentos adicional na formulação dos modelos de viga descritos acima, requer graus-de-liberdade generalizados adicionais, representando assim um ônus à eficiência do elemento.

Com o propósito de reduzir o número de variáveis de elementos finitos envolvidos na análise, um modelo de viga espacial é proposto neste trabalho. O cinemática da deformação do elemento é obtida do amálgama de dois modelos numéricos: a) o modelo clássico de viga com formulação de Euler-Bernoulli, representado por quatro graus-de-liberdade naturais de translação e rotação da seção reta da viga e, b) modelo de distorção (empenamento) da seção reta proposto por Clapis[7], através da utilização de deslocamentos generalizados para representar as deformações de cisalhamento devido ao empenamento da seção transversal. Na implementação do modelo os graus-de-liberdade generalizados são eliminados, por condensação estática da matriz de rigidez de cada elemento, objetivando reduzir a extensa utilização de memória e o esforço computacional na solução do sistema de equações resultante do equilíbrio. Este modelo permite a análise linear elástica de vigas retas e curvas com seções transversais nas formas circular, elíptica, quadrada, retangular e seções simétricas que possam ser obtidas como uma superposição de seções retangulares, tal como nas vigas I e H. A compatibilidade de rotações entre elementos contíguos, ou entre um elemento e uma parede rígida, é obtida através de um procedimento de penalidades.

No capítulo 2 são desenvolvidas as relações geométricas que representam a cinemática de deformações de uma viga curva, segundo as hipóteses de Euler-Bernoulli, considerando-se os efeitos de empenamento da seção reta. Os conceitos de geometria diferencial necessários para a obtenção destas relações de compatibilidade geométrica, são apresentados no Apêndice A. Os vetores unitários necessários para a definição do sistema de coordenadas curvilíneas locais, na posição deformada da viga, são apresentados no Apêndice B. Entre estas relações estão desenvolvidas aquelas que representam as rotações devidas a flexão como função dos deslocamentos dos pontos da linha central da viga.

No capítulo 3 desenvolve-se a formulação completa de um elemento de viga de curvatura variável com seção transversal constante. Esta formulação permite que a seção transversal do elemento seja obtida da superposição de retângulos paralelos aos eixos

coordenados locais. No presente trabalho, somente vigas com seções I e H foram consideradas. Os conceitos básicos do Método dos Elementos Finitos, necessários para este desenvolvimento estão apresentados no Apêndice C.

No capítulo 4 apresenta-se o procedimento de penalização empregado na compatibilidade das rotações de flexão e torção entre elementos contíguos, assim como entre um elemento e uma parede rígida.

No capítulo 5 apresentam-se análises utilizando o presente modelo, cujos resultados, comparados com outras soluções analíticas ou numéricas disponíveis na literatura, demonstram a sua aplicabilidade na representação de vigas em situações típicas de engenharia.

No capítulo 6 apresentam-se as conclusões do presente trabalho com os comentários sobre o elemento desenvolvido, quanto as suas vantagens e limitações, assim como sugestões para trabalhos futuros na área.

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA DAS DEFORMAÇÕES DE UMA VIGA CURVA

Neste capítulo a cinemática da deformação para vigas curvas é apresentada segundo as hipóteses da teoria clássica de Euler-Bernoulli. O presente modelo limita-se a análise de vigas cuja linha central está inicialmente contida em um único plano. Para tornar a apresentação mais objetiva, todos os conceitos de geometria diferencial necessários ao desenvolvimento teórico apresentado, estão descritos no Apêndice A.

2.1 Vetor posição de um ponto genérico numa viga

A Fig. 2.1 apresenta os parâmetros geométricos de definição de uma viga curva com seção transversal arbitrária em sua configuração indeformada, através da posição de um ponto genérico P . Considera-se que nesta posição inicial a seção transversal é perpendicular a linha central da viga, que passa pelo centróide da seção transversal S . Por conveniência, um sistema ortogonal de coordenadas locais t , n_1 e n_2 é definido no ponto O a partir do sistema global de coordenadas definido pelos vetores unitários e_1, e_2 e e_3 .

Fig. 2.1 Geometria de um Ponto Genérico numa Viga

No sistema local de coordenadas o vetor unitário $\mathbf{t}$ é tangente a linha central (direção axial z) e perpendicular à seção transversal indeformada, enquanto que os vetores unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, paralelos aos eixos x e y , têm as direções normal ao plano da viga e radial, com referência a curvatura da linha central, respectivamente. Portanto, o vetor posição de um ponto P , na posição indeformada da viga, pode ser definido como

$$\mathbf{X}_p(r, x, y) = \mathbf{X}(r) + x\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2 \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{X}(r)$ é o vetor posição da linha central da viga e r é uma coordenada curvilínea local definida nesta linha.

2.2 Elemento Diferencial

Considerando-se o desenvolvimento apresentado no Apêndice A, a magnitude de um elemento diferencial arbitrário da viga, dz^* , fica definido através do vetor $\mathbf{X}_p$, se a partir da equação (A.5), utiliza-se

$$(dz^*)^2 = d\mathbf{X}_p \cdot d\mathbf{X}_p = (d\mathbf{X} + dx\mathbf{n}_1 + x d\mathbf{n}_1 + dy\mathbf{n}_2 + y d\mathbf{n}_2) \cdot (d\mathbf{X} + dx\mathbf{n}_1 + x d\mathbf{n}_1 + dy\mathbf{n}_2 + y d\mathbf{n}_2). \quad (2.2)$$

Considerando-se a ortogonalidade do sistema de coordenadas empregado e, substituindo-se as expressões das derivadas dos vetores unitários em (A.22), obtém-se

$$(dz^*)^2 = \left(1 + \frac{y}{R}\right)^2 A^2 dr^2 + dx^2 + dy^2 \quad (2.3)$$

onde

$$A = \left| \frac{d\mathbf{X}}{dr} \right| \quad (2.4)$$

e R é o raio de curvatura da viga no ponto considerado, medido na linha central da viga. O comprimento diferencial dz na direção da linha central da viga, está definido então, de (2.3), como

$$(dz)^2 = \left(1 + \frac{y}{R}\right)^2 A^2 dr^2 \quad (2.5)$$

ou, ainda, usando a definição $F = 1 + \frac{y}{R}$ tem-se

$$dz = F A dr \quad (2.6)$$

que representa o comprimento de elemento diferencial na direção da linha central da viga, para qualquer ponto P definido pelo vetor posição $\mathbf{X}_P$. O comprimento do elemento diferencial $d\bar{z}$, na linha central da viga, é obtido tomando-se $y=0$ na equação (2.6). Assim

$$d\bar{z} = A dr \quad (2.7)$$

ou, ainda, substituindo-se este resultado em (2.6) obtém-se o comprimento diferencial na direção longitudinal em relação ao comprimento diferencial na linha central e, portanto

$$dz = F d\bar{z}. \quad (2.8)$$

2.3 Compatibilidade Geométrica

Considerando-se a viga curva mostrada na Fig. 2.1, a hipótese cinemática básica é a de que o deslocamento total de um ponto genérico P da viga, resulta da superposição de três campos de deslocamentos. Primeiro, os deslocamentos de flexão, torção e axial com a hipótese de que seções transversais inicialmente planas não distorcem no seu plano ou fora deste. Estes

deslocamentos são referidos aos deslocamentos u , v , w e θ da linha central da viga, como pode ser observado na Fig. 2.2, afetados pelas coordenadas locais x e y . Assim

$$\Delta \mathbf{X}(r) = u\mathbf{t} + v\mathbf{n}_1 + w\mathbf{n}_2 \quad (2.9)$$

e

$$\Delta \mathbf{X}_p(r, x, y) = \Delta \mathbf{X}(r) + x(\mathbf{n}'_1 - \mathbf{n}_1) + y(\mathbf{n}'_2 - \mathbf{n}_2) \quad (2.10)$$

onde u , v , w são as componentes do vetor deslocamento nas correspondentes direções coordenadas ortogonais, θ é a medida da rotação em torno da coordenada longitudinal z e, $\mathbf{t}'$, $\mathbf{n}'_1$ e $\mathbf{n}'_2$ são os vetores unitários na posição deformada da linha central da viga. Nestas equações utiliza-se também, a hipótese de que seções planas inicialmente planas e perpendiculares ao eixo de referência da viga, permanecem planas e perpendiculares após a deformação. Assim, a linha que une os pontos O e P , ou ainda os segmentos coordenados x e y , permanece perpendicular à linha central e inextensível. A cinemática de deformação é definida através dos campos de deslocamentos definidos na linha central da viga.

Fig. 2.2 Posições Indeformada e Deformada da Viga

Segundo, o deslocamento de empenamento da seção, representado por uma função no plano da seção reta,

$$\Delta \mathbf{X}_w = W(r, x, y) \mathbf{t} \quad (2.11)$$

a ser definida pela geometria da seção reta e correspondente condição de contorno e, finalmente, o deslocamento devido ao efeito flexo-torsional $\Delta \mathbf{X}_f$. A definição deste último campo de deslocamentos depende das rotações devidas a deslocamentos de flexão da viga, nas hipóteses acima consideradas, pelo que será apresentado mais adiante.

A obtenção dos vetores unitários na posição deformada em função dos parâmetros definidos na posição indeformada é apresentado no Apêndice B (Eqs. B.12, B.21 e B.22), cujos resultados são

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \mathbf{t} + \beta \cdot \mathbf{n}_1 - \alpha \cdot \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}'_1 &= -\beta \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n}_1 + \psi \cdot \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}'_2 &= \alpha \cdot \mathbf{t} - \psi \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\psi = \frac{R}{A} \frac{d\beta}{dr} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{u}{R} - \frac{dw}{A dr} \\ \beta &= \frac{dv}{A dr} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nas expressões (2.13) e (2.14), ψ , α e β são fisicamente as rotações da seção reta da viga, em torno das direções indicadas pelos vetores unitários $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, respectivamente. Além

destes, considera-se no presente modelo, a rotação da seção reta θ devido a torção, considerada positiva no mesmo sentido de ψ . No entanto, a variável-de-estado a considerar no modelo é apenas θ , já que ψ representa movimento de corpo rígido. Substituindo-se assim este resultado nas equações (2.12), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \mathbf{t} + \beta \cdot \mathbf{n}_1 - \alpha \cdot \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}'_1 &= -\beta \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n}_1 + \theta \cdot \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}'_2 &= \alpha \cdot \mathbf{t} - \theta \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

A visualização destes vetores é apresentada na Fig. 2.3. A posição final de cada vetor unitário é obtida após duas rotações segundo eixos normais à sua direção original.

As componentes de deformação, avaliadas no sistema local de coordenadas, são obtidas das derivadas do deslocamento total

$$\Delta \mathbf{X}_T = \Delta \mathbf{X}_p + \Delta \mathbf{X}_w + \Delta \mathbf{X}_f \quad (2.16)$$

Fig. 2.3 Vetores Unitários na Posição Deformada

em relação às coordenadas materiais x , y e z . Para qualquer ponto de uma viga, cuja seção não esteja sujeita a efeitos flexo-torsionais ($\Delta\bar{X}_f = 0$), este processo de derivação resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta\mathbf{X}_T}{\partial z} &= \varepsilon \cdot \mathbf{t} + \lambda_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{n}_2 \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{X}_T}{\partial x} &= \xi_1 \cdot \mathbf{t} + \xi_2 \cdot \mathbf{n}_2 \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{X}_T}{\partial y} &= \chi_1 \cdot \mathbf{t} + \chi_2 \cdot \mathbf{n}_1\end{aligned}\tag{2.17}$$

onde

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{F} \left\{ \frac{du}{d\bar{z}} + \frac{w}{R} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + \left(-\frac{d\beta}{d\bar{z}} + \frac{\theta}{R} \right) x + \frac{d\alpha}{d\bar{z}} y \right\} \\ \lambda_1 &= \frac{1}{F} \left(\frac{dv}{d\bar{z}} - \frac{d\theta}{d\bar{z}} y \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{F} \left\{ -\frac{u}{R} + \frac{dw}{d\bar{z}} + \left(\frac{\beta}{R} + \frac{d\theta}{d\bar{z}} \right) x - \frac{\alpha}{R} y - \frac{W}{R} \right\} \\ \xi_1 &= \frac{\partial W}{\partial x} - \beta \\ \xi_2 &= \theta \\ \chi_1 &= \frac{\partial W}{\partial y} + \alpha \\ \chi_2 &= -\theta\end{aligned}\tag{2.18}$$

e, portanto, obtém-se

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon$$

$$\gamma_{xz} = \lambda_1 + \xi_1 = \frac{1}{F} \left(\frac{dv}{d\bar{z}} - \frac{d\theta}{d\bar{z}} y \right) + \frac{\partial W}{\partial x} - \beta \quad (2.19)$$

$$\gamma_{yz} = \lambda_2 + \chi_1 = \frac{1}{F} \left\{ -\frac{u}{R} + \frac{dw}{d\bar{z}} + \left(\frac{\beta}{R} + \frac{d\theta}{d\bar{z}} \right) x - \frac{\alpha}{R} y - \frac{W}{R} \right\} + \frac{\partial W}{\partial y} + \alpha.$$

As equações acima se referem apenas a regiões centradas no baricentro da seção transversal de paredes finas. Considerando-se agora o caso do flange superior de uma viga de seção I, na Fig. 2.4, sujeita a deslocamentos de flexão, torção e axial, haverá um deslocamento lateral associado ao mecanismo de flexão do flange em relação ao eixo w , devido a rotação axial θ ,

$$v^* = -\theta \cdot c \quad (2.20)$$

onde c é a excentricidade. Portanto, a rotação da seção transversal correspondente ao flange e o equivalente deslocamento axial no flange resultam, respectivamente, em

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{dv^*}{dz_c} = -\frac{d\theta}{dz_c} c \\ u^* &= -\varphi \cdot x = cx \frac{d\theta}{dz_c} \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$\begin{aligned} dz_c &= F_c \cdot d\bar{z} \\ F_c &= 1 + \frac{c}{R} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Assim, para o caso das flanges de uma viga I ou, para o caso geral de uma seção retangular excêntrica na direção $\mathbf{n}_2$, o deslocamento longitudinal devido ao acoplamento flexo-torsional pode ser expresso na forma

$$\Delta \mathbf{X}_f = \mathbf{u}^* \mathbf{t} \quad (2.23)$$

(a) Vista Isométrica

(b) Vista Superior

Fig. 2.4 Flange Superior em Uma Viga I Sujeita ao Efeito Flexo-Torsional

Levando-se este deslocamento na expressão do deslocamento total, Eq. (2.16), para a avaliação do estado de deformação, as seguintes expressões devem ser adicionadas aos resultados nas equações (2.19):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{cx}{F_c F} \left(\frac{d^2 \theta}{d\bar{z}^2} - \frac{1}{F_c} \frac{dF_c}{d\bar{z}} \frac{d\theta}{d\bar{z}} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{c}{F_c} \frac{d\theta}{d\bar{z}} \\ \gamma_{yz} &= -\frac{cx}{F_c F R} \frac{d\theta}{d\bar{z}}\end{aligned}\tag{2.24}$$

Já no caso de um flange disposto excentricamente e paralelo ao plano de definição da linha central da viga, como em uma viga H e mostrado na Fig. 2.5, uma rotação axial θ implicará na flexão lateral do flange. Como no caso anterior, o mecanismo de deformação resulta de um campo de deslocamentos longitudinais, com a diferença de que neste caso os efeitos de curvatura inicial da viga devem ser considerados. Desta forma, quando sujeito a deslocamentos devidos a tração (u), flexão (β) e torção (θ) o vetor deslocamento é obtido na forma

$$\Delta \mathbf{X}_f = \left\{ \frac{1}{R} (u - \beta \cdot c) - \frac{d}{d\bar{z}} (\theta \cdot c) \right\} \mathbf{y} \cdot \mathbf{t}.\tag{2.25}$$

Levando-se esta expressão na equação do deslocamento total, Eq. (2.16), e em procedimento análogo ao caso anterior, os seguintes termos de deformação de viga H curva, devido ao efeito flexo-torsional, devem ser acrescentados às expressões das deformações obtidas nas equações (2.19):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{R} \frac{du}{d\bar{z}} - \frac{u}{R^2} \frac{dR}{d\bar{z}} - c \left(\frac{1}{R} \frac{d\beta}{d\bar{z}} - \frac{\beta}{R^2} \frac{dR}{d\bar{z}} + \frac{d^2 \theta}{d\bar{z}^2} \right) \right\} \mathbf{y}$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (2.26)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{u}{R} - c \left(\frac{\beta}{R} + \frac{d\theta}{dz} \right) \right\}$$

Fig 2.5 Flange Direita em Uma Viga H Sujeita ao Efeito Flexo-Torsional

Levando-se esta expressão na equação do deslocamento total, Eq. (2.16), e em procedimento análogo ao caso anterior, os seguintes termos de deformação de viga H curva, devido ao efeito flexo-torsional, devem ser acrescentados às expressões das deformações obtidas nas equações (2.19):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{R} \frac{du}{dz} - \frac{u}{R^2} \frac{dR}{dz} - c \left(\frac{1}{R} \frac{d\beta}{dz} - \frac{\beta}{R^2} \frac{dR}{dz} + \frac{d^2\theta}{dz^2} \right) \right\} y$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (2.26)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{F} \left\{ \frac{u}{R} - c \left(\frac{\beta}{R} + \frac{d\theta}{d\bar{z}} \right) \right\}$$

No capítulo seguinte estas expressões são utilizadas na formulação de elementos finitos do modelo geral para a representação de vigas curvas tridimensionais. As expressões (2.19), (2.24) e (2.26) são utilizadas na definição da matriz de compatibilidade geométrica do modelo. As rotações devidas a flexão expressas em (2.14), são utilizadas na obtenção do vetor de carregamentos nodais equivalentes, quando a solicitação de momentos fletores está presente na análise. Também estas expressões das rotações, são utilizadas na definição do procedimento de penalidades necessário para garantir a compatibilidade dos deslocamentos entre elementos contíguos, entre um elemento e uma parede rígida ou em condições de simetria.

O presente modelo limitou-se à representação de vigas com seções retas em que o centróide coincide com o centro de cisalhamento (como em seções simétricas) e, portanto, um único sistema coordenado local é necessário. Na representação de vigas com seções não simétricas, em que a posição destes dois pontos geométricos não coincidem, dois sistemas coordenados locais devem ser considerados: um deles centrado no centróide da seção reta, para a representação de deformações de flexão e o outro centrado no centro de cisalhamento da seção, para a representação das deformações angulares devidas a torção.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO ELEMENTO

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação de elementos finitos, aplicada ao presente modelo, e descrever a sua implementação segundo as relações geométricas e as equações de deformação desenvolvidas no capítulo anterior. Os conceitos do Método dos Elementos Finitos aqui empregados estão apresentados no Apêndice C

3.1 Formulação do elemento tridimensional de viga curva

A idéia básica da formulação de elementos finitos é de obter-se o campo de deslocamentos a partir dos valores definidos em alguns pontos do domínio do elemento, através do emprego de funções interpolantes (ou funções de forma). Na formulação isoparamétrica, as funções interpolantes dos deslocamentos são as mesmas que as utilizadas na representação da geometria do elemento.

Considerando-se o elemento de viga tridimensional da Fig. 3.1 cuja seção reta é dividida em retângulos (indicados por $R1$, $R2$ e $R3$) com lados paralelos aos eixos coordenados locais, a solução de vigas com tais seções pode ser obtida da superposição dos modelos individualizados das seções retangulares que compõem a seção completa, garantidas as condições de compatibilidade geométrica mais importantes. A presente situação corresponde ao caso das seções utilizadas na maioria das aplicações em engenharia, tais como as seções I, L, H e T.

Usando-se como coordenada natural a coordenada curvilínea local da linha central do elemento r , o vetor posição desta linha, pode ser expresso, antes e após deformação, na forma

$$\mathbf{X} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3 \quad (3.1)$$

onde

$$X = \sum_{i=1}^q h_i X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^q h_i Y_i \quad \text{e} \quad Z = \sum_{i=1}^q h_i Z_i \quad (3.2)$$

são as coordenadas globais de qualquer ponto na linha central do elemento, q é o número de nós do elemento, $X_i, Y_i, Z_i, (i = 1, \dots, q)$ são as coordenadas dos nós e $h_i, (i = 1, \dots, q)$ são as funções de interpolação referidas à coordenada r .

Fig. 3.1 Elemento de Viga Tridimensional

Na interpolação da geometria e dos deslocamentos do elemento utilizam-se funções de forma associadas a modelos com dois a quatro nós. A Fig. 3.2 apresenta as funções de interpolação lagrangeanas utilizadas no presente trabalho, com possíveis nós adicionais. O uso

de elementos com 3 e 4 permitem que as interpolações sejam efetuadas segundo polinômios de maior grau, o que possibilita, por exemplo, a representação de vigas com raio de curvatura constante ou mesmo variável.

(a) Elemento de viga com número variável de nós

	Incluir com o nó 3	Incluir com o nó 4
$h_1(r) = \frac{1}{2}(1-r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$	$+\frac{1}{16}(-9r^3 + r^2 + 9r - 1)$
$h_2(r) = \frac{1}{2}(1+r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$	$+\frac{1}{16}(9r^3 + r^2 - 9r - 1)$
$h_3(r) =$	$+(1-r^2)$	$+\frac{1}{16}(27r^3 + 7r^2 - 27r - 7)$
$h_4(r) =$		$+\frac{1}{16}(-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9)$

(b) Funções de interpolação

Fig 3.2 Funções de Interpolação Unidimensionais Para um Elemento Com
Número Variável de Nós

Considerando-se as expressões do campo de deformações descrito no capítulo anterior, a cinemática de deformação do elemento finito requer somente cinco campos de deslocamento. A saber, três deslocamentos espaciais

$$u(r) = \sum_{i=1}^q h_i u_i, \quad v(r) = \sum_{i=1}^q h_i v_i \text{ e } \quad w(r) = \sum_{i=1}^q h_i w_i, \quad (3.3)$$

uma rotação em torno da direção axial (torção),

$$\theta(r) = \sum_{i=1}^q h_i \theta_i, \quad (3.4)$$

e os deslocamentos de empenamento $W(r, x, y)$. Nas equações (3.3) e (3.4), u_i , v_i , w_i e θ_i são deslocamentos associados ao ponto nodal i , medidos no sistema de coordenadas local. No presente modelo, cada retângulo que compõem a seção reta do elemento, pode distorcer (empenar) segundo um campo polinomial específico, cujos coeficientes são interpolados ao longo do comprimento do elemento. Assim, para os tipos de seção reta considerados, três casos devem ser abordados:

$$W_1(r, x, y) = \sum_{i=1}^q h_i (\alpha_i^1 + \alpha_i^2 x^2 + \alpha_i^3 y^2) xy \quad (3.5)$$

para um retângulo centrado,

$$W_2(r, x, y) = \sum_{i=1}^q h_i (\alpha_i^1 + \alpha_i^2 x + \alpha_i^3 x^2 + \alpha_i^4 x^3 + \alpha_i^5 y^2 + \alpha_i^6 xy^2) y \quad (3.6)$$

para um retângulo paralelo ao plano de definição da linha central do elemento ($R1$ ou $R2$), e

$$W_3(r, x, y) = \sum_{i=1}^q h_i (\alpha_i^1 + \alpha_i^2 y + \alpha_i^3 y^2 + \alpha_i^4 y^3 + \alpha_i^5 x^2 + \alpha_i^6 x^2 y) x \quad (3.7)$$

para um retângulo normal ao plano de definição da linha central do elemento (R3). Nas equações (3.5) a (3.7), α_i^j representam graus-de-liberdade generalizados definidos nos pontos nodais. A escolha das funções acima resulta de experimentações numéricas com a formulação para um conjunto completo de polinômios

$$W(r, x, y) = \sum_{i=1}^q h_i \alpha_i^{mn} x^m y^n \quad (3.8)$$

e representam os padrões de deslocamento com os termos ativos α_i^{mn} mais significativos quando a seção transversal da viga é submetida a uma rotação em torno da linha central, Ref.[7].

Substituindo-se os resultados das interpolações definidas nas equações (3.3) a (3.7), nas relações deslocamento-deformação desenvolvidas no capítulo anterior, obtém-se os seguintes conjuntos de equações discretizadas para os três casos considerados, na seguinte forma:

a) Para um retângulo centrado

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = & \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{A} \sum h_i' u_i + \frac{1}{R} \sum h_i w_i + \frac{1}{A} \frac{\partial W_1}{\partial r} + \left(\frac{A'}{A^3} \sum h_i' v_i - \frac{1}{A^2} \sum h_i' v_i + \frac{1}{R} \sum h_i \theta_i \right) x + \right. \\ & \left. \frac{1}{A} \left(\frac{1}{R} \sum h_i' u_i - \frac{R'}{R^2} \sum h_i u_i + \frac{A'}{A^2} \sum h_i' w_i - \frac{1}{A} \sum h_i' w_i \right) y \right\} \\ \gamma_{xz} = & \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{1}{FA} \left(\frac{1}{R} \sum h_i' v_i + \sum h_i \theta_i \right) y \\ \gamma_{yz} = & \frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{W_1}{FR} + \frac{1}{FA} \left(\frac{1}{R} \sum h_i' v_i + \sum h_i \theta_i \right) x, \end{aligned} \quad (3.9)$$

b) para um retângulo típico $R2$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} = & \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{A} \sum h'_i u_i + \frac{1}{R} \sum h_i w_i + \frac{1}{A} \frac{\partial W_2}{\partial r} + \left(\frac{A'}{A^3} \sum h'_i v_i - \frac{1}{A^2} \sum h'_i v_i + \frac{1}{R} \sum h_i \theta_i \right) x + \right. \\ & \frac{1}{A} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i u_i - \frac{R'}{R^2} \sum h_i u_i + \frac{A'}{A^2} \sum h'_i w_i - \frac{1}{A} \sum h'_i w_i \right) y + \\ & \left. \frac{1}{FA} \left[\frac{1}{R} \left(\sum h'_i u_i - \frac{R'}{R} \sum h_i u_i \right) - \frac{c_2}{A} \left(\frac{1}{R} \left(\sum h'_i v_i - \frac{A'}{A} \sum h'_i v_i - \frac{R'}{R} \sum h'_i v_i \right) + \sum h'_i \theta_i - \frac{A'}{A} \sum h'_i \theta_i \right) \right] y \right\} \\ \gamma_{xz} = & \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{1}{FA} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i v_i + \sum h'_i \theta_i \right) y \\ \gamma_{yz} = & \frac{\partial W_2}{\partial y} - \frac{W_2}{FR} + \frac{1}{FA} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i v_i + \sum h'_i \theta_i \right) x + \frac{1}{F} \left[\frac{1}{R} \sum h_i u_i - \frac{c_2}{A} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i v_i + \sum h'_i \theta_i \right) \right].\end{aligned}\quad (3.10)$$

c) para um retângulo típico $R3$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} = & \frac{1}{F} \left\{ \frac{1}{A} \sum h'_i u_i + \frac{1}{R} \sum h_i w_i + \frac{1}{A} \frac{\partial W_3}{\partial r} + \left(\frac{A'}{A^3} \sum h'_i v_i - \frac{1}{A^2} \sum h'_i v_i + \frac{1}{R} \sum h_i \theta_i \right) x + \right. \\ & \frac{1}{A} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i u_i - \frac{R'}{R^2} \sum h_i u_i + \frac{A'}{A^2} \sum h'_i w_i - \frac{1}{A} \sum h'_i w_i \right) y + \\ & \left. \frac{c_3 x}{FF_c A^2} \left(\sum h'_i \theta_i - \frac{A'}{A} \sum h'_i \theta_i - \frac{F'_c}{F_c} \sum h'_i \theta_i \right) \right\} \\ \gamma_{xz} = & \frac{\partial W_3}{\partial x} - \frac{1}{FA} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i v_i + \sum h'_i \theta_i \right) y + \frac{c_3}{F_c A} \sum h'_i \theta_i \\ \gamma_{yz} = & \frac{\partial W_3}{\partial y} - \frac{W_3}{FR} + \frac{1}{FA} \left(\frac{1}{R} \sum h'_i v_i + \sum h'_i \theta_i \right) x - \frac{c_3 x}{FF_c AR} \sum h'_i \theta_i\end{aligned}\quad (3.11)$$

onde $h'_i = \frac{dh_i}{dr}$, $h''_i = \frac{d^2 h_i}{dr^2}$, $A' = \frac{dA}{dr}$, $R' = \frac{dR}{dr}$, $F'_c = \frac{dF_c}{dr}$ e $\sum = \sum_{i=1}^q$.

Na implementação do modelo, o termo referente a $\frac{\partial W}{\partial r}$ não foi considerado na deformação longitudinal. Este ponto será retomado no capítulos 4 e 5.

3.2 Obtenção da matriz de rigidez

Conforme descrito no Apêndice C a matriz de rigidez é obtida basicamente a partir das relações constitutivas e da compatibilidade geométrica do elemento. Para uma seção reta subdividida em retângulos, procedimentos similares são empregados para cada retângulo. Assim considerando-se o caso *c* (retângulo *R3*), as equações de compatibilidade geométrica (3.10) podem ser escritas em forma matricial de maneira a obter-se, para um elemento *m* com *q* nós, a relação

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.12)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)T} = [\varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \quad (3.13)$$

é o vetor de deformações,

$$\hat{\mathbf{u}}^{(m)T} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_1 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \alpha_1^4 & \alpha_1^5 & \alpha_1^6 & \dots \\ u_q & v_q & w_q & \theta_q & \alpha_q^1 & \alpha_q^2 & \alpha_q^3 & \alpha_q^4 & \alpha_q^5 & \alpha_q^6 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

é o vetor de deslocamentos nodais locais e

$$\mathbf{B}^{(m)} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_q] \quad (3.15)$$

é a matriz de compatibilidade geométrica. Para o nó i , $1 \leq i \leq 4$, a sub-matriz $\mathbf{B}_i$ é definida por

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & a_{14}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^i & 0 & a_{24}^i & a_{25}^i & a_{26}^i & a_{27}^i & a_{28}^i & a_{29}^i & a_{2 \ 10}^i \\ 0 & a_{32}^i & 0 & a_{34}^i & a_{35}^i & a_{36}^i & a_{37}^i & a_{38}^i & a_{39}^i & a_{3 \ 10}^i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde

$$a_{11}^i = \frac{1}{A} \left(h_i' - \frac{yR'}{FR^2} h_i \right)$$

$$a_{12}^i = \frac{x}{FA^2} \left(\frac{A'}{A} h_i' - h_i'' \right)$$

$$a_{13}^i = \frac{1}{F} \left(\frac{1}{R} h_i + \frac{y}{A^2} \left(\frac{A'}{A} h_i' - h_i'' \right) \right)$$

$$a_{14}^i = \frac{x}{FR} h_i + \frac{ex}{FF_e A^2} \left(h_i'' - \left(\frac{A'}{A} + \frac{F_e'}{F_e} \right) h_i' \right)$$

$$a_{22}^i = -\frac{y}{FAR} h_i'$$

$$a_{24}^i = -\frac{1}{A} \left(\frac{y}{F} - \frac{e_1}{F_e} \right) h_i'$$

$$a_{25}^i = h_i$$

$$a_{26}^i = y h_i$$

$$a_{27}^i = y^2 h_i$$

$$a_{28}^i = y^3 h_i$$

$$a_{29}^i = 3x^2 h_i$$

$$a_{2 \ 10}^i = 3x^2 y h_i$$

$$a_{32}^i = \frac{x}{FAR} h_i'$$

$$a_{34}^i = \frac{x}{FF_e A} h_i'$$

$$a_{35}^i = -\frac{x}{FR} h_i$$

$$a_{36}^i = \frac{x}{F} h_i$$

$$a_{37}^i = xy \left(2 - \frac{y}{FR} \right) h_i$$

$$a_{38}^i = xy^2 \left(3 - \frac{y}{FR} \right) h_i$$

$$a_{39}^i = -\frac{x^3}{FR} h_i$$

$$a_{3 \ 30}^i = \frac{x^3}{F} h_i$$

A obtenção da matriz $\mathbf{B}^{(m)}$, para os outros casos considerados, é análogo a este procedimento.

A partir da matriz $\mathbf{B}^{(m)}$ em (3.15), a matriz de rigidez referida ao sistema coordenado local, para cada elemento da estrutura, é obtida da equação, Apêndice C,

$$\mathbf{K}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \cdot \mathbf{B}^{(m)} dV \quad (3.17)$$

onde $\mathbf{C}^{(m)}$ é a matriz constitutiva do material do elemento considerando-se o comportamento linear elástico segundo a lei de Hooke para o estado de deformações identificado no modelo

$$\mathbf{C}^{(m)} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

empregada no cálculo das componentes de tensão, de acordo com a expressão

$$\tau^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \cdot \varepsilon^{(m)} \quad (3.19)$$

onde $\tau^{(m)T} = [\sigma_{zz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]$ é o vetor de tensões.

Pelo presente modelo, vigas com seções retas compostas por retângulos podem ser analisadas através da superposição dos modelos individualizados de cada seção. Desta maneira, a matriz de rigidez de um elemento com seção transversal I, por exemplo, é obtida da adição das rizezas associadas a um retângulo centrado, para representar a alma da seção reta, e a dois retângulos paralelos ao plano do elemento, que representam os flanges, isto é,

$$\mathbf{K}_I^{(m)} = \mathbf{K}_{alma}^{(m)} + \mathbf{K}_{flange\ superior}^{(m)} + \mathbf{K}_{flange\ inferior}^{(m)} \quad (3.20)$$

Note-se que na obtenção destas matrizes os mesmos graus-de-liberdade naturais são utilizados e referidos à linha central do elemento, enquanto que graus-de-liberdades generalizados próprios a cada retângulo são utilizados para representar o empenamento da seção. Então, o vetor $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ de um elemento típico é

$$\hat{\mathbf{u}}^{(m)T} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_1 & {}^1\alpha_1^1 & {}^1\alpha_1^2 & {}^1\alpha_1^3 & {}^2\alpha_1^1 & {}^2\alpha_1^2 & {}^2\alpha_1^3 & {}^2\alpha_1^4 & {}^2\alpha_1^5 & {}^2\alpha_1^6 & {}^3\alpha_1^1 & {}^3\alpha_1^2 & {}^3\alpha_1^3 & {}^3\alpha_1^4 & {}^3\alpha_1^5 & {}^3\alpha_1^6 & \dots \\ u_q & v_q & w_q & \theta_q & {}^1\alpha_q^1 & {}^1\alpha_q^2 & {}^1\alpha_q^3 & {}^2\alpha_q^1 & {}^2\alpha_q^2 & {}^2\alpha_q^3 & {}^2\alpha_q^4 & {}^2\alpha_q^5 & {}^2\alpha_q^6 & {}^3\alpha_q^1 & {}^3\alpha_q^2 & {}^3\alpha_q^3 & {}^3\alpha_q^4 & {}^3\alpha_q^5 & {}^3\alpha_q^6 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

onde ${}^1\alpha_i^j$ são os graus-de-liberdade generalizados do nó i , correspondentes aos coeficientes da equação definida em (3.5), para a representação do empenamento da alma da seção e, ${}^2\alpha_i^j$, ${}^3\alpha_i^j$

são graus-de-liberdade generalizados do nó i , correspondentes aos coeficientes da equação definida em (3.6), para representação do empenamento nas flanges superior e inferior da seção, respectivamente.

3.3 Integração numérica

Para a avaliação numérica da matriz de rigidez, equação (3.17), emprega-se o método da quadratura de Gauss[1]. Este método aproxima o valor exato da integral de uma função de ordem $(2n-1)$, pelo somatório do valor da função em n pontos do domínio de definição da integral, afetados de coeficientes (pesos) de integração. Para a generalização do processo de integração numérica no domínio de integração a ser considerado é necessário empregar-se a transformação Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

das coordenadas do sistema local x, y, z ao sistema r, s, t . Assim a nova expressão da matriz de rigidez a ser avaliada tem a forma

$$\mathbf{K}^{(m)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{(m)T} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \cdot \mathbf{B}^{(m)} \det \mathbf{J} \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (3.23)$$

onde r, s, t são coordenadas naturais $(-1 \leq r, s, t \leq 1)$. Para o caso de um retângulo com excentricidades c_x e c_y nas direções coordenadas x e y , respectivamente, Fig. 3.3, tem-se

$$x = c_x + \frac{a}{2}s, \quad y = c_y + \frac{b}{2}t \quad (3.24)$$

Substituindo-se as expressões (3.24) e (2.6) na matriz jacobiana, tem-se a expressão final do determinante

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{4}FAab. \quad (3.25)$$

Fig. 3.3 Retângulo Excêntrico nas Direções Coordenadas x e y

3.4 Condensação estática da matriz de rigidez

Na matriz de rigidez expressa em (3.20), verifica-se que 19 graus-de-liberdade por nó são necessários para a análise do elemento acima considerado. Deste modo, a análise de uma estrutura cujos componentes apresentem este tipo de seção, requer disponibilidade de memória e esforço computacional significativos para a solução das equações resultantes do equilíbrio, o que representa um ônus a eficiência do elemento. Visando-se a redução de tais disponibilidades, os graus-de-liberdade generalizados, empregados na representação do empenamento da seção, são eliminados por condensação estática da matriz de rigidez de cada elemento.

Em tal procedimento, considera-se a matriz de rigidez associada a um elemento de dois nós, a qual pode ser escrita, levando-se em consideração a ordem em que os graus-de- liberdade estão dispostos no vetor $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ expresso em (3.21), como

$$\mathbf{K}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn}^1 & \mathbf{K}_{ng}^1 & \mathbf{K}_{nn}^{12} & \mathbf{K}_{ng}^{12} \\ \mathbf{K}_{gn}^1 & \mathbf{K}_{gg}^1 & \mathbf{K}_{gn}^{12} & \mathbf{K}_{gg}^{12} \\ \mathbf{K}_{nn}^{21} & \mathbf{K}_{ng}^{21} & \mathbf{K}_{nn}^2 & \mathbf{K}_{ng}^2 \\ \mathbf{K}_{gn}^{21} & \mathbf{K}_{gg}^{21} & \mathbf{K}_{gn}^2 & \mathbf{K}_{gg}^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde n identifica os termos referentes aos graus-de-liberdade naturais, enquanto que g , os termos referentes aos graus-de-liberdade generalizados de empenamento da seção. A matriz de rigidez condensada pode ser obtida pela solução do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn}^1 & \mathbf{K}_{ng}^1 & \mathbf{K}_{nn}^{12} & \mathbf{K}_{ng}^{12} \\ \mathbf{K}_{gn}^1 & \mathbf{K}_{gg}^1 & \mathbf{K}_{gn}^{12} & \mathbf{K}_{gg}^{12} \\ \mathbf{K}_{nn}^{21} & \mathbf{K}_{ng}^{21} & \mathbf{K}_{nn}^2 & \mathbf{K}_{ng}^2 \\ \mathbf{K}_{gn}^{21} & \mathbf{K}_{gg}^{21} & \mathbf{K}_{gn}^2 & \mathbf{K}_{gg}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \alpha^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^1 \\ 0 \\ \mathbf{R}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde $\mathbf{u}^i$ são os vetores que contém os graus-de-liberdade naturais, α^i os vetores que contém os graus-de-liberdade de empenamento e, $\mathbf{R}^i$ os vetores de carregamento, todos referidos ao nó i do elemento. De (3.27), pode-se expressar o sistema em

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{nn} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{K}_{ng} \cdot \alpha &= \mathbf{R} \\ \mathbf{K}_{gn} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{K}_{gg} \cdot \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

cuja solução para $\mathbf{u}$ pode ser escrita na forma simplificada

$$\mathbf{K}_C^{(m)} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (3.29)$$

onde

$$\mathbf{K}_C^{(m)} = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ng} \cdot \mathbf{K}_{gg}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{gn} \quad (3.30)$$

é a matriz de rigidez condensada contendo termos associados apenas aos graus de liberdade naturais, da forma

$$\hat{\mathbf{u}}^{(m)T} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad u_q \quad v_q \quad w_q \quad \theta_q]. \quad (3.31)$$

3.5 Rotação da matriz de rigidez

Conforme anteriormente indicado, a matriz de rigidez condensada está associada a graus-de-liberdade definidos nos sistemas coordenadas locais. Como, para a obtenção da matriz de rigidez de uma estrutura, conforme a expressão (C.11), é necessário que a matriz de rigidez condensada de cada elemento esteja referida aos graus-de-liberdade no sistema coordenado global, uma transformação de rotação deve ser efetuada.

O vetor dos deslocamentos descritos no sistema global de coordenadas para um elemento genérico m , possui três graus-de-liberdade de deslocamento na direção das coordenadas globais X , Y , Z e uma rotação de torção referida ao sistema coordenado convectivo, para cada nó do elemento, da forma

$$\hat{\mathbf{U}}^{(m)} = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad U_q \quad V_q \quad W_q \quad \theta_q] \quad (3.32)$$

onde U_i, V_i, W_i são graus-de-liberdade de deslocamento referidos ao sistema coordenado global e θ_i a rotação axial, no nó i . Este vetor de deslocamentos pode ser obtido pela rotação do vetor de deslocamentos locais definido em (3.31), da forma

$$\hat{\mathbf{U}}^{(m)} = \mathbf{T}^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.33)$$

onde

$$\mathbf{T}^{(m)} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1^{(m)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{(m)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}_q^{(m)} \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

é a matriz de rotação do elemento. Para o ponto nodal i , a submatriz $\mathbf{T}_i^{(m)}$ é definida como

$$\mathbf{T}_i^{(m)} = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_i & \mathbf{n}_{1i} & \mathbf{n}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

onde $\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_{1i}$ e $\mathbf{n}_{2i}$ são os vetores unitários locais calculados no ponto i .

Reescrevendo-se a matriz de compatibilidade geométrica $\mathbf{B}^{(m)}$ em relação aos graus-de-liberdade no sistema coordenado global, através do emprego da expressão (3.33), e substituindo-se o resultado no procedimento de obtenção da matriz de rigidez descrito acima, obtém-se

$$\mathbf{K}_G^{(m)} = \mathbf{T}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_C^{(m)} \cdot \mathbf{T}^{(m)T} \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{K}_C^{(m)}$ é a matriz de rigidez condensada definida em (3.30) e $\mathbf{K}_G^{(m)}$, a matriz de rigidez associada aos graus-de-liberdade globais.

Na implementação do modelo, os vetores unitários $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}_2$, necessários em (3.35), foram obtidos através das definições (A.8) e (A.17), respectivamente, sendo que, na definição (A.8), o vetor posição discretizado, Eq. (3.1), deve ser utilizado. O vetor $\mathbf{n}_1$ pode ser obtido, através da expressão

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{t} \times (\mathbf{X}_o - \mathbf{X})}{|\mathbf{t} \times (\mathbf{X}_o - \mathbf{X})|} \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{X}_o$ é o vetor posição de um nó auxiliar, nó 5 da Fig. 3.1, situado no plano de definição da linha central do elemento, assim como na parte côncava do mesmo. Nesta expressão faz-se uso da característica deste vetor, de ser perpendicular ao plano de definição da linha central do elemento.

3.6 Rotações

As rotações da seção reta da viga devidas a flexão em qualquer ponto da linha central (definido pela coordenada natural r), podem ser obtidas através da discretização das equações (2.14), da forma

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \mathbf{H}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \\ \beta(r) &= \mathbf{H}_\beta \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ é o vetor de deslocamentos locais do elemento m , expresso em (3.31). $\mathbf{H}_\alpha$ e $\mathbf{H}_\beta$ são matrizes de interpolação que podem ser expressas como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\alpha &= \begin{bmatrix} \frac{h_1}{R} & 0 & -\frac{h'_1}{A} & 0 & \frac{h_2}{R} & 0 & -\frac{h'_2}{A} & 0 & \dots & \frac{h_q}{R} & 0 & -\frac{h'_q}{A} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_\beta &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{h'_1}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{h'_2}{A} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h'_q}{A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $h'_i = \frac{dh_i}{dr}$. Da mesma forma, de (3.4), a rotação de torção pode ser expressa como

$$\theta(r) = \mathbf{H}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.40)$$

onde

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_q \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

e sua respectiva derivada em função da coordenada natural r , como

$$\frac{d\theta}{dr}(r) = \mathbf{H}_{\theta'} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.42)$$

onde

$$\mathbf{H}_{\theta'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h'_1 & 0 & 0 & 0 & h'_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & h'_q \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

O vetor de rotações locais θ fica então definido, das Eqs. (3.38) e (3.40), como

$$\theta(r) = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{H}_L \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.44)$$

onde

$$\mathbf{H}_L^T = [\mathbf{H}_\theta \quad \mathbf{H}_\alpha \quad \mathbf{H}_\beta] \quad (3.45)$$

ou, ainda

$$\theta(r) = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{H}_L \cdot \mathbf{T}^{(m)T} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(m)} \quad (3.46)$$

quando escrito em função do vetor deslocamento descrito no sistema de coordenadas globais, Eq. (3.32), onde $\mathbf{T}^{(m)}$ é a matriz de rotação descrita em (3.34).

3.7 Carregamentos nodais equivalentes

Na formulação do elemento, consideram-se os seguintes tipos de carregamento:

- a) Forças concentradas
- b) Torque concentrado
- c) Momentos concentrados de flexão

No trabalho das forças externas definido no Funcional da Energia Potencial Total, Eq.(C.5), somente carregamentos concentrados, como nos casos a e b, foram considerados. O carregamento de momentos de flexão, no entanto, não pode ser obtido diretamente através deste funcional, porquanto na formulação do presente modelo as rotações de flexão não são definidas como grau-de-liberdade explícito. Sendo assim, para a representação de uma solicitação por momentos fletores, é necessário que o trabalho externo associado a esta solicitação seja considerado na avaliação da Energia Potencial Total da estrutura, para a obtenção do respectivo vetor de carregamentos equivalentes.

Considerando-se o caso de um momento concentrado de magnitude M aplicado no ponto nodal k , de um elemento m , na direção do vetor $\mathbf{n}_1$; o trabalho externo é

$$W^{(m)} = M \cdot \alpha_k \quad (3.47)$$

ou

$$W^{(m)} = M \cdot \beta_k \quad (3.48)$$

se o momento é aplicado na direção do vetor $\mathbf{n}_2$, onde as expressões α_k e β_k estão definidas em (3.38) e avaliadas em k . Substituindo-se estas expressões na definição da Energia Potencial Total em (C.5) e impondo-se a condição de estacionaridade do novo potencial, obtêm-se o vetor de carregamentos equivalentes do elemento, da forma

$$\mathbf{R}_M^{(m)} = M \cdot \mathbf{T}^{(m)} \cdot \mathbf{H}_k^T \quad (3.49)$$

onde $\mathbf{R}_M^{(m)}$ é o vetor de carregamentos nodais equivalentes expresso em função dos graus-de-liberdade globais do elemento (3.32), $\mathbf{T}^{(m)}$ é a matriz de rotação definida em (3.34) e,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \mathbf{H}_\alpha|_k \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{H}_\beta|_k \end{aligned} \quad (3.50)$$

para momentos concentrados na direção $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ respectivamente. As expressões $\mathbf{H}_\alpha$ $\mathbf{H}_\beta$ estão definidas em (3.39) e devem ser avaliadas em k .

CAPÍTULO 4

CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE E DE FIXAÇÃO DO ELEMENTO

O modelo proposto neste trabalho, comporta somente graus-de-liberdade de deslocamento na representação da cinemática de deformação de flexão de uma viga curva. Embora a continuidade dos campos de deslocamentos na linha central do elemento seja garantida pela utilização de nós nos extremos do domínio do elemento, esta continuidade não é verificada com os campos de rotações à flexão, expressas em função dos deslocamentos na linha central do elemento. Por outro lado, o grau-de-liberdade de rotação axial (torção) é definido no sistema coordenado local, de maneira que, a sua continuidade entre elementos, também não é garantida pela formulação. As condições de contorno de fixação tais como no engastamento ou na condição de simetria devem ser consideradas em modelos de vigas e, a sua representação, não é possível empregando-se a condição de restrição dos graus-de-liberdade de deslocamento e rotação axial. Como solução destas dificuldades, é proposto neste trabalho empregar-se o método de penalidades na compatibilização das variáveis de estado.

4.1 Método de penalidade

O método consiste em transformar um problema de minimização sujeito a restrições de igualdade em outro equivalente, de minimização ou maximização (estacionaridade), sem restrições. Considere-se, por exemplo, o problema da minimização de uma função $F(\mathbf{X})$, sujeita a restrições de igualdade, da forma $g_i(\mathbf{X})=0$, $i=1,\dots,N$, onde $\mathbf{X}$ é um vetor das variáveis do problema e N o número total de restrições. Uma possível função de penalidade para a solução do valor mínimo de $F(\mathbf{X})$ pode ser expressa na forma

$$\Phi(\mathbf{X},\lambda) = F(\mathbf{X}) + \lambda \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{X})^2 \quad (4.1)$$

onde λ é o parâmetro de penalidade. Para cada valor de λ escolhido, um vetor $\mathbf{X}$, correspondente ao mínimo da nova função objetivo em (4.1), é obtido. No entanto, a medida que se aumenta este valor, o vetor $\mathbf{X}$ que caracteriza o mínimo da função Φ converge para a solução do problema, o mínimo da função $F(\mathbf{X})$ sob as restrições $g_i(\mathbf{X}) = 0$, i. e., satisfazendo todas as restrições impostas. Teoricamente, a convergência da solução do problema é garantida num processo limite, para valores de λ crescentes. Na solução numérica, entretanto, o emprego de valores elevados deste parâmetro, resultam em dificuldades de convergência devido à dominância do segundo termo em relação ao primeiro, na equação (4.1), representando assim a perda de identificação da função penalidade com o problema original. A escolha da magnitude do parâmetro λ está diretamente associada às características da função objetivo $F(\mathbf{X})$ e das equações de vinculação a serem prescritas, que é normalmente deixada à experimentação numérica. No entanto, um possível critério na escolha de λ , é o de manter-se os dois termos da equação (4.1) com a mesma ordem de magnitude.

4.2 Aplicação do método de penalidade na formulação do elemento

No presente modelo, assume-se como função objetivo o funcional da Energia Potencial Total definido no Apêndice C, Eq. (C.5), sujeita às restrições representadas pelas condições de igualdade da forma

$$\text{RESTRIÇÃO} = 0. \quad (4.2)$$

Assim, de acordo com (4.1), tem-se que o novo funcional (Potencial Total) Π^* a ser minimizado é

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i (\text{RESTRIÇÃO})_i^2 \quad (4.3)$$

A imposição da condição de estacionaridade do novo funcional, resulta em uma solução do problema que verifica a condição de equilíbrio resultante de

$$\delta\Pi = 0 \quad (4.4)$$

e satisfaz as condições de contorno para uma precisão requerida, que depende da escolha do parâmetro λ suficientemente elevado. Fisicamente, a contribuição do termo de penalidades no funcional pode ser interpretada pela energia potencial armazenada em um elemento elástico rotacional que, adicionado na estrutura de vigas, impõe as condições de contorno desejadas para um elevado valor da rigidez λ .

Considerando-se o modelo de vigas do presente trabalho, duas formas de restrições devem ser consideradas: a) A continuidade das rotações de flexão e torção entre elementos contíguos e, b) O engastamento de um elemento em uma parede rígida (fixação).

4.2.1 Condições de continuidade

Considerando-se dois elementos contíguos n e $n+1$ com o ponto nodal comum k , mas cujas tangentes às linhas centrais não estão alinhadas, conforme mostrado na Fig. 4.1, a condição de vinculação a ser satisfeita é que

$$\Theta_k^{(n)} = \Theta_k^{(n+1)} \quad (4.5)$$

onde

$$\Theta_k^{(m)} = \begin{bmatrix} \Theta_1^{(m)} \\ \Theta_2^{(m)} \\ \Theta_3^{(m)} \end{bmatrix}_k \quad (4.6)$$

é o vetor de rotações no sistema de coordenadas global do elemento m ($m=n, n+1$), referentes ao ponto nodal k . Note-se que a referência a este ponto nodal comum, corresponde a situações físicas diferentes para cada elemento. Para o caso da Fig. 4.1, por exemplo, corresponde a $r=+1$ e $r=-1$ para os elementos n e $n+1$, respectivamente. O vetor expresso em (4.6) pode ser escrito a partir das rotações locais, da forma

$$\Theta_k^{(m)} = \mathbf{L}_k^{(m)} \cdot \begin{bmatrix} \theta^{(m)} \\ \alpha^{(m)} \\ \beta^{(m)} \end{bmatrix}_k \quad (4.7)$$

Fig. 4.1 Continuidade das rotações entre dois elementos contíguos

onde θ , α e β são as rotações locais e,

$$\mathbf{L}_k^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(m)} & \mathbf{n}_1^{(m)} & \mathbf{n}_2^{(m)} \end{bmatrix}_k \quad (4.8)$$

é a matriz de rotação referente ao ponto nodal k . Expressando-se o vetor de rotações locais em função dos deslocamentos globais do elemento, como em (3.46), e substituindo-se em (4.7), tem-se

$$\Theta_k^{(m)} = \mathbf{H}_{G_k}^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(m)} \quad (4.9)$$

onde

$$\mathbf{H}_{G_k}^{(m)} = \mathbf{L}_k^{(m)} \cdot \mathbf{H}_{L_k} \cdot \mathbf{T}^{(m)T}, \quad (4.10)$$

$\mathbf{T}$ é a matriz de rotação definida em (3.34) e $\mathbf{H}_{L_k}$ é a matriz de interpolação definida em (3.45), a ser avaliada no ponto comum k .

A continuidade é imposta substituindo-se na equação (4.2) as seguintes condições

$$(\text{RESTRIÇÃO})_i = \left[\Theta_i^{(n)} \Big|_k - \Theta_i^{(n+1)} \Big|_k \right], i = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

sendo que, para que a operação indicada seja possível é necessário que a equação (4.9) seja expressa da forma

$$\Theta_k^{(m)} = \mathbf{G}_k^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{((n)+(n+1))} \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{G}_k^{(m)}$ é a matriz de interpolação obtida através de simples manipulação algébrica na matriz $\mathbf{H}_{G_k}^{(m)}$, que relaciona o vetor de rotações globais com o vetor que lista todos os deslocamentos globais de ambos os elementos envolvidos na penalização, $\hat{\mathbf{U}}^{((n)+(n+1))}$.

Para a situação em que três ou mais elementos são concorrentes no mesmo ponto nodal, o procedimento requer que um elemento seja tomado como referência e os demais penalizando em relação a este.

Considerando-se agora o caso de continuidade entre dois elementos em que as tangentes a linha de centros no ponto comum são coincidentes, como a situação mostrada na

Fig. 4.2. Além da compatibilização das rotações de flexão e torção, há ainda necessidade de compatibilizar-se a continuidade entre os campos de deslocamentos longitudinais provocados

Fig. 4.2 Continuidade das rotações e deslocamentos de empenamento entre dois elementos contíguos

pelo empenamento da seção. Neste caso, dois campos de deslocamentos devem ser considerados: o campo de deslocamentos $\Delta \mathbf{X}_f$ devido ao efeito flexo-torsional e o campo $\Delta \mathbf{X}_w$ devido a geometria não circular da seção, ambos definidos no capítulo 2. No primeiro, a condição de continuidade a ser imposta é da forma

$$\Delta \mathbf{X}_f^{(n)} \Big|_k = \Delta \mathbf{X}_f^{(n+1)} \Big|_k \quad (4.13)$$

Considerando-se os campos definidos nas equações (2.23) e (2.25) para as seções I e H respectivamente e, considerando-se que os elementos possuem seção transversal idêntica e o mesmo raio de curvatura no ponto nodal comum e, ainda, que a continuidade da rotação de flexão β já foi satisfeita pelo procedimento indicado anteriormente; a continuidade dos deslocamentos longitudinais é garantida se for contínua, no ponto nodal comum, também a derivada do grau-de-liberdade de rotação de torção em relação a coordenada axial da viga. Esta condição é garantida através de um similar procedimento de penalidade. Para o segundo caso, esta continuidade é garantida se satisfeita a condição

$$\Delta \mathbf{X}_w^{(n)} \Big|_k = \Delta \mathbf{X}_w^{(n+1)} \Big|_k \quad (4.14)$$

equivalente a impor-se que sejam iguais os graus-de-liberdade de empenamento, no ponto nodal comum a ambos elementos. Apesar de não se poder satisfazer esta condição explicitamente, porquanto estes graus-de-liberdade são condensados ao nível da matriz do elemento, a operação de penalização entre os elementos poderia ser feita utilizando os resultados da solução do sistema de equações (3.28) requerendo, porém, um número elevado de operações nas multiplicações e inversão de matriz. No entanto, através de experimentações numéricas a serem apresentadas no capítulo 5, verifica-se que esta condição de continuidade é satisfeita em sua quase totalidade, dentro de uma faixa de erro muito pequena, quando não há a necessidade de representação de grandes gradientes de tensão longitudinal resultantes de torção. Este é o caso de um elemento sujeito a uma condição de contorno de engastamento com $\frac{d\theta}{dz} = 0$ (que será apresentada mais adiante) e submetido a esforços de torção. Assim, objetivando-se a correta representação de tais gradientes de tensão, não se considera, na expressão da deformação longitudinal, o termo $\frac{\partial W}{\partial r}$, pois uma adequada condição de continuidade nos deslocamentos é obtida.

O procedimento da imposição da continuidade da derivada do grau-de-liberdade de rotação de torção, é análogo àquele anteriormente apresentado. Considerar-se-á, não obstante, que ambas rotações (cujas derivadas requer-se contínuas) têm a mesma direção, de modo a efetuar este procedimento utilizando-se unicamente coordenadas locais, i. é,

$$\frac{d\theta}{dr} \Big|_k^{(n)} = \frac{d\theta}{dr} \Big|_k^{(n+1)} \quad (4.15)$$

onde, da equação (3.42),

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_k^{(m)} = \mathbf{H}_\theta|_k \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (4.16)$$

e, a condição de restrição a ser imposta pelo método de penalidade resulta em

$$\text{RESTRIÇÃO} = \left[\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_k^{(n)} - \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_k^{(n+1)} \right] \quad (4.17)$$

4.2.2 Condições de fixação

Considerando-se o problema da imposição das condições de fixação das rotações no ponto nodal k de um elemento fixo à uma parede rígida (engastamento), como pode ser observado na Fig.4.3, três condições de nulidade podem ser requeridas para a modelagem desta situação:

1. Rotação α nula,

$$\alpha_k^{(n)} = 0 \quad (4.18)$$

2. Rotação β nula,

$$\beta_k^{(n)} = 0 \quad (4.19)$$

3. Derivada da rotação de torção nula,

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_k^{(n)} = 0 \quad (4.20)$$

Fig. 4.3 Fixação das rotações no ponto nodal de um elemento fixo à uma parede rígida

A partir de (3.46), as expressões (4.18) e (4.19) podem ser escritas como função dos deslocamentos globais do elemento, da forma

$$\begin{aligned}\alpha_k^{(n)} &= \mathbf{G}_{\alpha_k} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(n)} \\ \beta_k^{(n)} &= \mathbf{G}_{\beta_k} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(n)}\end{aligned}\quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\alpha_k} &= \mathbf{H}_{\alpha_k} \cdot \mathbf{T}^{(n)T} \\ \mathbf{G}_{\beta_k} &= \mathbf{H}_{\beta_k} \cdot \mathbf{T}^{(n)T}\end{aligned}\quad (4.22)$$

e, em procedimento análogo, a expressão (4.20), da forma

$$\left. \frac{d\theta^{(n)}}{dr} \right|_k = \mathbf{G}_{\theta_k} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(n)} \quad (4.23)$$

onde

$$\mathbf{G}_{\theta_k} = \mathbf{H}_{\theta_k} \cdot \mathbf{T}^{(n)T} \quad (4.24)$$

com as condições de restrição a serem garantidas pelo novo funcional Π^* , na Eq. (4.3), para os três casos de fixação considerados, respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{RESTRIÇÃO} &= \left[\alpha^{(n)} \right]_k, \\ \text{RESTRIÇÃO} &= \left[\beta^{(n)} \right]_k \\ \text{RESTRIÇÃO} &= \left[\frac{d\theta^{(n)}}{dr} \right]_k \end{aligned} \quad (4.24)$$

Da condição de estacionaridade no novo funcional resulta que a matriz de rigidez deve ser adicionada de uma matriz de penalidade,

$$\mathbf{K}_p = \lambda \cdot \mathbf{K}_p^* \quad (4.25)$$

onde, para o caso da imposição da condição de continuidade das rotações

$$\mathbf{K}_p^* = \left(\mathbf{G}_k^{(n)} - \mathbf{G}_k^{(n+1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{G}_k^{(n)} - \mathbf{G}_k^{(n+1)} \right) \quad (4.26)$$

sendo $\mathbf{G}_k^{(n)}$ e $\mathbf{G}_k^{(n+1)}$ a matriz de interpolação definida em (4.12) e avaliada no ponto comum k , para os elementos n e $n+1$ respectivamente. Para a imposição das condições de fixação das rotações tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p^* &= \mathbf{G}_{\alpha k}^{(n)T} \cdot \mathbf{G}_{\alpha k}^{(n)} \\ \mathbf{K}_p^* &= \mathbf{G}_{\beta k}^{(n)T} \cdot \mathbf{G}_{\beta k}^{(n)} \\ \mathbf{K}_p^* &= \mathbf{G}_{\theta k}^{(n)T} \cdot \mathbf{G}_{\theta k}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $G_{\alpha}^{(n)}{}_k$, $G_{\beta}^{(n)}{}_k$ e $G_{\theta}^{(n)}{}_k$ são matrizes de interpolação definidas em (4.22) e (4.24) e avaliadas no ponto k , para as três condições de nulidade consideradas no elemento n .

Na escolha do parâmetro de penalidade adequado para a correta representação das condições de continuidade e fixação de elementos acima expostas, neste trabalho empregou-se o seguinte critério

$$\lambda = \lambda^* \cdot \frac{K_{\max}}{K_{p_{\max}}} \quad (4.28)$$

onde $K_{\max}$ corresponde ao maior elemento da matriz de rigidez da estrutura definida no Apêndice C, Eq. (C.11); $K_{p_{\max}}$ corresponde ao maior elemento da matriz penalidade K_p^* e λ^* é um fator que pode ser determinado empiricamente, através da verificação da convergência do problema estudado. Procedendo-se desta maneira, Andueza (Ref. [6]), através de experimentações numéricas na análise de diversos problemas, constatou a convergência monotônica das soluções para valores crescentes de λ^* sendo que, a partir de um valor de referência $\lambda^* = 1000$, os resultados convergem alterando-se em menos de 0.5%. Sendo assim, no presente trabalho, optou-se pelo emprego do parâmetro λ^* na faixa $10^3 - 10^4$, tendo-se verificado uma excelente concordância entre os graus-de-liberdade penalizados.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo os resultados de algumas análises numéricas são apresentadas para demonstrar a versatilidade do elemento em representar o comportamento de vigas retas e curvas cuja seção transversal se deforma fora de seu plano, incluindo-se ainda o efeito flexo-torsional. Em todos os modelos considerados, a compatibilidade dos campos de deslocamento dos elementos para garantir-se a continuidade entre elementos e a fixação de nós, é imposta através do método de penalidades, para satisfazer-se as condições de contorno essenciais requeridas na análise.

5.1 Viga de seção elíptica sob torção constante

A viga reta apresentada na Fig. 5.1, é submetida a um momento torçor ao longo do seu

Fig. 5.1 Análise de uma viga reta de seção elíptica

comprimento devido a dois momentos opostos aplicados nas extremidades. O modelo de elementos finitos empregado na análise é o elemento com dois pontos nodais e discretização lagrangeana. Em cada nó, apenas dois graus-de-liberdade são liberados na análise: a rotação axial θ e o grau-de-liberdade generalizado α , associado à função de empenamento $W(r, x, y) = \alpha \cdot x \cdot y$. Os resultados numéricos obtidos, para a rotação axial e a tensão de cisalhamento máxima na seção reta, são os mesmos obtidos pela solução teórica proposta pela teoria da elasticidade, Ref. [2], como era esperado. Empregou-se, neste modelo, integração analítica na avaliação da matriz de rigidez do elemento.

5.2 Viga curva submetida a carregamento concentrado fora do plano

A Fig. 5.2(a) apresenta uma viga de curvatura constante R , considerada para análise. A seção transversal é retangular e o comprimento da viga corresponde a um quarto de círculo. A viga está engastada em uma extremidade e é submetida a uma carga concentrada normal ao plano de definição da linha central. Os resultados numéricos para os valores do ângulo de rotação de torção e do deslocamento medidos na extremidade livre, são apresentados na Fig. 5.2(b), e foram obtidos com o modelo de vigas curvas com cinco elementos iguais de quatro pontos nodais (elementos cúbicos). Os resultados numéricos obtidos com o presente modelo são comparados com outras soluções de elementos finitos obtidas de modelos de elementos de casca fina de 9 nós, apresentados na Ref[14], e com um elemento sólido degenerado com formulação mista, Ref.[11]. Nesta análise não foi imposta qualquer restrição aos deslocamentos axiais devidos ao empenamento da seção reta. Assim, na extremidade fixa, foram restritas as rotações devidas a flexão da viga, bem como os graus-de-liberdade naturais (translação e rotação axial). Os resultados numéricos obtidos são comparados na Fig. 5.2(b) com os fornecidos pelos outros dois modelos e, uma boa concordância é observada. No modelo empregou-se integração numérica segundo quadratura de Gauss com quatro pontos de integração na direção longitudinal e quatro nas direções do plano da seção transversal.

	Elementos de casca [14]	Sol Num, Ref [11]	Presente Trabalho
θ (rad)	.3755E-3	.3780E-3	.3788E-3
Disp. Z (pol)	.3083E-1	.3084E-1	.3117E-1

(b)

Fig. 5.2 Análise de uma viga curva sob carregamento concentrado fora do plano

5.3 Torção de viga reta longa com seção transversal I

Uma viga reta longa, engastada em uma extremidade está submetida a um torque $T=2500\text{Nm}$ na extremidade livre, conforme mostrado na Fig. 5.3. As dimensões da seção transversal da viga são mostradas na Fig. 5.4(b). O modelo de elementos finitos utilizado emprega cinco elementos cúbicos (quatro nós), com elementos concentrados junto à extremidade de engastamento, necessários para uma adequada representação da distribuição do ângulo de torção ao longo do comprimento da viga. Ao contrário do problema anterior, a condição de contorno junto a extremidade engastada é imposta fixando-se todos os graus-de-liberdade do modelo neste ponto nodal, implicando em uma variação acentuada da torção de

St. Venant ao longo do comprimento da viga. Este fato é demonstrado no gráfico (b) da Fig. 5.4, onde os resultados numéricos obtidos se apresentam em uma boa concordância com a solução analítica. Também, para a distribuição longitudinal da rotação axial e para a tensão normal avaliada no ponto P no flange superior da seção I, as soluções do modelo de elementos finitos, Figs. 5.4(a) e 5.4(c), fornecem uma boa concordância com a solução analítica apresentada na Ref. [13]. Uma diferença máxima de 6.5% apresentada nas rotações é devida principalmente a dificuldade do modelo em representar corretamente a posição no domínio correspondente a transição da solução entre o trecho linear e não-linear da resposta.

Fig 5.3 Modelo de elementos finitos para a análise de uma viga I longa

Os resultados numéricos apresentados na Fig. 5.4 correspondem a solução com o modelo em que o termo $\frac{\partial W}{\partial r}$ da deformação longitudinal, equações (3.9 a 3.11) é desconsiderado. Com o objetivo de se verificar a validade desta hipótese, são também apresentados, na Fig. 5.4, os resultados numéricos da análise em que este termo é incluído na cinemática de deformação. Desta comparação, observa-se que este procedimento implica em dificuldade no modelo para representar elevados gradientes de tensão longitudinal devidos ao empenamento na extremidade engastada. Na Fig. 5.5(d) é apresentada a distribuição

longitudinal do grau-de-liberdade generalizado associado ao empenamento mais significativo da seção reta., para ambos os casos, no qual pode verificar-se, como já mencionado no capítulo anterior, é garantida a continuidade entre os graus-de-liberdade de empenamento entre elementos contíguos, para o caso em que o termo de deformação longitudinal $\frac{\partial W}{\partial r}$, não é considerado.

Fig. 5.4 Comparação de resultados para uma viga reta longa de seção I

($E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$)

Na definição da discretização a ser considerada neste exemplo, levou-se em consideração o comprimento característico da viga. Este comprimento indica a região de influência do engaste na resposta da viga à rotação da seção reta, indicado pela região em que a variação da rotação de torção torna-se linear. Assim sendo, a região de influência do engaste limitada pelo comprimento característico $z^* = 1.075m$ (nó 13), onde se verifica um mecanismo de deformação correspondente ao de uma torção não-uniforme, foi discretizada com quatro elementos igualmente espaçados, enquanto que na região onde predomina o mecanismo de deformação associado à torção de St. Venant, um único elemento é necessário.

No modelo empregou-se integração numérica com 4 pontos de integração de Gauss na direção longitudinal e quatro estações nas direções do plano da seção, para cada seção retangular que compõem a seção reta da viga.

5.4 Torção de viga reta curta com seção transversal I

A viga de seção transversal, mostrada na Fig. 5.5, foi analisada na Ref.[5] empregando-se dois modelos de elementos finitos: o elemento isoparamétrico de viga de 4 nós e o elemento isoparamétrico de casca de 9 nós. Em cada análise considerada, a alma e os flanges da viga I são representados por elementos individuais e, a vinculação destes elementos, compatibilizada com equações de restrição.

Por tratar-se de uma viga curta - comprimento característico $z^* = 8.54"$, para as dimensões apresentadas na Fig. 5.5 - empregou-se um modelo com cinco elementos igualmente espaçados de quatro nós. Os resultados numéricos obtidos estão comparados, na Fig. 5.6, com as soluções analíticas apresentadas na Ref. [13] e com as soluções de elementos finitos na Ref.[5].

Da comparação dos resultados uma boa concordância é observada. Cabe notar que as soluções numéricas com elementos de cascas requerem um maior esforço computacional do que utilizando os elementos de vigas, além de um maior cuidado na preparação do modelo. Na solução do presente modelo para a medida da rotação de torção, Fig. 5.6(a), verifica-se que a ausência de uma região de transição resulta em uma melhor representação do que no problema 5.4, o erro máximo da solução numérica é da ordem de 3%. As soluções para a tensão normal no flange e para a tensão cisalhante na alma, foram avaliadas para os pontos mostrados na figura. Na solução para a tensão cisalhante na alma, observa-se que as soluções se afastam na região próxima a extremidade livre da viga. Este fato é devido, principalmente, as deformações de cisalhamento transversais incluídas na cinemática de deformação da viga, não estão presentes no modelo analítico. Empregou-se, na solução numérica com o presente modelo, quatro pontos de integração de Gauss em todas as direções coordenadas locais para cada seção retangular da seção reta da viga.

Fig. 5.5 Parâmetros físicos e geométricos empregados na análise da viga curta I

Fig. 5.6 Comparação de resultados para uma viga reta curta de seção I

5.5 Viga curva de seção H

A viga curva de seção transversal H, mostrada na Fig. 5.7, foi submetida a seis casos diferentes de carregamento e condições de contorno considerados na Ref. [12]. Em todos os casos empregou-se uma modelagem de quatro elementos de curvatura constante de quatro nós. A solução numérica para as deflexões fora do plano de definição da linha central da viga e para a torção de St. Venant são apresentadas e comparadas com as soluções numéricas reportadas na Ref [12]. Além destas soluções, são também aqui apresentadas as rotações axiais da seção reta da viga e a variação do grau-de-liberdade de empenamento, mais significativo, ao longo do comprimento da viga. São os seguintes os casos considerados:

Fig 5.7 Viga curva de seção H

- **Caso 1:** A viga está engastada em ambas extremidades e submetida a um carregamento concentrado P fora do plano, e a um torque concentrado T , ambos no ponto médio da viga, Fig 5.8(a).

(a) Condições de contorno e carregamento considerados

(b) Comparação entre soluções

Fig. 5.8 Análise Tridimensional de Viga Curva - Caso 1

- **Caso 2:** A viga está engastada à torção em uma das extremidades e submetida ao mesmo carregamento do caso 1.

(a) Condições de contorno e carregamento considerados

(b) Comparação entre soluções

Fig. 5.9 Análise Tridimensional de Viga Curva - Caso 2

- **Caso 3:** A viga está simplesmente apoiada em ambas extremidades e submetida ao mesmo carregamento do caso 1.

(a) Condições de contorno e carregamento considerados

(b) Comparação entre soluções

Fig. 5.10 Análise Tridimensional de Viga Curva - Caso 3

- **Caso 4:** A viga está engastada em ambas extremidades e submetida a um carregamento concentrado distribuído p fora do plano, e a um torque distribuído t , ambos ao longo do comprimento da viga.

(a) Condições de contorno e carregamento considerados

(b) Comparação entre soluções

Fig. 5.11 Análise Tridimensional de Viga Curva - Caso 4

- **Caso 5:** A viga está engastada à torção em uma das extremidades e submetida ao mesmo carregamento do caso 4.

(a) Condições de contorno e carregamento considerados

(b) Comparação entre soluções

Fig. 5.12 Análise Tridimensional de Viga Curva - Caso 5

- **Caso 6:** A viga está simplesmente apoiada em ambas extremidades e submetida ao mesmo carregamento do caso 4.

(a) Condições de contorno e carregamento considerados

(b) Comparação entre soluções

Fig. 5.13 Análise Tridimensional de Viga Curva - Caso 6

Os resultados fornecidos pela Ref. [12] são provenientes da solução numérica das equações diferenciais que regem o equilíbrio de uma viga curva, sendo que, na Ref. [10], são apresentados resultados numéricos para este mesmo problema, empregando-se um modelo de vigas retas baseado na teoria de Vlasov, que são praticamente idênticos. Em comparação com os resultados numéricos obtidos utilizando o presente modelo de vigas curvas verifica-se uma boa concordância. O erro máximo entre ambas soluções verifica-se no caso 5 e é da ordem de 10%. Isto deve-se à dificuldade do presente modelo em representar elevados gradientes de tensão longitudinal que, neste caso, resultam da restrição do efeito flexo-torsional pela imposição da condição $\frac{d\theta}{dr} = 0$ na extremidade engastada.

Através dos resultados numéricos obtidos verifica-se que as condições de contorno impostas são adequadamente representadas, assim como as condições de simetria para os casos 1, 3, 4, e 6. Quanto aos graus-de-liberdade de empenamento, verifica-se que a sua continuidade entre elementos contíguos é garantida e que, nos pontos nodais onde se impõe a condição $\frac{d\theta}{dr} = 0$, estes graus-de-liberdade são restritos.

No modelo, empregou-se quadratura de Gauss na integração numérica com quatro pontos em todas as direções coordenadas locais para cada seção retangular da seção reta da viga.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A formulação de um modelo de viga tridimensional que representa importantes mecanismos associados à cinemática de deformação resultante de esforços axiais, de flexão e de torção, incluindo os efeitos de empenamento da seção reta, é apresentada e sua implementação discutida neste trabalho. Uma das características que diferencia o presente modelo da maioria dos modelos de vigas disponíveis na literatura, recai na representação do mecanismo de deformação à flexão de vigas curvas ser expresso unicamente em função dos deslocamentos da linha central e, na inclusão do empenamento da seção transversal empregando-se graus-de-liberdade generalizados. O elemento foi implementado para a análise linear de vigas retas e curvas, utilizando-se na avaliação das matrizes e vetores do elemento a integração numérica com estações definidas nos pontos de Gauss. No entanto, para o caso particular de vigas retas e de vigas com raio de curvatura constante, a obtenção destas quantidades é feita em forma fechada (analítica), visando-se reduzir o esforço computacional na avaliação numérica de modelos. Também, com este objetivo, na matriz de rigidez ao nível do elemento, os graus-de-liberdade associados ao empenamento da seção são estaticamente condensados.

Apesar dos resultados apresentados para a solução de alguns exemplos indicarem a aplicabilidade do elemento na análise linear de vigas em situações típicas de engenharia, a formulação aqui discutida é baseada em um número de hipóteses que ainda requer adicional avaliação para identificar-se os limites para os quais a formulação pode ser empregada. Neste trabalho considerou-se somente a análise linear de vigas. No entanto, a formulação apresentada pode ser naturalmente estendida para a análise não-linear do material, representando um grande potencial do modelo numérico. Para este objetivo requer-se que, baseado em uma lei de

fluência e em critérios de escoamento no regime plástico, um processo numérico incremental baseado nos deslocamentos seja implementado. Para este fim pode-se utilizar os mesmos recursos computacionais já disponíveis no programa e implementados para o modelo de barras [15]. Também, uma extensão da presente formulação a análise de vigas com seções transversais não-simétricas, tal como as seções T, C, L, Z, I não-simétrica, etc. pode ser obtida desde que as quantidades apropriadas dos mecanismos de deformação sejam induzidos ao centróide e ao centro de cisalhamento da seção reta. Neste aspecto, funções de empenamento da seção reta para retângulos com excentricidade em dois eixos coordenados ou ainda, inclinados em relação aos eixos locais coordenados devem ser previamente avaliadas.

APÊNDICE A

CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

A.1. Representação paramétrica de uma curva no espaço

No espaço Cartesiano Tridimensional $[X, Y, Z]$, o vetor posição de qualquer ponto genérico O pertencente à curva C , indicado na Fig. A.1, é expresso por:

$$\mathbf{X} = x(\xi)\mathbf{e}_1 + y(\xi)\mathbf{e}_2 + z(\xi)\mathbf{e}_3 \quad (\text{A.1})$$

onde o parâmetro ξ , representa a coordenada curvilínea local medida a partir de um ponto de referência O_r sobre a curva C , e $x(\xi)$, $y(\xi)$ e $z(\xi)$ são funções biunívocas do parâmetro ξ (cada valor de ξ define um único ponto sobre a curva C).

Fig. A.1 Representação paramétrica de uma curva no espaço cartesiano

A.2 Comprimento de Arco

O comprimento da curva C entre dois pontos limites a e b de C , pode ser definido como

$$l = \int_a^b \sqrt{\frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{d\xi}} d\xi \quad (\text{A.2})$$

cujo valor l é independente da escolha da representação paramétrica. Substituindo-se o limite superior fixo b em (A.2), pela variável ξ , a integral fica uma função de ξ , a saber, $s(\xi)$. Denotando a variável de integração por ξ^* , tem-se

$$s(\xi) = \int_a^\xi \sqrt{\frac{d\mathbf{X}}{d\xi^*} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{d\xi^*}} d\xi^* \quad (\text{A.3})$$

Esta função é chamada a *função comprimento de arco* ou, simplesmente o comprimento de arco de C .

A constante a em (A.3) pode ser substituída por outra constante; isto é, o ponto da curva correspondente a $s=0$ pode ser escolhido arbitrariamente. Desta maneira, de (A.3), pode-se obter

$$\left(\frac{ds}{d\xi} \right)^2 = \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \quad (\text{A.4})$$

ou, como costuma-se escrever,

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{A.5})$$

ou, ainda, com $A = \left| \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \right|$,

$$ds = A d\xi \quad (\text{A.6})$$

onde ds é o comprimento diferencial da curva C .

A.3 Vetor Tangente

A reta tangente de uma curva C em um ponto P de C é definido como a posição limite da linha reta L através de P e outro ponto Q de C quando Q aproxima-se a P ao longo da curva (Fig. A.2).

Fig. A.2 Tangente de uma curva

Para P e Q correspondendo a ξ e $\xi + \Delta\xi$, respectivamente; L tem a direção do vetor $[\mathbf{X}(\xi + \Delta\xi) - \mathbf{X}(\xi)]/\Delta\xi$. Portanto, o vetor

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\xi + \Delta\xi) - \mathbf{X}(\xi)}{\Delta\xi} \quad (\text{A.7})$$

tem a direção da tangente de C em P . $\dot{\mathbf{X}}$ é o vetor tangente de C em P , e $\mathbf{t}$ é o correspondente vetor unitário

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{X}}}{|\dot{\mathbf{X}}|} = \frac{d\mathbf{X}}{Ad\xi} \quad (\text{A.8})$$

apontando na direção em que o parâmetro ξ aumenta. Se a curva C é representada por $\mathbf{X}(s)$, onde s é o comprimento de arco segue-se, de (A.6), que a derivada $\frac{d\mathbf{X}}{ds}$ é um vetor unitário.

Assim

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} \quad (\text{A.9})$$

ou, ainda,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{ds} = 1 \quad (\text{A.10})$$

A.4 Curvatura e Raio de Curvatura

A curvatura da curva C pode ser definida como

$$K(s) = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} \right| \quad (\text{A.11})$$

a qual é inversamente proporcional ao raio de curvatura R .

$$K = \frac{1}{R} \quad (\text{A.12})$$

Se $K \neq 0$, o vetor unitário $\mathbf{p}$ na direção de $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ é

$$\mathbf{p} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{K} \quad (\text{A.13})$$

e é chamado *vetor normal principal unitário* de C , o qual aponta para o centro de curvatura o , conforme pode ser observado na Fig. A.1. Diferenciando-se a Eq. (A.10) com respeito ao comprimento de arco s , tem-se

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{t} = 2 \cdot \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0 \quad (\text{A.14})$$

onde se verifica que o vetor $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ (e igualmente o vetor $\mathbf{p}$), é perpendicular a $\mathbf{t}$. O vetor

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p} \quad (\text{A.15})$$

é chamado *vetor binormal unitário* de C . Pela definição de produto vetorial, os vetores $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{b}$ constituem um triple de vetores unitários ortogonais. Este triple é chamado *triedro* de C no ponto considerado.

Por motivo de conveniência, neste trabalho serão utilizados os vetores $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ como triple de vetores unitários ortogonais, a partir da redefinição dos vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{b}$. Esta redefinição é desempenhada conforme a Fig. A.3, de maneira que o vetor $\mathbf{n}_2$ aponta na direção

contrária ao centro de curvatura e, o vetor $\mathbf{n}_1$, fica definido através do produto vetorial dos vetores $\mathbf{n}_2$ e $\mathbf{t}$, da forma

$$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{p} = \frac{-1}{K} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{t} \quad (\text{A.17})$$

Fig. A.3 Redefinição dos vetores unitários

A.5 Derivadas dos vetores unitários

Desde que $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são vetores linearmente independentes, pode-se representar qualquer vetor no espaço como uma combinação linear dos mesmos. Se as derivadas existem, elas podem ser representadas desta maneira.

A partir da equação (A.16), pode-se expressar

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -K\mathbf{n}_2 \quad (\text{A.18})$$

e, substituindo-se as expressões (A.6) e (A.12) para ds e K , respectivamente, obtém-se

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\xi} = -\frac{A}{R}\mathbf{n}_2 \quad (\text{A.19})$$

Se a derivada do vetor $\mathbf{n}_1$ não é o vetor nulo, ela é perpendicular a $\mathbf{n}_1$ (conforme procedimento análogo ao aplicado ao vetor $\mathbf{t}$). Ela também é perpendicular a $\mathbf{t}$. De fato, ao diferenciar $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{t} = 0$ tem-se $\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{t}' = 0$; desde que $\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{t} = 0$ porque $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{t}' = \mathbf{n}_1 \cdot -\frac{A}{R} \mathbf{n}_2 = 0$. Conseqüentemente, $\mathbf{n}_1'$ é da forma $\mathbf{n}_1' = \alpha \cdot \mathbf{n}_2$ onde α é um escalar.

Para $\alpha = A \cdot \tau$, tem-se

$$\frac{d\mathbf{n}_1}{d\xi} = A \cdot \tau \cdot \mathbf{n}_2 \quad (\text{A.20})$$

onde a função escalar τ é chamada de *torção* de C .

Pela definição de produto vetorial, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{t} \times \mathbf{n}_1$. Diferenciando-se esta expressão, e substituindo-se as derivadas dos vetores unitários $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}_1$ expressas em (A.19) e (A.20), respectivamente, obtém-se

$$\frac{d\mathbf{n}_2}{d\xi} = \frac{A}{R} \cdot \mathbf{t} - A \cdot \tau \cdot \mathbf{n}_1 \quad (\text{A.21})$$

Para o caso de curvas localizadas num plano do espaço (curvas planas) $\tau = 0$. Substituindo-se este valor nas expressões (A.19) a (A.20), as derivadas dos vetores unitários resultam em

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{d\xi} &= -\frac{A}{R} \mathbf{n}_2 \\ \frac{d\mathbf{n}_1}{d\xi} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{n}_2}{d\xi} &= \frac{A}{R} \cdot \mathbf{t} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

APÊNDICE B

VETORES UNITÁRIOS NA POSIÇÃO DEFORMADA

Uma curva, nas posições indeformada e deformada, quando submetida a um deslocamento genérico definido, é mostrada na Fig. B.1. Um ponto arbitrário O da curva move-se até a posição O' pelo vetor

$$\Delta \mathbf{X} = u\mathbf{t} + v\mathbf{n}_1 + w\mathbf{n}_2 \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ e $\mathbf{t}', \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2$ são os vetores unitários dos eixos coordenados curvilíneos locais na posição indeformada e deformada respectivamente. Desta maneira, o vetor posição deformada $\mathbf{R}$ pode ser descrito como

$$\mathbf{R} = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} + u\mathbf{t} + v\mathbf{n}_1 + w\mathbf{n}_2. \quad (\text{B.2})$$

Fig. B.1 Posições indeformada e deformada da curva

De acordo com a definição no Apêndice A, o vetor tangente na posição deformada é obtido do vetor posição $\mathbf{R}$, através da equação (A.8), da forma

$$\mathbf{t}' = \frac{1}{A'} \frac{d\mathbf{R}}{dr} \quad (\text{B.3})$$

onde

$$A' = \left| \frac{d\mathbf{R}}{dr} \right| \quad (\text{B.4})$$

A derivada do resultado na Eq.(B.2), em relação a coordenada curvilínea local r , fornece

$$\frac{d\mathbf{R}}{dr} = \frac{d\mathbf{X}}{dr} + \frac{du}{dr} \mathbf{t} + u \frac{d\mathbf{t}}{dr} + \frac{dv}{dr} \mathbf{n}_1 + v \frac{d\mathbf{n}_1}{dr} + \frac{dw}{dr} \mathbf{n}_2 + w \frac{d\mathbf{n}_2}{dr} \quad (\text{B.5})$$

que se reduz a

$$\frac{d\mathbf{R}}{dr} = A[(1+\varepsilon)\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}_1 - \alpha\mathbf{n}_2] \quad (\text{B.6})$$

substituindo-se as derivadas dos vetores unitários na posição indeformada conforme resultados na Eq. (A.22) e $\frac{d\mathbf{X}}{dr} = A\mathbf{t}$, Eq. (A.8). Na Eq. (B.6),

$$A = \left| \frac{d\mathbf{X}}{dr} \right| \quad (\text{B.7})$$

$$\varepsilon = \frac{du}{A dr} + \frac{w}{R} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{u}{R} - \frac{dw}{A dr} \\ \beta &= \frac{dv}{A dr}\end{aligned}\quad (B.9)$$

e R é o raio de curvatura da curva na posição inicial. Do módulo do vetor $\frac{d\mathbf{R}}{dr}$ em (B.6) da Eq. (B.4) obtém-se

$$A' = A\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + \beta^2 + \alpha^2}. \quad (B.10)$$

Para o campo de deslocamentos considerado, as expressões ε , α e β correspondem fisicamente às deformações longitudinal, rotação em torno de $\mathbf{n}_1$, e rotação em torno de $\mathbf{n}_2$ da curva, respectivamente. Segundo a hipótese de deformações infinitesimais, estas quantidades podem ser desprezadas perante a unidade. Desta maneira, a expressão (B.10) reduz-se a

$$A' = A \quad (B.11)$$

enquanto a expressão (B.3), através da substituição das expressões (B.6) e (B.11), resulta em

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t} + \beta\mathbf{n}_1 - \alpha\mathbf{n}_2. \quad (B.12)$$

Analogamente, os vetores $\mathbf{n}_2$ e $\mathbf{n}_1$ podem ser calculados na posição deformada, das equações (A.16) e (A.17) respectivamente. Assim

$$\mathbf{n}'_2 = -\frac{\frac{d\mathbf{t}'}{ds'}}{\left|\frac{d\mathbf{t}'}{ds'}\right|} \quad (B.13)$$

$$\mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}'_2 \times \mathbf{t}' \quad (\text{B.14})$$

onde, de (A.6),

$$ds' = A' dr. \quad (\text{B.15})$$

ou, ainda, considerando-se o resultado da expressão (B.11),

$$ds' = A dr. \quad (\text{B.16})$$

Derivando-se os termos da equação (B.12) em relação ao comprimento diferencial s' e, substituindo-se as derivadas dos vetores unitários, obtêm-se

$$\frac{d\mathbf{t}'}{ds'} = \frac{1}{R} [-\alpha \mathbf{t} + \psi \mathbf{n}_1 - (1 + \phi) \mathbf{n}_2] \quad (\text{B.17})$$

onde

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{R}{A} \frac{d\beta}{dr} \\ \phi &= \frac{R}{A} \frac{d\alpha}{dr} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Também, considerando-se a condição de deslocamentos infinitesimais, a Eq. (B.17) é expressa por

$$\frac{d\mathbf{t}'}{ds'} = \frac{1}{R} [-\alpha \mathbf{t} + \psi \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2] \quad (\text{B.19})$$

cujo módulo é, então,

$$\left| \frac{d\mathbf{t}'}{ds'} \right| = \frac{1}{R} \quad (\text{B.20})$$

Substituindo-se em (B.13) as expressões (B.19) e (B.20), tem-se

$$\mathbf{n}'_2 = \alpha \mathbf{t} - \psi \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \quad (\text{B.21})$$

e, levando-se (B.21) e (B.12) em (B.14),

$$\mathbf{n}'_1 = (\alpha\psi - \beta)\mathbf{t} + (1 + \alpha^2)\mathbf{n}_1 + (\alpha\beta + \psi)\mathbf{n}_2 \quad (\text{B.22})$$

que se reduz a

$$\mathbf{n}'_1 = -\beta \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n}_1 + \psi \cdot \mathbf{n}_2 \quad (\text{B.23})$$

após serem desprezados os termos de 2ª ordem.

APÊNDICE C

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste apêndice são apresentados os conceitos do método de elementos finitos baseado nos deslocamentos, utilizados na formulação do elemento de viga.

C.1 Introdução ao Método dos Elementos Finitos

O princípio básico do método dos elementos finitos aplicado ao problema da análise estrutural, é o de representar o equilíbrio e as condições de contorno em um contínuo através da subdivisão em regiões (elementos). Esta representação é matematicamente obtida impondo-se as condições de equilíbrio em cada elemento e as correspondentes condições de compatibilidade geométrica.

A representação de um contínuo em um espaço de dimensão n pode ser caracterizado por diversas variáveis: deslocamentos, tensões, velocidades, etc. cuja representação é adequada apenas através de funções definidas no domínio das coordenadas do contínuo. A obtenção destas funções dependente das condições do problema a analisar é objeto da Mecânica do Contínuo, podendo ser de difícil tratamento analítico. O procedimento de discretização de elementos finitos reduz o problema a um número finito de incógnitas, em que a estrutura é subdividida em elementos e o campo da incógnita expresso em termos de funções aproximantes no interior de cada elemento. As funções aproximantes (ou *funções interpolantes*) são definidas a partir das coordenadas de pontos especificados no domínio do elemento (*nós* ou *pontos nodais*), satisfazendo as condições de compatibilidade e de movimento de corpo rígido. Para a primeira condição empregam-se os nós nos contornos do elemento (os elementos de maior ordem empregam também nós no interior do domínio), em

que elementos adjacentes devem ser conectados. A segunda condição é garantida se a representação dos deslocamentos de corpo rígido e estados de deformação constante forem observados. Por conveniência computacional (e operacional) empregam-se os valores do campo nos pontos nodais como variáveis de estado do problema discretizado. A recuperação da função solução do problema contínuo é obtida empregando-se as funções interpolantes fatoradas pelos valores nodais obtidos da solução numérica discretizada.

Na formulação de elementos finitos baseado nos deslocamentos, o campo de deslocamentos é a função variável a ser calculada. Derivada do método de Ritz, por esta formulação funções de interpolação aproximam o campo de deslocamentos em todo o domínio do elemento, e as condições de equilíbrio no domínio da estrutura e a compatibilidade entre elementos sejam satisfeitas através da minimização da função Potencial Total da estrutura.

C.2 Derivação geral das equações de equilíbrio de elementos finitos

Considera-se o equilíbrio do corpo tridimensional conforme mostrado na Fig. C.1. O carregamento externo aplicado sobre o corpo é classificado de uma forma geral em forças de superfície $\mathbf{f}^S$, forças de corpo $\mathbf{f}^B$, e forças concentradas $\mathbf{F}^i$. Estas forças incluem qualquer carregamento aplicado externamente e as reações de apoio e possuem componentes correspondentes aos três eixos coordenados:

$$\mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \\ f_z^S \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^B = \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Os campo de deslocamentos do corpo a partir da posição indeformada são denotados pelo vetor $\mathbf{U}$, onde

$$\mathbf{U}^T = [U \quad V \quad W] \quad (\text{C.2})$$

O campo de deformações correspondentes a $\mathbf{U}$ é,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}] \quad (\text{C.3})$$

e o campo de tensões correspondente a $\boldsymbol{\varepsilon}$ é

$$\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}] \quad (\text{C.4})$$

Fig. C.1 Corpo tridimensional submetido a um carregamento geral

Assume-se que o carregamento aplicado externamente é conhecido e que deseja-se obter o campo de deslocamentos, de deformações e de tensões definidos em (C.2), (C.3) e (C.4) correspondentes a este carregamento. Assim, deve-se estabelecer as equações diferenciais que governam o equilíbrio de maneira a satisfazer as correspondentes condições de contorno e compatibilidade. Nesta análise as equações diferenciais de equilíbrio e as condições

naturais de contorno devem ser estabelecidas diretamente pelas considerações de equilíbrio em elementos diferenciais do corpo utilizando a condição de estacionaridade do Potencial Total do corpo, ou ainda usando o Princípio dos Deslocamentos Virtuais.

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais estabelece que o equilíbrio de um corpo requer que para qualquer deslocamento virtual cinematicamente compatível (o qual satisfaz as condições de contorno essenciais), imposto no corpo, o trabalho interno virtual total é igual ao trabalho externo virtual total. Esta condição é equivalente à imposição da estacionaridade ou minimização da Energia Potencial Total, para um corpo elástico linear contínuo.

A Energia Potencial Total para um corpo elástico linear contínuo de volume V , é definida como

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV - \int_V \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{f}^B \cdot dV - \int_S \mathbf{U}^{ST} \cdot \mathbf{f}^S \cdot dS - \sum_i \mathbf{U}^{iT} \cdot \mathbf{F}^i \quad (\text{C.5})$$

onde a notação foi definida em (C.1) a (C.4), $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\mathbf{C}$ é a relação constitutiva da transformação tensão-deformação do material.

Impondo-se a condição de estacionaridade do funcional Π , com $\delta\Pi = 0$, e fazendo-se uso da propriedade de simetria da transformação $\mathbf{C}$, obtém-se a seguinte equação que representa a condição de equilíbrio do sistema,

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV = \int_V \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{f}^B \cdot dV + \int_S \delta \mathbf{U}^{ST} \cdot \mathbf{f}^S \cdot dS + \sum_i \delta \mathbf{U}^{iT} \cdot \mathbf{F}^i \quad (\text{C.6})$$

onde $\delta \mathbf{U}^T, \delta \mathbf{U}^{sT}, \delta \mathbf{U}^{iT}$, são as variações dos deslocamentos associados às forças de corpo, superfície e forças concentradas, respectivamente, e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T$, é a correspondente variação de deformação do corpo.

Na análise estrutural utilizando o método dos elementos finitos, aproxima-se a geometria e os deslocamentos do corpo na Fig. C.1 utilizando-se uma discretização do seu domínio em subdomínios (elementos) interconectados por pontos nodais nos contornos dos elementos. Os deslocamentos dos pontos nodais são referidos a um sistema local de coordenadas x, y, z convenientemente escolhido de acordo com a geometria do corpo. Os deslocamentos de um ponto qualquer no interior do elemento são expressos em termos de funções de interpolação e dos deslocamentos de N pontos nodais convenientemente escolhidos. Portanto, para um elemento m , tem-se:

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}} \quad (\text{C.7})$$

onde $\mathbf{H}^{(m)}$ é a matriz de interpolação do campo de deslocamentos no interior do elemento m e $\hat{\mathbf{U}}$ é o vetor que contém as três componentes globais de deslocamento de todos os pontos nodais da estrutura, com dimensão $3N$,

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \cdots \quad U_N \quad V_N \quad W_N] \quad (\text{C.8})$$

Utilizando-se o campo de deslocamentos proposto na equação (C.7), pode-se calcular o campo de deformações associado,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}}^{(m)} \quad (\text{C.9})$$

onde $\mathbf{B}^{(m)}$ é a matriz transformação deformação-deslocamento do elemento m obtida a partir de manipulações algébricas das linhas da matriz $\mathbf{H}^{(m)}$. Então as equações de equilíbrio que

correspondem aos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura de elementos finitos podem ser obtidas reescrevendo-se a Eq. (C.6) na forma de soma das integrações sobre o volume e a área de cada um dos elementos finitos e, então substituindo-se o campo de deslocamentos e de deformações definidos nas equações (C.2) e (C.3). Desta maneira obtém-se um sistema linear de equações que governa o comportamento linear elástico da estrutura, da forma

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (\text{C.10})$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez da estrutura

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{(m)} \cdot dV^{(m)}, \quad (\text{C.11})$$

$\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos dos pontos nodais e $\mathbf{R}$ é o vetor de carregamento equivalente

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_C \quad (\text{C.12})$$

com $\mathbf{R}_B$ e $\mathbf{R}_S$ definidos como os vetores carregamento equivalente das forças de corpo e superfície respectivamente, sendo

$$\mathbf{R}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \cdot \mathbf{f}^{B^{(m)}} \cdot dV^{(m)} \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{R}_S = \sum_m \int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{S^{(m)T}} \cdot \mathbf{f}^{S^{(m)}} \cdot dS^{(m)} \quad (\text{C.14})$$

e $\mathbf{R}_C$ é o vetor de carregamento concentrado.

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{F} \quad (\text{C.15})$$

A equação que representa o equilíbrio estático da estrutura está apresentada em (C.10). Na situação em que o carregamento da estrutura é variável com o tempo, esta equação deve ser satisfeita para cada instante t . Não entanto, para carregamentos aplicados rapidamente em um corpo cuja massa resulte em forças de inércia significativas na equação de equilíbrio, o problema deve ser resolvido para uma análise dinâmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. K. J. BATHE, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
2. S. P. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
3. ADINA, A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis.
4. K. J. BATHE and A. CHAUDHARY, On the displacement formulation of torsion of shafts with rectangular cross-sections. *Int. J. Num. Meth. Engng* **18**, 1565-1568 (1982).
5. K. J. BATHE and P. M. WIENER, On elastic-plastic analysis of I-Beams in bending and torsion. *Computers & Structures* Vol. **17**, No. 5-6, pp. 711-718, 1983.
6. A. ANDUEZA, *Desenvolvimento de um elemento de viga tridimensional com número reduzido de graus de liberdade*. Tese de Mestrado, Departamento de Eng. Mecânica, PUC-RJ, 1984.
7. A. P. CLAPIS, *Modelo numérico de vigas retas de seção transversal composta submetidas a torção*. Tese de Mestrado, Departamento de Eng. Mecânica, PUC-RJ, 1988.
8. E. KREYSZIG, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons, 4th Edition.
9. V. Z. VLAZOV, *Thin-walled elastic beams*. The National Science Foundation, Washington, D. C., 2d Edition, 1961.
10. E. N. DVORKIN, D. CELENTANO, A. CUITIÑO, G. GIOIA, A Vlasov Beam Element. *Computers & Structures* Vol 33, No I, pp 187-196, 1989
11. S. W. LEE and Y. H. KIM, A new approach to the finite element modelling of beams with warping effect. *Int. J. Num. Meth. Engng* **24**, 2327-2341 (1987).
12. C. P. HEINS and K. R. SPATES, Behavior of single horizontally curved girder. *J. Struct. Div., Am. Soc. civ. Engrs.* **ST7**, 1511-1524 (1970).