

1

Noções Previas.

Este capítulo está dedicado à abordagem de conceitos e resultados básicos que serão as bases para o estudo da estabilidade de uma hipersuperfície mínima. Por esta razão algumas demonstrações serão simplesmente referenciadas. Os conceitos e resultados serão apresentados de forma geral no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ focando no caso $\mathbb{R}^3$ quando seja pretendida uma maior visualização dos mesmos.

1.1

Alguns tópicos de Geometria Diferencial.

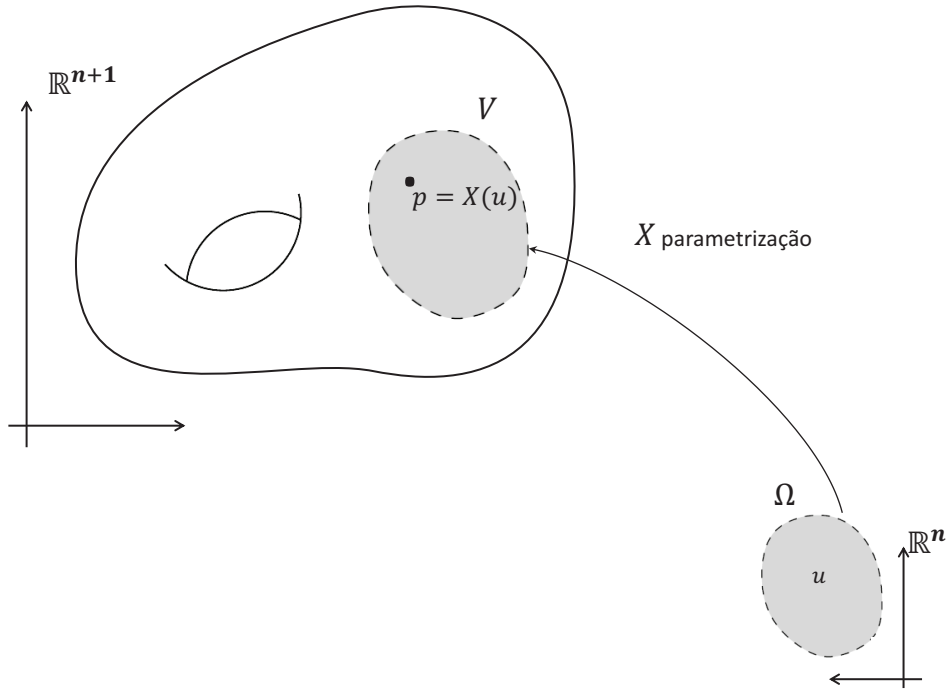
Começamos por definir uma noção indispensável em geometria diferencial o conceito de hipersuperfície regular.

Definição 1.1.1 (Hipersuperfície Regular em $\mathbb{R}^{n+1}$). *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dito hipersuperfície regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ ou subvariedade de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$ se para cada $p \in S$, existem, um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de p em S e uma aplicação suave (de classe C^∞) $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que é uma parametrização local de S em p , ou seja (veja figura 1.1):*

- (i) $X(\Omega) = V, X(u) = p$ com $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$
- (ii) $X : \Omega \rightarrow V$ é um homeomorfismo.
- (iii) $(dX)_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é injetiva para todo $q \in \Omega$, ou seja, possui derivada injetiva em todo ponto.

Os pontos de uma hipersuperfície para os quais esta é regular se denominam pontos regulares.

No caso de $n = 2$ chamamos a S de superfície regular de $\mathbb{R}^3$ ou subvariedade de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.1: Hipersuperfície Regular de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 1.1.1 (Exemplo de Hipersuperfície regular de $\mathbb{R}^{n+1}$). A esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ é uma hipersuperfície regular.

Seja a aplicação $f_1 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.1)$$

onde $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$ que é uma parametrização da esfera $\mathbb{S}^n$. É claro que $f_1(\Omega)$ é um aberto de $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{D}^n$ e como $\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1$, a

função $\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}$ é suave. Além disso pode-se verificar que o jacobiano

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \equiv 1$$

o que garante que a parametrização possua derivada injetiva em todo ponto. Para verificar se dita parametrização representa um homeomorfismo notemos que f_1 é bijetiva e que f_1^{-1} é a restrição da projeção contínua

$$\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

ao conjunto $f_1(\Omega)$. Assim, f_1^{-1} é contínua em $f_1(\Omega)$.

Vamos agora cobrir toda a esfera com parametrizações similares de modo que as propriedades provadas acima sejam válidas em cada uma delas e assim poder concluir sobre a regularidade.

Definamos a aplicação $f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que,

$$f_2(x_1, \dots, x_n) := \left(x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right).$$

A diferença entre esta parametrização e a anterior é a sinal negativa na última componente o que não influencia à perda das propriedades provadas. Daí que represente mais uma parametrização da esfera. Deste modo $f_1(\Omega) \cup f_2(\Omega)$ cobre $\mathbb{S}^n$ exceto o equador:

$$\left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_{n+1} = 0 \right\}.$$

Então, para obter um cobrimento de toda a esfera usando os planos $x_i x_{n+1}$ com $i = 1, \dots, n$ definimos $2n$ aplicações do tipo

$$f_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm d_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \quad i = 1, \dots, n$$

onde

$$d_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2)},$$

para $x = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$, com o chapéu representando a coordenada que será omitida. Cada uma destas aplicações, como no caso de f_1 , representa uma parametrização, e, $\cup_{i=1}^{2n} x_i$ cobrem completamente a $\mathbb{S}^n$. Portanto $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície regular.

Em diversos casos resulta muito mais simples o uso de caracterizações que da mesma definição para verificar se alguma parametrização determina uma hipersuperfície regular. A seguir apresentamos uma proposição que caracteriza às hipersuperfícies regulares e logo em seguida um exemplo fazendo uso da mesma.

Proposição 1.1.1. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $a \in f(\Omega)$ um valor regular de f . Então, $S = f^{-1}(a)$ é uma hipersuperfície regular em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração.

Tomando coordenadas $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $p = (x_{10}, \dots, x_{(n+1)0}) \in f^{-1}(a)$. Como a é um ponto regular de f as

derivadas $f_{x_1}, \dots, f_{x_{n+1}}$ não se anulam simultaneamente.

Suponhamos $f_{x_{n+1}} \neq 0$ em p e definamos a aplicação

$$\begin{aligned} F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_{n+1})) \end{aligned} \quad (1.2)$$

assim

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1} & \dots & \dots & f_{x_{n+1}} \end{pmatrix}$$

então, $\det(dF_p) = f_{x_{n+1}} \neq 0$. Daí, pelo teorema da função inversa, existe vizinhança V de p e W de $F(p)$ tal que a aplicação $F : V \rightarrow W$ é invertível e $F^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável. Denotando por $(x_{11}, \dots, x_{(n+1)1})$ as coordenadas de um ponto de $\mathbb{R}^{n+1}$ na imagem de F , temos que as funções coordenadas de F^{-1}

$$x_1 = x_{11}, \dots, x_{n+1} = f(x_{11}, \dots, x_{(n+1)1}); \quad (x_{11}, \dots, x_{(n+1)1}) \in W$$

são diferenciáveis. Em particular, $x_{n+1} = f(x_{11}, \dots, x_{(n)1}, a) = g(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre $x_1 x_2 \dots x_n$.

Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(x_{11}, \dots, x_{(n+1)1}); x_{(n+1)1} = a\}$ concluímos que o gráfico de g é $f^{-1}(a) \cap V$, e dito gráfico é uma vizinhança coordenada de p pois um gráfico é uma hipersuperfície regular (veja [11] seção 2-2 para o caso de um gráfico em $\mathbb{R}^3$, para dimensões maiores a prova se repete). Logo, para cada $p \in f^{-1}(a)$ temos uma cobertura de toda a hipersuperfície por uma parametrização, então $f^{-1}(a)$ é hipersuperfície regular. $\square$

Exemplo 1.1.2 (O cilindro $M = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície regular). *Seja o cilindro $M = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ descrito por:*

$$M = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}); \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

Definamos a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

então temos $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e $f^{-1}(1) = M$.

Por outro lado $\nabla f = (2x_1, \dots, 2x_n)$, assim $\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = 0$. Ou

seja, as coordenadas do gradiente de f se anulam simultaneamente somente na origem. Logo, 1 é um valor regular de f , e pela proposição 1.1.1 M é uma hipersuperfície regular.

Definição 1.1.2 (Variedade Diferenciável). *Uma variedade diferenciável S é um conjunto de parametrizações $(\Omega_\alpha, x_\alpha)$ tais que:*

- (i) $\bigcup_{\alpha} x_\alpha = S$.
- (ii) Para todo α, β com $x_\alpha(\Omega_\alpha) \cap x_\beta(\Omega_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis (veja figura 1.2).
- (iii) A família $(\Omega_\alpha, x_\alpha)$ é máxima relativamente às condições dos itens anteriores (i, ii).

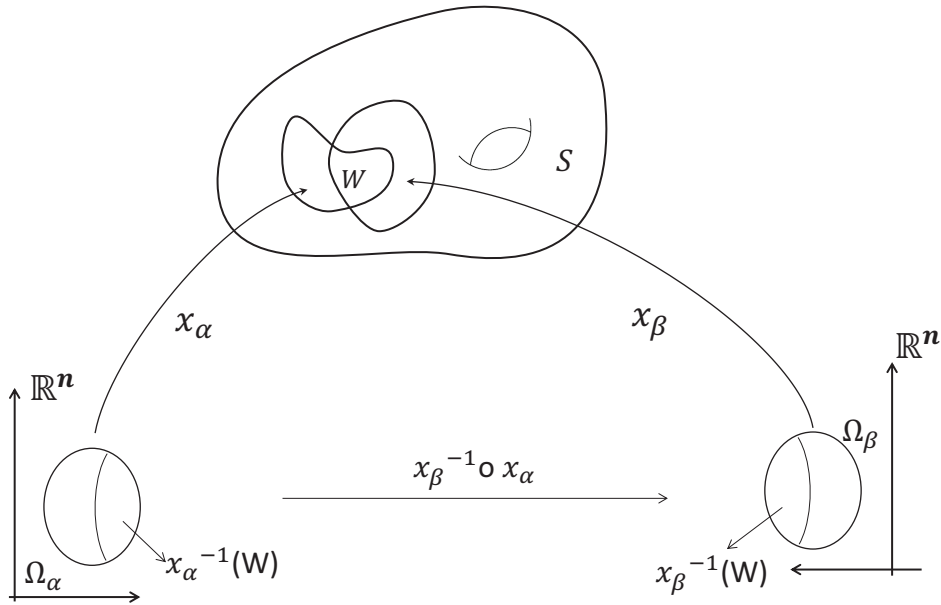


Figura 1.2: Variedade diferenciável.

Observação 1.1.1. *Uma família satisfazendo (i) e (ii) é chamada estrutura diferenciável.*

Observação 1.1.2. *Uma diferença importante entre esta definição e o conceito de hipersuperfície regular é dado pelo item (ii) que estabelece que a mudança de parametrização é compatível.*

As aplicações $\varphi_\alpha = x_\alpha^{-1}$ que sejam homeomorfismos até sua imagem são chamadas de cartas locais, mais precisamente as famílias $(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)$. Usando esta última noção definimos o conceito de aplicação diferenciável.

Definição 1.1.3 (Aplicação diferenciável). *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ aplicação da variedade S de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que dita aplicação é diferenciável se $\forall p \in S$ existem cartas locais $\varphi : \Omega \subset S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $p \in \Omega$, $\Omega \subset S$ aberto, $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e:*

$$f \circ \varphi^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad (1.4)$$

é uma aplicação diferenciável no sentido usual.

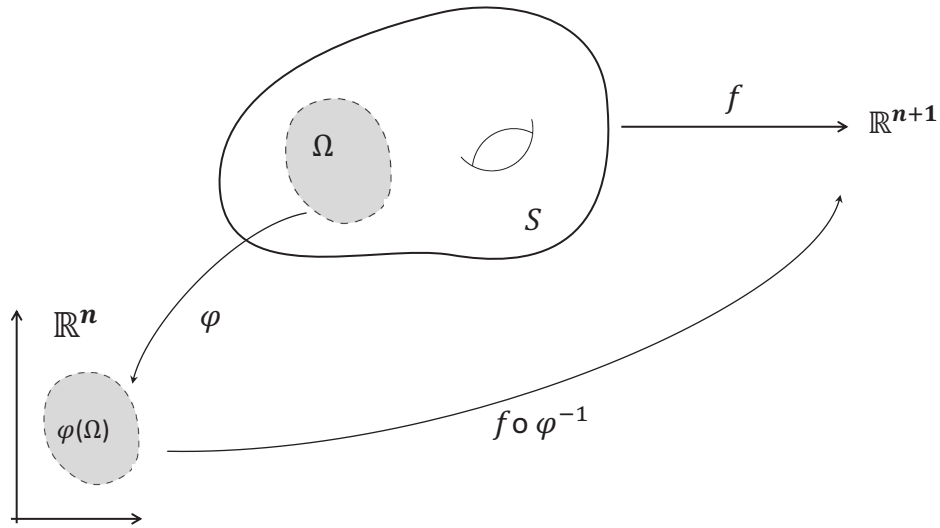


Figura 1.3: Aplicação diferenciável.

Definição 1.1.4 (Plano tangente). *Seja S uma variedade suave de dimensão n . Sejam $p \in S$ e $\alpha : I \rightarrow S$ curva diferenciável em S com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto centrado em zero tal que $\alpha(0) = p$. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de S diferenciáveis em p . Um vetor $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ tangente a S em p é definido pela função:*

$$\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

O conjunto de todos os vetores w tangentes a S em p será indicado por $T_p S$.

A partir das definições 1.1.3 e 1.1.4 para todo $p \in S$ podemos definir a diferencial da aplicação f como segue:

Definição 1.1.5 (A diferencial df_p). *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ aplicação diferenciável da variedade S de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Sejam $p \in S$, $\alpha : I \rightarrow S$ curva diferenciável em S com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto centrado em zero tal que $\alpha(0) = p$ e $v \in T_p S$ tal que $v = \alpha'(0)$. Então, a diferencial df_p se define*

pela aplicação:

$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ v &\mapsto df_p v \end{aligned}$$

tal que $df_p v = df(\alpha(0))\alpha'(0) = \beta'(0)$, com $\beta = f \circ \alpha$.

Assim df_p representa uma aplicação linear que não depende da escolha de α e

$$df_p v(T_p S) \subset T_p(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.5)$$

Um outro conceito essencial é o conceito de hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1.1.6 (Hipersuperfície Imersa). *Seja S variedade suave de dimensão n e $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação suave. Dizemos que a aplicação f é uma imersão se, $(df)_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^{n+1}$ é injetiva $\forall p \in S$. A imagem $f(S)$ é chamada de imersão de S em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Doravante, a menos que se diga o contrário, S sempre será escolhida como uma variedade suave de dimensão n .

Definição 1.1.7 (Mergulho). *Uma imersão $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é um mergulho se $f : S \rightarrow f(S)$ for um homeomorfismo. Neste caso $f(S)$ é uma hipersuperfície regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ ou subvariedade de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Note que existe uma diferença marcada entre os conceitos de imersão e subvariedade. É de suma importância distinguir cada um dos mesmos pois nem sempre que estejamos trabalhando com uma hipersuperfície dada por uma imersão esta vai representar uma subvariedade. A superfície de Enneper é um exemplo pelo qual podemos confirmar este argumento.

Exemplo 1.1.3 (Superfície imersa que não é subvariedade). *A superfície de Enneper dada pela imagem da parametrização*

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

é uma imersão, mas, não é subvariedade.

Com efeito, o diferencial dX_p num ponto p qualquer da superfície é sempre injetivo. Para comprovar isto verificaremos como os determinantes jacobianos associados não se anulam simultaneamente. Porém a aplicação X não é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Sejam $p \in U$ um ponto qualquer e $q = X(p)$. Tomando coordenadas

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ numa vizinhança de p temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv \\ -2uv & -1 - u^2 + v^2 \end{vmatrix} \\ &= (1 - u^2 + v^2)(-1 - u^2 + v^2) - (-4u^2v^2) \\ &= (1 + u^2 + v^2)(u^2 + v^2 - 1)\end{aligned}$$

assim $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv \\ 2u & -2v \end{vmatrix} \\ &= (1 - u^2 + v^2)(-2v) - 2u(2uv) \\ &= -2v(1 + u^2 + v^2)\end{aligned}$$

assim $\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = 0 \Leftrightarrow v = 0$. E,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} -2uv & -1 - u^2 + v^2 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} \\ &= 4uv^2 - 2u(-1 - u^2 + v^2) \\ &= 2u(1 + u^2 + v^2)\end{aligned}$$

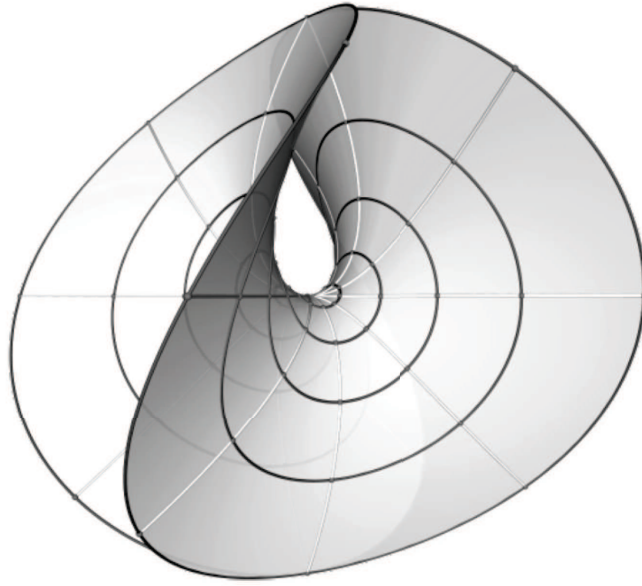
assim $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Logo $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ se anulam simultaneamente se e somente se

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v = 0 \\ u = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

o que resulta impossível.

Portanto dX_p é injetiva para todo ponto p da superfície, logo, a superfície de Enneper é uma superfície imersa.

Por outro lado, dita superfície possui autointerseções sobre duas curvas (veja figura 1.4). Portanto, sua parametrização não é injetora, então, não é um homeomorfismo e por conseguinte não é subvariedade.

Figura 1.4: Superfície de Enneper.¹

Associado ao plano tangente temos a existência de um vetor unitário ortogonal à hipersuperfície no ponto onde o plano tangente é definido. A relação entre ambos é estreita, pode-se dizer que o plano tangente está completamente determinado pelo vetor. Reciprocamente dado um referencial no plano tangente o vetor pode ser completamente determinado. Tal vetor é conhecido como o vetor normal à hipersuperfície, possui orientação e permite estabelecer uma orientação na hipersuperfície. Antes de definir formalmente o vetor normal vejamos que para uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ existe uma métrica (g_{ij}) induzida pela métrica euclidiana $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. O que conduz a que este vetor normal tenha que ser definido em função à métrica.

Definição 1.1.8 (Métrica Induzida). *Sejam $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão, $p \in S$ e $u, v \in T_p S$. A métrica induzida em S no ponto p é definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ segundo a seguinte fórmula:*

$$\langle u, v \rangle_S := \langle df(p)u, df(p)v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (1.8)$$

Tomando um referencial local adaptado na variedade S , i.e., uma base no espaço tangente a S dada por $\left\{ X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, os coeficientes da métrica induzida se definem segundo

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_S := \langle df(p)e_i, df(p)e_j \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Com a métrica induzida $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, S adquire a estrutura de variedade riemanniana $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle_S)$. Além disso, a imersão passa a ser uma imersão isométrica de S em

¹Esta figura foi tomada de <http://www.indiana.edu/~minimal/maze/enneper.html>.

$\mathbb{R}^{n+1}$. No texto, segundo esta imersão isométrica, estaremos identificando $f(S)$ com S .

Agora estamos em condições de definir, a rigor, o vetor normal à hipersuperfície.

Definição 1.1.9 (Vetor Normal à Hipersuperfície). *Sejam S hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p \in S$. Um vetor unitário $N \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ é dito normal a S em p se N for ortogonal a T_pS com respeito à métrica induzida na hipersuperfície.*

Exemplo 1.1.4. *Como no espaço $\mathbb{R}^3$ são obtidos, por sua estrutura, um maior número de resultados, oferecemos a forma explícita do vetor normal para uma superfície imersa neste espaço. Ora, é importante apontar que neste caso temos a vantagem de que o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ resulta um vetor ortogonal a cada um dos vetores do produto. Assim, o cálculo do vetor normal unitário resulta mais simples e não é visível a análise da ortogonalidade com respeito à métrica particular. Por isto apresentamos outro exemplo no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ onde tal análise se mostra explicitamente.*

(i) *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização da superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ com $X = X(u, v)$. Podemos calcular um vetor normal unitário à superfície em cada ponto regular como:*

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}. \quad (1.10)$$

Por exemplo, no caso da superfície de Enneper obtida pela imagem da parametrização (1.6), aproveitando os cálculos realizados nesse momento temos:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \\ &= (2u(1 + u^2 + v^2), 2v(1 + u^2 + v^2), (1 + u^2 + v^2)(u^2 + v^2 - 1)) \\ &= (1 + u^2 + v^2)(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1) \end{aligned}$$

com módulo,

$$\begin{aligned} |X_u \times X_v| &= \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2} |(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)| \\ &= \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 (4u^2 + 4v^2 + (u^2 + v^2 - 1)^2)} \\ &= \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 (1 + u^2 + v^2)^2} \\ &= (1 + u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

Logo, o normal unitário num ponto qualquer da superfície de Enneper é:

$$N = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1). \quad (1.11)$$

(ii) Seja $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície de dimensão n descrita pelo gráfico de uma função de varias variáveis, i.e, $S = \text{graf}(f)$ com

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Uma parametrização natural de S é dada por:

$$X(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \quad \text{com} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

e o referencial local adquire a forma:

$$\{X_1 = (1, 0, \dots, f_{x_1}), \dots, X_n = (0, \dots, 1, f_{x_n})\}.$$

Com isto, os coeficientes da métrica são descritos por:

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} f_{x_i} f_{x_j} & \text{se } i \neq j \\ 1 + (f_{x_i})^2 & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.12)$$

Assim, para qualquer ponto $p \in S$ um vetor ortogonal a $T_p S$ tem que ser ortogonal a cada um dos elementos do referencial com respeito a métrica (g_{ij}) . Ou seja, a ortogonalidade se verifica tomando o produto escalar definido por (1.12). Temos então que um vetor normal unitário ao gráfico pode ser

$$N = \left(\frac{-f_{x_1}}{w(f)}, \dots, \frac{-f_{x_n}}{w(f)}, \frac{1}{w(f)} \right) \quad (1.13)$$

com $w(f) = \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2}$.

Dado que o vetor normal N , é escolhido unitário pode ser estudado como uma aplicação na esfera unitária, i.e,

Definição 1.1.10 (Aplicação Normal de Gauss). *Seja S uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ orientada pelo normal unitário N e seja $p \in S$ qualquer. A aplicação*

$$\begin{aligned} g : S &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\mapsto g = N(p) \in \mathbb{S}^n \end{aligned} \quad (1.14)$$

com $\mathbb{S}^n$ a n -esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$, é chamada aplicação normal de Gauss (veja figura 1.5).

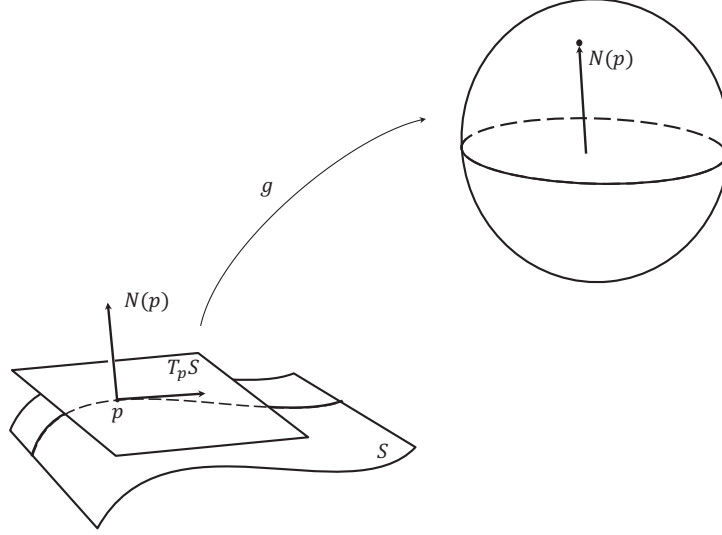


Figura 1.5: Aplicação Normal de Gauss.

Exemplo 1.1.5. Seja $n = 2$ e S a superfície de Enneper. A aplicação normal de Gauss num ponto p da superfície é dada por

$$g : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p \mapsto g = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1) \in \mathbb{S}^2. \quad (1.15)$$

Vejamos que para qualquer $q \in \mathbb{S}^n$, o plano tangente $T_q\mathbb{S}^n$ é o plano ortogonal em $\mathbb{R}^{n+1}$ ao vetor q . Assim, para cada $p \in S$, o espaço tangente $T_{N(p)}\mathbb{S}^n$ coincide com T_pS . Logo, a aplicação $dg : T_pS \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^n$ é um endomorfismo linear de T_pS .

Definição 1.1.11. Dado $p \in S$, o endomorfismo linear

$$A := -dg_p : T_pS \rightarrow T_pS$$

é chamado operador ou aplicação de Weingarten A de S em p .

Observação 1.1.3. Usando a conexão $\bar{\nabla}$ do ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$ (veja apêndice) para $v \in T_pS$ temos que:

$$Av = -\bar{\nabla}_v N. \quad (1.16)$$

Com esta caracterização facilmente pode-se comprovar que o operador de Weingarten é autoadjunto. Ou seja, sua matriz numa base ortonormal é simétrica, daí ele possui n autovalores reais que definiremos como segue.

Definição 1.1.12 (Curvaturas Principais). *Seja S uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p \in S$, os autovalores $k_i(p)$ da aplicação linear simétrica*

$$A : T_p S \rightarrow T_p S \quad (1.17)$$

são chamados curvaturas principais de S em p .

As curvaturas principais, como veremos a seguir, podem ser vistas também, a partir do vetor curvatura normal. Isto além de representar um modo mais simples do cálculo das mesmas exibe sua interpretação geométrica. Primeiramente vamos definir os termos de primeira e segunda forma fundamentais e logo o termo de curvatura normal para deduzir esta relação.

Definição 1.1.13 (Primeira e segunda formas fundamentais). *Sejam $v, w \in T_p S$ definimos a primeira e segunda forma fundamentais da superfície S em p como:*

$$I(v, w) := \langle v, w \rangle \quad (1.18)$$

$$II(v, w) := \langle A(v), w \rangle. \quad (1.19)$$

onde A é o operador de Weingarten. Com formas quadráticas associadas dadas respectivamente por

$$I(v) = |v|^2 \quad (1.20)$$

$$II(v) = \langle A(v), v \rangle. \quad (1.21)$$

Tomando um referencial local adaptado $\{X_1, \dots, X_n\}$ em $T_p S$ os coeficientes de estas formas fundamentais em coordenadas locais podem ser escritos como:

$$a_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle, \quad b_{ij} = \langle N, \bar{\nabla}_{X_j} X_i \rangle = \langle N, X_{ij} \rangle. \quad (1.22)$$

Definição 1.1.14 (Curvatura Normal). *Seja S hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, tal que dado $p \in S$ e $v \in T_p S$, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A curvatura normal de γ , curva regular de S parametrizada por α , na direção do vetor unitário v é dada por:*

$$k_n(v) = II_p(v). \quad (1.23)$$

Se tomarmos, então, $v = e_i, i = 1, \dots, n$ com e_i autovetores associados as curvaturas principais k_i , que são chamados de direções principais, formando uma base ortonormal, i.e, $Ae_i = k_i e_i$ obtemos

$$\begin{aligned} -dg(p)e_i = k_i &\Leftrightarrow Ae_i = k_i e_i \Leftrightarrow -\bar{\nabla}_{e_i} N = k_i e_i \Leftrightarrow \langle -\bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle = k_i \\ &\Leftrightarrow \langle II_p(e_i), e_i \rangle = k_i. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Logo, as curvaturas principais $k_i, i = 1, \dots, n$ representam n curvaturas normais que denotaremos como $k_i(N)$.

Além disso a expressão (1.24) nos permite definir o módulo da segunda forma fundamental como:

$$|A| := \sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2}. \quad (1.25)$$

A partir das curvaturas principais é possível, também, definir duas noções de curvatura de soma importância: a curvatura de Gauss-Kronecker e a curvatura Média.

Definição 1.1.15 (Curvatura de Gauss-Kronecker e Curvatura Média). *Seja S hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvaturas principais $k_i, i = 1, \dots, n$. Definimos a curvatura de Gauss-Kronecker K da hipersuperfície no ponto p como*

$$K = \det(A) = \prod_{i=1}^n k_i, \quad (1.26)$$

e, a curvatura média H da hipersuperfície no ponto p segundo,

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i. \quad (1.27)$$

Tomando coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_n)$ com o referencial local adaptado $\{X_1, \dots, X_n\}$ para a matriz (a_{ij}) do operador de Weingarten A na hipersuperfície, temos que $AX_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$. Portanto obtemos que a curvatura média H satisfaz a seguinte relação:

$$\text{traço}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = nH \quad (1.28)$$

ou equivalentemente usando conexões $nH = \langle \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{X_i} X_i, N \rangle$.

Associado à curvatura média temos o vetor curvatura média $\vec{H}$ ao qual podemos atribuir o significado geométrico que aponta para o sentido que faz decrescer a área como consequência da fórmula (2.10) da primeira variação da área que estudaremos no próximo capítulo.

Definição 1.1.16 (Vetor Curvatura Média). *Seja uma hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. O vetor curvatura média em um ponto $p \in S$ é definido por:*

$$\vec{H}(p) := H(p) \vec{N}(p) \quad (1.29)$$

onde $\vec{N}(p)$ é o vetor normal unitário a $T_p S$ em p .

Observação 1.1.4. *Note que o sentido do vetor curvatura média, $\vec{H}$, depende do sentido de $\vec{N}$. Se mudarmos o sentido do normal unitário também muda a sinal da curvatura média consequentemente a sinal de $\vec{H}$ permanece invariável.*

Sem dúvidas, o ponto mais relevante do trabalho com a noção de curvatura média é o estudo das hipersuperfícies com curvatura média constante (ou variedades em casos mais gerais). Em particular, as de curvatura média zero.

Definição 1.1.17 (Hipersuperfície Mínima de $\mathbb{R}^{n+1}$). *Seja S uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que S é uma hipersuperfície mínima se e somente se a curvatura média $H \equiv 0$, i.e.,*

$$H(p) = 0 \quad \forall p \in S. \quad (1.30)$$

Observação 1.1.5. *Note que as curvaturas principais definidas previamente são raízes do polinômio característico:*

$$p(t) = \det(A - tE) \quad (1.31)$$

onde E representa a aplicação identidade em $T_p S$ e A o operador de Weingarten. Explicitamente expressamos $p(t)$ segundo

$$p(t) = \sum_{r=0}^n S_{n-r} (-1)^{n-r} t^r$$

onde $S_r, r = 1, \dots, n$ são as funções simétricas das curvaturas principais, i.e.,

$$\begin{aligned} S_1 &= k_1 + \dots + k_n = \text{traço} A = nH \\ S_2 &= k_1 k_2 + \dots + k_{n-1} k_n = \sum_{i,j} k_i k_j = \binom{n}{2} H_2 \\ &\vdots \\ S_r &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r} = \binom{n}{r} H_r \\ &\vdots \\ S_n &= k_1 \dots k_n = \det A = K. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Como as curvaturas principais são as raízes do polinômio característico (1.31) temos que $\sum_{r=0}^n S_{n-r} (-1)^{n-r} k_i^r = 0$ o que implica que

$$\sum_{r=0}^n S_{n-r} (-1)^{n-r} A^r = 0.$$

As funções simétricas das curvaturas principais $S_i, i = 1, \dots, n$ são invariantes pela imersão e oferecem informação sobre a curvatura i -dimensional. O caso especial de S_n tem interpretação geométrica como o determinante da aplicação normal de Gauss. Podemos dizer, então, que uma hipersuperfície é mínima se

a primeira função simétrica das curvaturas principais é nula.

Em particular, para $n = 2$

$$p(t) = (t - k_1)(t - k_2) = t^2 - 2Ht + K. \quad (1.33)$$

Observação 1.1.6. Como podemos observar a partir da definição 1.1.16 do vetor curvatura média $\vec{H}$, este é nulo se e somente se a curvatura média H é nula. Logo, podemos expressar a condição da hipersuperfície ser mínima pela nulidade do vetor curvatura média $\vec{H}$.

1.1.1

Algumas especificidades do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

Com frequência no ambiente $\mathbb{R}^3$ é também usada a notação Gaussiana que identifica os coeficientes g_{ij} , b_{ij} , i, j —ésimos da métrica induzida na superfície e a segunda forma fundamental respectivamente com letras (esta será a notação usada no material no caso em que estejamos a trabalhar em uma superfície). Tomando uma parametrização da superfície dada por uma aplicação X e coordenadas locais (u, v) definimos os coeficientes g_{ij} da métrica em notação Gaussiana como

$$E := g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F := g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G := g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle$$

e os coeficientes b_{ij} correspondentes à segunda forma fundamental definida na superfície como

$$e := b_{11} = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$f := b_{12} = b_{21} = -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle,$$

$$g := b_{22} = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

Escrevendo $\mathbf{g} := \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, $\mathbf{b} := \det(b_{ij}) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ temos,

$$W = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\mathbf{g}} = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Com isto as curvaturas de Gauss-Kronecker e média de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ em termos de g_{ij} e b_{ij} adquirem a seguinte forma,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = k_1 k_2 \quad (1.34)$$

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}(b_{ij})(g^{ij}) = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (1.35)$$

Neste caso, podemos renomear à curvatura de Gauss-Kronecker como curvatura Gaussiana a qual representa uma medida da curvatura intrínseca da

superfície, veja observação 1.1.7. Se a curvatura média na superfície for identicamente nula então a superfície é dita mínima segundo a definição 1.1.17. Caso que a superfície seja não paramétrica, i.e, a mesma pode ser descrita pela imagem da parametrização

$$\begin{aligned} X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned} \quad (1.36)$$

onde $f = f(x, y)$ é uma função de classe $\mathbf{C}^2$ obtemos dois condições equivalentes de uma superfície ser mínima como segue.

Teorema 1.1.1 (EDP das superfícies mínimas não paramétricas). *Seja a superfície S não paramétrica obtida pela imagem da aplicação (1.36). Então, dita superfície é mínima se e somente se*

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (1.37)$$

Demonstração.

Seja S superfície não paramétrica, sabemos que S é mínima se e somente se, por definição, $H(p) \equiv 0$, $\forall p \in S$. Ou seja, se e somente se,

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = 0. \quad (1.38)$$

Como S é não paramétrica ela se expressa como o gráfico de uma função $f = f(x, y)$. Assim, usando os resultados do exemplo 1.1.4 (ii) para $n = 2$ temos que o normal unitário se escreve como:

$$N = \frac{1}{w}(-f_x, -f_y, 1) \quad \text{com} \quad w = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2},$$

e os coeficientes da métrica e segunda forma fundamental resultam:

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_x^2, & F &= f_x f_y, & G &= 1 + f_y^2 \\ e &= \frac{f_{xx}}{w}, & f &= \frac{f_{xy}}{w}, & g &= \frac{f_{yy}}{w}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H = 0 &\Leftrightarrow eG + gE - 2fF = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{f_{xx}}{w}(1 + f_y^2) + \frac{f_{yy}}{w}(1 + f_x^2) - 2f_x f_y \frac{f_{xy}}{w} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

□

Teorema 1.1.2 (Forma divergente da EDP de superfícies mínimas). *Seja a superfície S não paramétrica obtida pela imagem da aplicação (1.36). Então dita superfície é mínima se e somente se*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0. \quad (1.40)$$

Demonstração.

Pelo teorema anterior uma superfície não paramétrica é mínima se e somente se é satisfeita a EDP (1.37). Rearrmando os termos desta expressão obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} \\ &= (1 + f_y^2)f_{xx} - f_x f_y f_{xy} - f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} \\ &= f_{xx}(1 + |\nabla f|^2) - f_x^2 f_{xx} - f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + |\nabla f|^2) - f_y^2 f_{yy} - f_x f_y f_{xy} \\ &= (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_x \right) + (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)_y \right) \\ &= (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ou seja, a superfície é mínima se e somente se $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0$. $\square$

Com isto, e lembrando que toda superfície suave pode ser escrita localmente como o gráfico de uma função podemos concluir que toda superfície mínima se pode representar localmente pela equação em derivadas parciais de segunda ordem quasilinear e elíptica (1.37) ou por sua forma divergente (1.40).

Além disso, também neste ambiente (o espaço $\mathbb{R}^3$) é sempre possível, como mostramos a continuação, obter a existência de parametrizações conformes ou isotérmicas numa vizinhança de qualquer ponto da superfície. O que torna às superfícies em $\mathbb{R}^3$ em certo sentido mais manejáveis. Neste sentido podem ser usados muitos dos resultados obtidos do ambiente euclidiano mesmo com uma métrica não euclidiana, porém, conforme à métrica euclidiana.

Definição 1.1.18 (Parametrização Conforme ou Isotérmica). *Seja $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão suave da superfície S . Tomando coordenadas locais (u, v) dizemos que a imersão é conforme ou isotérmica se existe uma função real suave $\Lambda(u, v)$ tal que a métrica ds^2 induzida em S toma a forma:*

$$ds^2 = \Lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2) \quad (1.41)$$

ou equivalentemente se:

$$\left| \frac{\partial X}{\partial u} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial v} \right|^2 = E \neq 0, \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = F = 0. \quad (1.42)$$

A magnitude expressada pela função Λ é conhecida como fator conforme. Este é obtido ao calcular a métrica induzida se os coeficientes forem iguais como se expressa explicitamente na condição (1.42), ou seja, $\Lambda = E = G$.

Teorema 1.1.3 (Teorema de existência de coordenadas conformes). *Seja S uma superfície suave, então, numa vizinhança de qualquer ponto $p \in S$ existe uma parametrização conforme.*

Para uma demonstração no caso de superfícies mínimas pode consultar o lema 4.4 de [24].

Observação 1.1.7. *Pelo teorema Egregium de Gauss (veja [11] capítulo 4-3) a curvatura de Gauss K é uma característica intrínseca da superfície, i.e, não depende do espaço ambiente ou da parametrização que defina a superfície. Se esta parametrização for conforme ao redor de um ponto p qualquer, K é dada por*

$$K(p) = \frac{-\Delta \log \Lambda(p)}{\Lambda^2(p)} \quad (1.43)$$

com Λ o fator conforme.

1.1.2

Exemplos de Hipersuperfícies Mínimas.

O exemplo mais simples de hipersuperfícies mínimas são os hiperplanos. De fato, ao serem lineares as curvaturas principais são nulas em todo ponto, consequentemente, a curvatura média $H \equiv 0$.

Mostremos alguns outros exemplos não tão triviais de superfícies mínimas.

Exemplo 1.1.6 (Os catenoides em $\mathbb{R}^3$ são superfícies mínimas). *O catenoide é a superfície mínima de revolução obtida pela rotação de uma catenária.*

Estudemos a família de catenoides obtidos pela revolução das catenárias $g(z) = a \cosh(\frac{z}{a})$, com $a > 0$ sobre o eixo z como se observa na figura 1.6 (para um membro da família). Assim, este pode ser descrito pela seguinte fórmula:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{com } a > 0. \quad (1.44)$$

Tomando coordenadas locais, escrevemos uma parametrização para o catenoide segundo a aplicação

$$\begin{aligned} C : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au) \end{aligned} \quad (1.45)$$

com $u \in \mathbb{R}$ e $v \in [0, 2\pi]$.

Para verificar que é uma superfície mínima procuremos a curvatura média num ponto arbitrário. Usaremos a primeira igualdade da fórmula (1.35), ou seja,

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}.$$

Para o cálculo dos coeficientes tomemos as primeiras e segundas derivadas da parametrização com respeito a cada uma das componentes,

$$\begin{aligned} C_u(u, v) &= (a \sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, a) \\ C_v(u, v) &= (-a \cosh u \sin v, a \cosh u \cos v, 0) \\ C_{uu}(u, v) &= (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, 0) \\ C_{vv}(u, v) &= (-a \cosh u \cos v, -a \cosh u \sin v, 0) \end{aligned}$$

Note que não calculamos a derivada C_{uv} pois esta somente intervém no cálculo do coeficiente f e veremos que não é preciso dar sua forma explícita. Os coeficientes da métrica são então:

$$\begin{aligned} E &= \langle C_u, C_u \rangle = a^2 \sinh^2 u \cos^2 v + a^2 \sinh^2 u \sin^2 v + a^2 = a^2 \cosh^2 u, \\ F &= \langle C_u, C_v \rangle = -a^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v + a^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v = 0, \\ G &= \langle C_v, C_v \rangle = a^2 \cosh^2 u \sin^2 v + a^2 \cosh^2 u \cos^2 v = a^2 \cosh^2 u. \end{aligned}$$

Do resultado acima podemos concluir que temos uma parametrização conforme do catenoide, i.e., $E = G = \cosh^2 u$, $F = 0$. Como $F = 0$ se verifica que não é necessário calcular o coeficiente f pois ao estar multiplicado por F na expressão de H esse termo se anula.

Calculemos agora o normal unitário para obter o resto dos coeficientes,

$$N = \frac{C_u \times C_v}{|C_u \times C_v|} = \frac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u).$$

Assim,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, C_{uu} \rangle = a \cos^2 v + a \sin^2 v = a \\ g &= \langle N, C_{vv} \rangle = -a \cos^2 v - a \sin^2 v = -a. \end{aligned}$$

Como e, g são opostos e $E = G$ temos claramente, sem necessidade de explicitar, que $H = 0$. Portanto, podemos concluir que a imersão do catenoide de $\mathbb{R}^3$ é mínima e conforme.

Mais precisamente obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.2. *Fora dos planos, os catenoides de $\mathbb{R}^3$ são as únicas superfícies mínimas de revolução.*

Demonstração.

Estudemos como os catenoides de $\mathbb{R}^3$ são as únicas superfícies mínimas de revolução. No último capítulo veremos como este resultado se estende ao espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

Suponhamos que a geratriz de uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$ qualquer S seja um gráfico horizontal dado por uma função $y = g(z)$ com $z \in I \subset (0, \infty)$.

Para esta superfície procuremos as curvaturas principais $k_1(N), k_2(N)$.

Sejam k_1 a curvatura da curva geratriz α_1 e k_2 a curvatura do círculo α_2 que resulta ao fazermos a revolução sobre o eixo z . Para cada ponto p sobre a superfície definamos N um vetor normal unitário à mesma, n_1 um vetor normal unitário à curva geratriz $y = g(z)$ e n_2 um normal unitário ao círculo de revolução. Claramente n_1 coincide com N , veja figura 1.6, daí $k_1(N) = k_1 \langle n_1, N \rangle = k_1$. Ora, como k_1 representa a curvatura da curva geratriz dada por um gráfico horizontal temos $k_1 = -\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}}$, assim

$$k_1(N) = -\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$k_2(N) = k_2 \langle n_2, N \rangle = k_2 \cos(\theta)$$

com k_2 a curvatura do círculo, logo, $k_2 = \frac{1}{g}$. Como θ é o ângulo formado por n_2 e N , temos, $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + (g')^2}}$, daí

$$k_2(N) = \frac{1}{g\sqrt{1 + (g')^2}}.$$

Com isto podemos calcular a curvatura média da superfície,

$$H = \frac{1}{2}(k_1(N) + k_2(N)) = \frac{1}{2}\left(-\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{g\sqrt{1 + (g')^2}}\right).$$

Para uma superfície mínima $H = 0$, logo, igualando a última expressão a zero, obtemos

$$\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{g\sqrt{1 + (g')^2}}.$$

Multiplicando a expressão por $2g'\sqrt{1+g'^2}$ resulta

$$\frac{2g'g''}{(1+g'^2)} = \frac{2g'}{g}.$$

Integrando de ambos lados, para a constante tem-se

$$\log(1+g'^2) = \log(ag)^2 \Rightarrow g' = \sqrt{(ag)^2 - 1}$$

que pode ser rescrita como

$$\frac{adg}{\sqrt{(ag)^2 - 1}} = adx.$$

Integrando novamente, a expressão acima é equivalente a

$$\cosh^{-1}(ag) = ax + c.$$

Ou seja,

$$g(z) = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{z}{a} + c\right)$$

que representa a equação de uma família a um parâmetro de catenárias, curvas geratrizes da família dos catenoides. $\square$

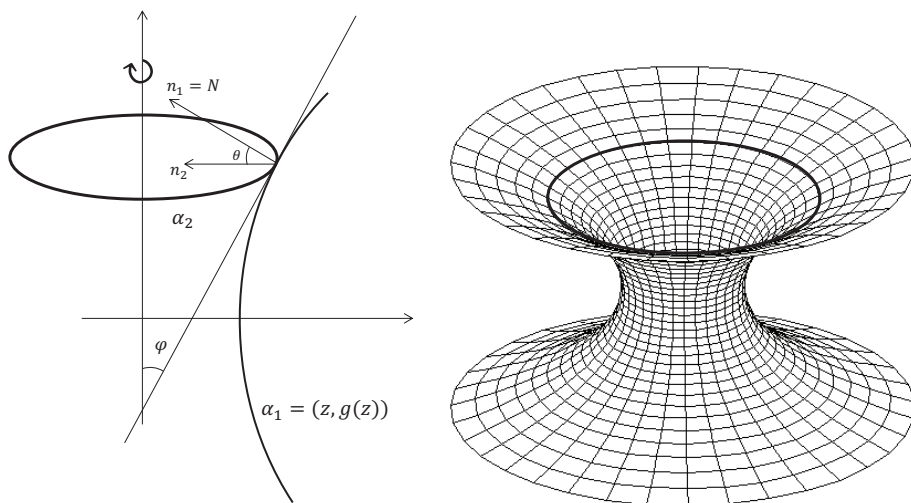


Figura 1.6: Catenoide, única superfície mínima de revolução fora os planos.

Exemplo 1.1.7 (A superfície de Enneper é mínima). *Seja a superfície de Enneper dada pela parametrização 1.6 do exemplo 1.1.3. Afirmamos que dita superfície é mínima.*

Tomando como base os resultados estabelecidos no exemplo 1.1.4 temos

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (1 + u^2 + v^2)^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (1 + u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

Como no caso do catenoide temos também para a superfície de Enneper uma parametrização conforme dado que $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$ e $F = 0$. Logo, a imersão é conforme e somente temos que calcular os coeficientes e , g , se estes resultarem opostos poderíamos concluir que a superfície é mínima.

Sabemos que o normal unitário é da forma

$$N = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

Daí,

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)}(-4u^2 - 4v^2 + 2(u^2 + v^2 - 1)) = -2 \\ g &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)}(4u^2 + 4v^2 - 2(u^2 + v^2 - 1)) = 2. \end{aligned}$$

Obtivemos que $e = -g$, portanto, podemos afirmar que a superfície de Enneper é uma superfície mínima conforme.

Exemplo 1.1.8 (A superfície de Scherk é mínima). *Sejam, $k, l \in \mathbb{Z}$ com $k + l$ par, e*

$$\Omega_{k,l} := \left\{ (x, y); |x - k\pi| < \frac{\pi}{2}, |y - l\pi| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

A parametrização dada por:

$$\begin{aligned} X : \bigcup_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ k+l \text{ par}}} \Omega_{k,l} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(x, y) &\longmapsto \left(x, y, \log \frac{\cos(y)}{\cos(x)} \right) \end{aligned} \tag{1.46}$$

é chamada superfície de Scherk ou superfície de Scherk duplamente periódica.

Afirmção: A superfície de Scherk é mínima.

Com efeito, segundo (1.46) a superfície de Scherk é não paramétrica com $f(x, y) = \log \frac{\cos(y)}{\cos(x)}$. Além disso, calculando as derivadas parciais de f

obtemos,

$$\begin{cases} f_x &= \tan(x) \\ f_y &= -\tan(y) \\ f_{xx} &= 1 + \tan^2(x) \\ f_{xy} &= 0 \\ f_{yy} &= -1 - \tan^2(y). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} &= \\ &= (1 + \tan^2(y)^2)(1 + \tan^2(x)) + (1 + \tan^2(x)^2)(-1 - \tan^2(y)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema 1.1.1 concluímos que a superfície de Scherk é mínima.

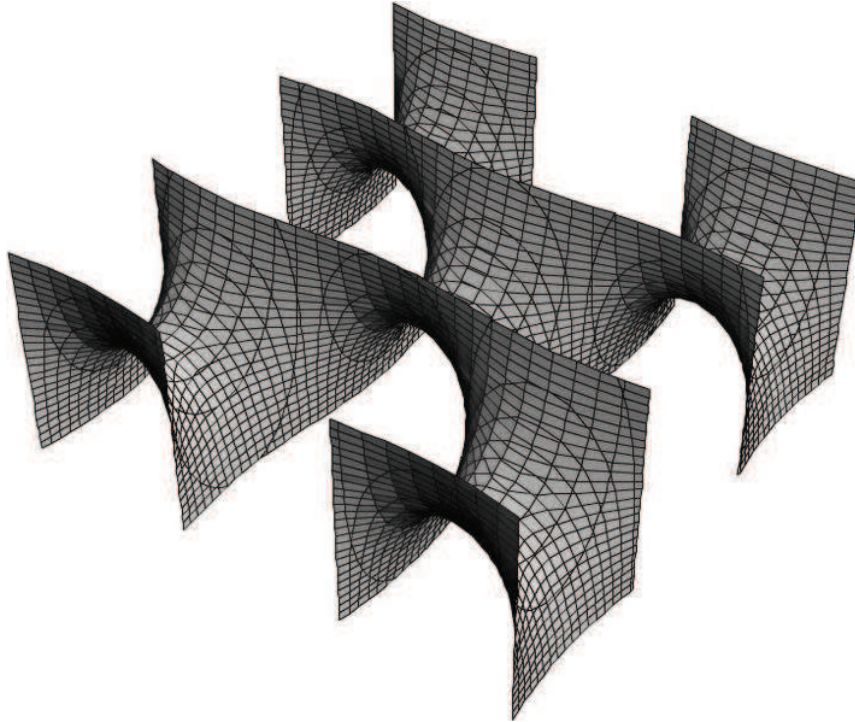


Figura 1.7: Superfície de Scherk.²

1.1.3

Outras caracterizações das hipersuperfícies com curvatura média constante.

Definimos agora os conceitos de hipersuperfície totalmente umbílica e totalmente geodésica que permitirão caraterizar às hipersuperfícies mesmo

²Esta figura foi tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/File:Superficie_di_scherk.jpg.

quando elas não forem mínimas.

Definição 1.1.19 (Hipersuperfície Totalmente Umbílica). *Seja S hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p \in S$. Seja $A(p)$ o operador de Weingarten associado à hipersuperfície no ponto p . Se $A(p)$ é um múltiplo da identidade dizemos que p é um ponto umbílico. Se todos os pontos de S são umbílicos S é dita hipersuperfície totalmente umbílica.*

Definição 1.1.20 (Hipersuperfície Totalmente Geodésica). *Seja S hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p \in S$. Sejam $k_1(p), \dots, k_n(p)$ curvaturas principais de S no ponto p . Se $k_i(p) = 0, \forall i, i = 1, \dots, n$ dizemos que p é um ponto plano. Se todas as curvaturas principais $k_i(p) = 0, \forall i, i = 1, \dots, n$ e $\forall p \in S$, S é dita totalmente geodésica.*

Exemplo 1.1.9. A esfera $\mathbb{S}^n$

Seja $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a n -esfera unitária. Para um ponto $p \in \mathbb{S}^n$ o normal unitário exterior é $N(p) = p$.

Seja o referencial $\{X_1, \dots, X_n\}$ numa vizinhança V de p . Consideremos curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco $\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ passando por p ($p = \alpha_i(0)$) com velocidade $\alpha'_i(0) = X_i, i = 1, \dots, n$. Então:

$$k_i(N) = \langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle = \langle -X_i, X_i \rangle = -|X_i|^2 = -1 \quad \forall i$$

assim,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(N) = \frac{1}{n} n(-1) = -1 \quad e \quad K = \prod_{i=1}^n k_i(N) = (-1)^n.$$

Podemos concluir que a esfera $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica, mas, não é mínima.

Exemplo 1.1.10. O cilindro $\mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{R}$.

Seja $M = \mathbb{S}^{n-1}(a) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o cilindro circular reto de raio a . Dado $p \in M$ o normal unitário exterior no ponto p é $N(p) = v$. Tomemos o referencial $\{X_1, \dots, X_n\}$ numa vizinhança V de p . Como $\dim(M) = n$ vamos ter nk_i curvaturas principais no ponto p segundo o normal N . Consideremos $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco passando por p com velocidade $\alpha'_i(0) = X_i$. Com isto, observemos que uma das curvas está representada pela reta geratriz do cilindro. Assim, a curvatura principal segundo esta curva se calcula como

$$k(N) = \langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle = 0 \quad \text{pois} \quad \bar{\nabla}_{X_i} N = 0.$$

As restantes curvaturas estão dadas pelas curvas do tipo $\alpha_i = [X_i, n_2] \cap \mathbb{S}^{n-1}$ com $i = 1, \dots, n-1$ e n_2 o vetor normal às mesmas. Ditas curvas representam paralelos do cilindro, logo $n_2 \parallel N$. Então, para $i = 1, \dots, n-1$:

$$k_i(N) = \langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle = \langle -\frac{1}{a} X_i, X_i \rangle = -\frac{1}{a} |X_i|^2 = -\frac{1}{a}.$$

Logo,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{1}{a} = -\frac{n-1}{na} \quad e \quad K = \prod_{i=1}^n k_i(N) = 0.$$

Portanto, podemos concluir que o cilindro tem curvatura média constante, mas, não é totalmente umbílica nem totalmente geodésica.

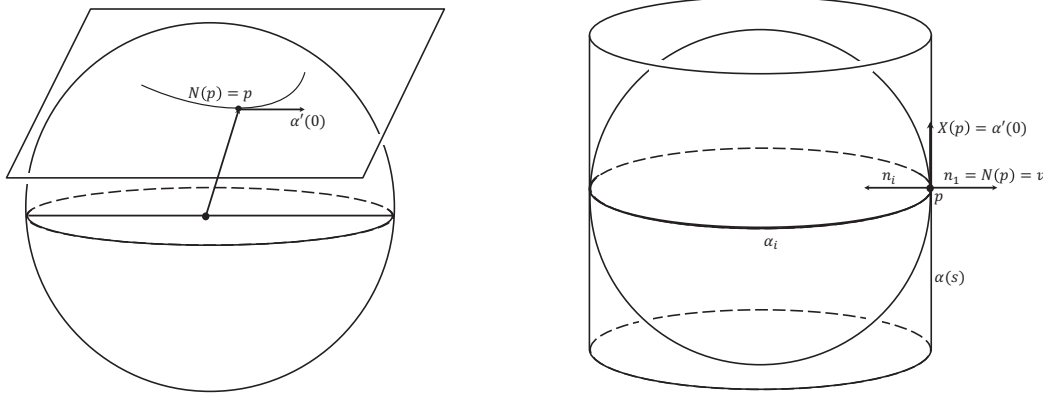


Figura 1.8: Análise geométrica para o cálculo das curvaturas de Gauss-Kronecker e média na esfera e no cilindro de dimensão n .

1.2

Hipersuperfícies mínimas e o Operador Laplaciano.

Anteriormente estudamos o conceito de hipersuperfície mínima segundo a nulidade da curvatura média. Agora veremos uma caracterização segundo o operador de Laplace Beltrami (veja apêndice) e do seguinte resultado.

Teorema 1.2.1. *Seja $X : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície S de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$ com vetor de curvatura média $\vec{H}$ então*

$$\Delta_S X = n\vec{H} \quad (1.47)$$

onde $\Delta_S X = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n)$.

Demonstração.

Dado $p \in S$ escolhamos uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathcal{X}_p(S)$ (temos mudado a notação usada até o momento para a base $\left\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$

para não correr o risco de confusão com as coordenadas do Laplaciano), então $\forall i, (i = 1, \dots, n)$ temos

$$e_i(X) = e_i \Rightarrow e_i e_i(X) = \bar{\nabla}_{e_i} e_i$$

com $\bar{\nabla}$ a conexão no ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$, logo,

$$\Delta_S X = \sum_{i=1}^n e_i e_i(X) - \bar{\nabla}_{e_i} e_i(X) = \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)^\perp = n \vec{H}. \quad \square$$

Do que se deduz o seguinte resultado.

Corolário 1.2.1. *Uma hipersuperfície S representada pela imersão isométrica $X : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é mínima se e somente se $\Delta_S X = 0$.*

De grande interesse é a análise dos resultados anteriores para uma superfície pois como mostramos no teorema 1.1.3 para uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ se garante a existência de coordenadas conformes. Então, para este caso pode-se mostrar que a superfície é mínima se e somente se as coordenadas de uma imersão conforme da mesma são funções harmônicas. De fato, o teorema 1.2.1 e seu corolário podem ser reformulados como apresentamos a seguir.

Sabemos que uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ é mínima se e somente se $\Delta_S X = 0$, esta condição pode-se expressar em forma equivalente em sus componentes coordenadas. Mais precisamente, seja o vetor coordenado $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ escrevemos ele na forma $u + iv \in \mathbb{C}$.

Tomemos X como uma parametrização conforme de S logo,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \Lambda^2 & 0 \\ 0 & \Lambda^2 \end{pmatrix}$$

por conseguinte $\det g^{ij} = \Lambda^4$ e $\sqrt{\det g^{ij} g^{ij}} = I$. Então, a forma geral do Laplaciano em coordenadas locais 5.28 se reduz a

$$\begin{aligned} \Delta_S X &= \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 X}{\partial u_i^2} \\ &= \frac{1}{\Lambda^2} \Delta_{\mathbb{C}} X \end{aligned} \quad (1.48)$$

com $u_1 = u, u_2 = v$. Assim, dado $X = (x_1, x_2, x_3)$

$$\Delta_S X = 0 \equiv \Delta_{\mathbb{C}} X = 0 \Leftrightarrow \Delta_{\mathbb{C}} x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.49)$$

A expressão equivalente $\Delta_{\mathbb{C}} x_i = 0$ significa que as coordenadas da parametrização são funções harmônicas.

Consequentemente para uma superfície se deduzem os seguintes resultados:

Teorema 1.2.2. *Seja $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão regular da superfície S com curvatura média H e orientação dada pela aplicação normal de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ então $\Delta_S X = 2HN$.*

Corolário 1.2.2. *Seja $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme então a superfície é mínima se e somente as coordenadas da imersão são funções harmônicas.*

Exemplo 1.2.1. *Como vimos no exemplo 1.1.8 a superfície de Scherk é uma superfície mínima não paramétrica. Vamos estudar agora uma outra forma de demonstrar esta afirmação segundo o corolário 1.2.2.*

Usando cálculo de variáveis complexas se pode comprovar que a aplicação

$$X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \left(\arg \frac{\xi + i}{\xi - i}, \arg \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| \right), \quad \xi \neq \pm 1, \xi \neq \pm i$$

com $\xi = u + iv$ e $\arg(\xi)$ o ângulo que forma o eixo real com ξ , é uma outra parametrização da superfície de Scherk equivalente a (1.46).

Definamos as funções complexas

$$\phi_1(\xi) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}; \quad \phi_2(\xi) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}; \quad \phi_3(\xi) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v}$$

com x, y, z as componentes de $X(\Omega)$. Então, tomando

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{2}{1 + \xi^2} \\ \phi_2 &= -\frac{2i}{1 - \xi^2} \\ \phi_3 &= \frac{4\xi}{1 - \xi^4} \end{aligned}$$

podemos comprovar, usando o fato da parametrização ser conforme, que:

$$X_{uu} + X_{vv} = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \quad (1.50)$$

Concluimos pelo corolário 1.2.2 que a superfície de Scherk é mínima pois suas coordenadas são funções harmônicas.