Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Dania González Morales

Estabilidade de Superfícies Mínimas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio .

Orientador: Prof. Ricardo Sá Earp

Rio de Janeiro
Agosto 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Dania González Morales

Estabilidade de Superfícies Mínimas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo Sá Earp
Orientador
Departamento de Matemática-PUC-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
Departamento de Matemática-PUC-Rio

Profa. Maria Fernanda Elbert
Instituto de Matemática-UFRJ

Profa. Barbara Nelli
Departamento de Matemática-Universita Degli Studi-L'Aquila

Prof. Eric Joseph Toubiana
Departamento de Matemática-Université de Paris VII

José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico-PUC-Rio

Rio de Janeiro, 07 de agosto de 2014

Dania González Morales

Graduou-se em Matemática na UCLV (Universidad Marta Abreu de las Villas. Cuba).

Ficha Catalográfica

González Morales, Dania

Estabilidade de Superfícies Mínimas / Dania González Morales; orientador: Ricardo Sá Earp. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2014.

v., 138 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação. 2. Estabilidade de hipersuperfícies mínimas. 3. Cálculo de variações. 4. Teoria espectral. 5. Índice. I. Sá Earp, Ricardo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A Deus α e Ω.
A:
Odeida Morales Carvajal,
Armando B. González Bonilla,
e Dunia González Morales.

Agradecimentos

À Deus por estar sempre presente e pelos anjos que colocou no meu caminho.
À minha família por ficar tão perto mesmo estando tão longe.
À minha amiga-irmã Yunelsy Nápoles Álvarez e sua família.
Ao querido professor e orientador Ricardo Sá Earp.
Aos amigos e família do portão vermelho em especial: María Inés Almeida, Cayo Dória, Ricardo Paleari, Rafael Lucas de Arruda, Leonardo Freitas, Leandro Cruz, Hudson Lima, Ambit Pany, Roberto Ribeiro e família.
Às comunidades da paroquia de Encrucijada e Viana por me ter sempre presente em suas orações.
Ao meu irmão maior o Padre Félix Ferre.
Aos meus amigos que estão longe em especial: Dr. Alexis Pineda, Tania María, Arasay Gómez Rodríguez, Yanivis Monteagudo e Adria Maria Menéndez Alonso.
Aos companheiros do antigo grupo de Gravitação e Cosmologia da Universidad Central Marta Abreu de las Villas.
Aos meus professores durante a graduação em especial: Lucía Argüelles e a Marisela Mainegra Hing.
Aos que me receberam em diferentes momentos: Gerandy Montes de Oca, esposa, Adán Corcho, Jairo Bochi e o Padre Paul Schweiter.
À comissão de ensino do IMPA em especial a Fátima Ferreira Ruso.
Aos membros da secretaria do departamento de Matemática da PUC-rio, em especial à querida Creuza.
Aos professores do Departamento da PUC-rio, em especial a aqueles que recebi formação.
Aos colegas e amigos do IMPA e da PUC.
Às famílias Cabrera, Peraza-Monteagudo, Sacramento, Nodarse, Menéndez-Alonso, Mescolin-Borges de Caravalho, e à Albuquerque-Barros.
À doutora Evelin.
À minha mãezinha Baiana Aída Assunção e Família.
À minha vovó da Amazônia, Julieta.
Às irmãs da companhia de Maria e às Dominicanas.
À todas as meninas que compartilham ou compartilharão comigo o pensionato.
À todos os que de uma forma ou outra terem contribuído com minha formação e minha estadia no Rio de Janeiro.
Aos membros da banca por terem aceitado o meu convite.
Ao CNPq, por ter possibilitado e financiado este projeto.

Resumo

González Morales, Dania; Sá Earp, Ricardo. **Estabilidade de Superfícies Mínimas**. Rio de Janeiro, 2014. 138p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como propósito o estudo da estabilidade de hipersuperfícies mínimas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$.
Apresentamos algumas caracterizações de hipersuperfícies mínimas deduzindo as fórmulas da primeira e segunda variação do funcional da área. Em seguida, a partir do cálculo de variações, estabelecemos a relação entre a teoria espectral e a estabilidade. Em particular, estudamos a caraterização variacional do primeiro autovalor do operador de estabilidade. Com base nesta relação mostramos alguns critérios de estabilidade para hipersuperfícies mínimas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Em especial, exibimos em detalhes o critério de estabilidade de Barbosa-Do Carmo para a estabilidade de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. Assim como o critério de Fischer-Colbrie-Shoen para superfícies mínimas completas, não compactas, usando a teoria elíptica.
Concluímos com a análise da estabilidade do catenoide em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^{n+1}$. Obtemos os domínios de estabilidade do catenoide em $\mathbb{R}^3$ a partir da teoria de Sturm Liouville. Exibimos o teorema de estabilidade de Lindelöf em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^{n+1}$ e a propriedade do catenoide ter índice 1.

Palavras–chave

Estabilidade de hipersuperfícies mínimas. Cálculo de variações. Teoria espectral. Índice.

Abstract

González Morales, Dania; Sá Earp, Ricardo(Advisor). **Stability of Minimal Surfaces**. Rio de Janeiro, 2014. 138p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims to study the stability of minimally immersed hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$.
We present some characterizations of minimal hypersurfaces deducting the formulas of the first and second variation of area. Afterwards, from the variational calculus, we establish the relationship between spectral theory and stability. Particulary, we study a variational characterization of the first eigenvalue associated to the stability operator. Based in this relationship we show some stability criteria for minimally immersed hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. In particular, we exhibit in details the Barbosa-Do Carmo criterion for the stability of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. We also establish the Fischer-Colbrie-Shoen criterion for complete, non compact, minimal surfaces using the elliptic theory.
We conclude with the analysis of the stability of the catenoid in $\mathbb{R}^3$ and in $\mathbb{R}^{n+1}$. This is done by studying the stability domains of the catenoid in $\mathbb{R}^3$ using the Sturm-Liouville theory. We explain the Lindelöf stability theorem in $\mathbb{R}^3$ and in $\mathbb{R}^{n+1}$ and the property of the catenoids have index 1.

Keywords

Minimal hypersurfaces stability. Variational calculus. Spectral theory. Index.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^{n+1}$	Espaço euclidiano $n-$dimensional $n \geq 2$, com $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.
df_p	Diferencial da função f no ponto p.
T_pS	Espaço tangente de S em p.
ds^2	Métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$, $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_{n+1}^2$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_S$	Produto escalar definido em S.
$\overline{\nabla}$	Conexão do ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$.
$\boldsymbol{C}^2$	Conjunto das funções com derivadas contínuas até a segunda ordem.
$\mathbb{S}^n$	Esfera de dimensão n.
$\mathcal{X}(S)$	Conjunto dos campos de vetores tangentes em S.
$\mathbb{C}$	Espaço complexo.
Δ_S	Laplaciano definido em S.
$g_{\mathbb{R}^{n+1}}$	Métrica do espaço ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$.
$\boldsymbol{C}^\infty$	Conjunto das aplicações suaves.
$\boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$	Conjunto das aplicações suaves com suporte compacto em Ω.
$div_\Omega(X)$	Divergência do campo vetorial X no conjunto Ω.
$\widehat{Ric}_N$	Tensor de curvatura de Ricci no vetor normal unitário N.

$L^2(\Omega)$	Espaço das funções que satisfazem que $\left(\int_\Omega \lvert u\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.
$W^{1,2}(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções em $L^2(\Omega)$.
$\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$	Fecho das funções $\boldsymbol{C}_c^1$ em $W^{1,2}$.
$\oplus$	Operação de soma direta.
$\mathbb{S}^2_+$	Semiesfera.
$B_r(x)$	Bola de centro em x e raio r.
$sup\,\phi$	Suporte da função ϕ.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

Galileu Galilei.