

5

Efeito de não-linearidades variante no tempo sobre a probabilidade de erro de sistemas OFDM

No capítulo anterior, foi desenvolvida uma técnica analítica para avaliar o efeito de não-linearidade com memória variante no tempo sobre o espectro de sistemas OFDM. Isto permitiu a análise do espalhamento espectral produzido por uma não-linearidade com memória variante no tempo num sistema OFDM. Neste capítulo é desenvolvida uma técnica para a avaliação dos efeitos de não-linearidades com memória variantes no tempo sobre o desempenho (em termos da probabilidade de erro de bit) de sistemas OFDM.

O desenvolvimento de técnicas analíticas para determinar a probabilidade de erro de sinais OFDM distorcidos por não-linearidades tem sido um tema de extensa pesquisa [18, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27]. No entanto, estas técnicas estão focadas em sinais distorcidos apenas por não-linearidades invariantes no tempo (como é o caso dos HPAs). Neste trabalho uma não-linearidade com memória e variante no tempo é considerada para modelar, por exemplo, o efeito conjunto de um HPA e de um canal de propagação multipercurso. Novamente, para dar conta da memória do dispositivo não-linear, foi utilizado um modelo baseado em Séries de Volterra variantes no tempo para modelar a não-linearidade encontrada nos sistemas OFDM.

A Seção 5.1 descreve o sistema OFDM considerado, principalmente a estrutura do receptor utilizado. A Seção 5.2 descreve a representação do sinal de saída considerando o modelo apresentado na Seção 3.2. Na seção 5.3 são apresentadas expressões para calcular a probabilidade de erro em presença de ruído aditivo Gaussiano branco para os casos específicos onde sistemas OFDM/BPSK e OFDM/QPSK são considerados. A caracterização de algumas variáveis envolvidas nestas expressões são apresentadas na Seção 5.4. Utilizando-se estas expressões, resultados numéricos para um caso particular, envolvendo uma não-linearidade de terceira ordem, são obtidos e apresentados na Seção 5.5. Finalmente, a Seção 5.6 apresenta um resumo do capítulo.

5.1

Receptor OFDM

As expressões analíticas e relações matemáticas, necessárias para o cálculo do desempenho de sistemas OFDM, são desenvolvidas considerando-se o modelo apresentado na Figura 5.1. O diagrama da figura corresponde ao processamento do k -ésimo símbolo OFDM. Nesta figura, $\tilde{s}_k(t)$ representa a envoltória complexa do sinal OFDM transmitido, $\tilde{y}_k(t)$ representa a envoltória complexa do sinal OFDM recebido, $\tilde{n}(t)$ representa o ruído térmico do receptor caracterizado como um processo aditivo complexo gaussiano branco (com densidade espectral de potência N_0), a não-linearidade com memória variante no tempo será representada por Séries de Volterra. $S_{k,n}$ é o símbolo modulado complexo transmitido no intervalo de tempo k e sub-portadora n , $R_{k,n}$ é o símbolo complexo recebido no intervalo de tempo k e sub-portadora n , $p_n(t)$ denota a função complexa do pulso formatador usado para transmitir a informação na sub-portadora n . O filtro integrador implementa a integral do sinal de entrada no intervalo $[T_{cp}, T]$, onde T é a duração do símbolo OFDM e T_{cp} é a duração do prefixo cíclico do sinal OFDM. O n -ésimo equalizador multiplica a saída do n -ésimo filtro integrador por um fator complexo $H_{k,n}$ para compensar parcialmente os efeitos da não-linearidade. Note que, nesta seção será considerado o modelo em tempo contínuo, envolvendo a implementação por meio de osciladores coerentes e não um modelo em tempo discreto, que envolve uma implementação baseada na Transformada Rápida de Fourier. Isto se justifica pelo fato das relações de entrada-saída da não-linearidade variante no tempo com memória (ver (3-9)) serem expressas em tempo contínuo e não em tempo discreto. Vale ressaltar entretanto, que ambos modelos são equivalentes.

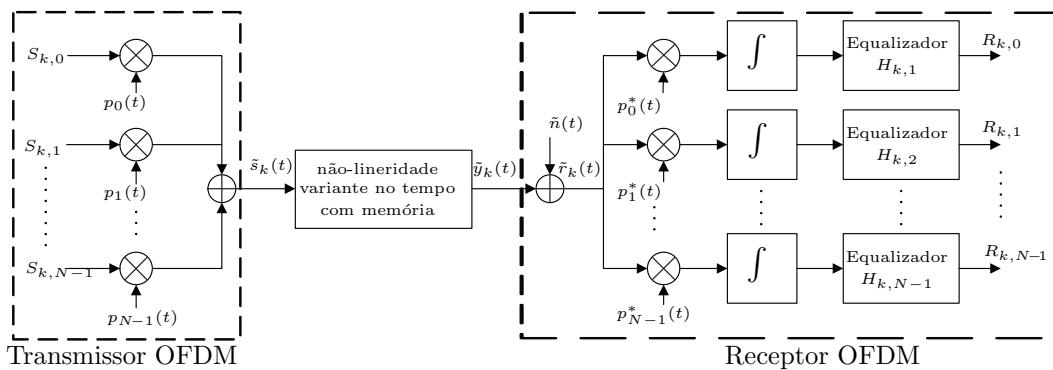


Figura 5.1: Modelo usado para analisar o impacto da não-linearidade no desempenho de sistemas OFDM móveis

Usualmente [23, 25], as análises de probabilidade de erro de sistemas OFDM em presença de não-linearidades sem memória encontradas na literatura foram realizadas considerando que o sinal OFDM distorcido pela não-linearidade é composto de uma réplica em escala do sinal OFDM e uma componente interferente descorrelatada aditiva. Assim a densidade espectral de potência do sinal OFDM distorcido corresponde a uma réplica em escala da densidade espectral de potência do sinal OFDM mais a densidade espectral de potência do componente interferente descorrelatado. A partir desta premissa, uma estimativa simples da razão sinal/distorção não-linear pode ser obtida e, uma estimativa da probabilidade de erro em presença de ruído aditivo gaussiano branco pode também ser facilmente obtida (ao se assumir que a distorção aditiva é Gaussiana). As análises de probabilidade de erro de sistemas OFDM móveis em presença de não-linearidades (variantes no tempo ou não) com memória não podem ser realizadas usando esse procedimento porque não é possível escrever o sinal OFDM distorcido como a soma de uma réplica em escala do sinal OFDM e um componente interferente descorrelatado. Neste caso, para determinar a probabilidade de erro de sinais OFDM distorcidos por não-linearidades com memória em presença de ruído aditivo Gaussiano branco inicialmente são identificadas as parcelas, correspondentes ao sinal desejado, interferência e ruído, do símbolo recebido em uma determinada sub-portadora. A probabilidade de erro é então calculada dado o valor da parcela de interferência. Finalmente, o teorema de probabilidade total (versão densidade de probabilidade) permite obter, a partir desta probabilidade de erro condicional, a probabilidade de erro numa determinada sub-portadora.

Para o caso onde canais variantes no tempo são considerados, a probabilidade de erro condicionada a um valor de interferência e ao conhecimento do canal tem que ser calculada, para depois, pelo teorema de probabilidade total (versão densidade de probabilidade) obter a probabilidade de erro numa determinada sub-portadora.

5.2

Representação do sinal de entrada ao receptor OFDM

Neste capítulo, a envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ do sinal OFDM de entrada ao canal não-linear variante no tempo é dada por (2-13) com $\theta = 0$, ou seja,

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_k(t - kT) \quad (5-1)$$

com $\tilde{s}_k(t)$ denotando a envoltória complexa do símbolo OFDM, dado por

$$\tilde{s}_k(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S_{k,n} p_n(t) \quad (5-2)$$

onde $S_{k,n}$ representa o símbolo complexo transmitido na sub-portadora n no k -ésimo intervalo de tempo, N é o número de sub-portadoras do sinal OFDM, T é a duração do símbolo OFDM e $p(\cdot)$ é a função que modela o pulso formatador. No caso particular de pulso formatador retangular, tem-se

$$p_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} e^{j \frac{2\pi n(t-T_{cp})}{T-T_{cp}}} & ; \quad t \in [0, T] \\ 0 & ; \quad t \notin [0, T] \end{cases} \quad (5-3)$$

onde T_{cp} é a duração do prefixo cíclico do sinal OFDM. O canal não-linear com memória variante no tempo será modelado como na Seção 3.2, assim o sinal de saída do canal não-linear com memória variante no tempo é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_1(t, \alpha_1) \tilde{s}_k(t - \alpha_1) d\alpha_1 \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) \\ &\cdot \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{s}_k(t - \alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{s}_k^*(t - \alpha_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_{2m+1} \end{aligned} \quad (5-4)$$

com

$$\tilde{k}_1(t, \alpha_1) = \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \tilde{u}(\alpha_1 - v) dv, \quad (5-5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) &= \gamma_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{u}(\alpha_r - v) \\ &\cdot \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{u}^*(\alpha_s - v) dv \quad \text{para } 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (5-6)$$

e $\tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) = 0$ para $m > M$. Note que, $\tilde{u}(t)$ representa a resposta ao impulso (equivalente passa-baixa) de um filtro linear invariante no tempo, $\tilde{h}(t, v)$ representa a resposta ao impulso (equivalente passa-baixa) de um filtro linear variante no tempo e γ_{2m+1} é uma constante que caracteriza a não-linearidade.

5.3

Probabilidade de erro de sistemas OFDM móveis

Nesta seção, é desenvolvida uma técnica analítica para determinar a probabilidade de erro de sistemas OFDM móveis distorcidos por não-linearidades variantes no tempo com memória em presença de ruído aditivo gaussiano branco.

A envoltória complexa $\tilde{r}_k(t)$ que caracteriza o sinal recebido corrompido pelo ruído térmico do receptor (ruído aditivo gaussiano branco) se escreve,

$$\tilde{r}_k(t) = \tilde{y}_k(t) + \tilde{n}(t) \quad (5-7)$$

com

$$\tilde{y}_k(t) = \sum_{m=0}^M \tilde{a}_{k,m}(t) \quad (5-8)$$

onde

$$\tilde{a}_{k,0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_1(t, \alpha_1) \tilde{s}_k(t - \alpha_1) d\alpha_1 \quad (5-9)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k,m}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) \\ &\cdot \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{s}_k(t - \alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{s}_k^*(t - \alpha_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_{2m+1} \end{aligned} \quad (5-10)$$

para $1 \leq m \leq M$. Como mostrado na Figura 5.1, o sinal $\tilde{r}_k(t)$ passa através de um banco de correladores paralelos (cada um deles sintonizado em cada uma das N sub-portadoras), e os valores resultantes são equalizados produzindo os símbolos complexos recebidos $R_{k,n}$, dada por

$$R_{k,n} = H_{k,n} \int_{T_{cp}}^T \left[\sum_{m=0}^M \tilde{a}_{k,m}(t) + \tilde{n}(t) \right] p_n^*(t) dt \quad (5-11)$$

ou

$$R_{k,n} = \sum_{m=0}^M H_{k,n} \int_{T_{cp}}^T \tilde{a}_{k,m}(t) p_n^*(t) dt + H_{k,n} \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(t) p_n^*(t) dt \quad (5-12)$$

O primeiro termo em (5-12) representa os produtos de intermodulação de ordem $2m + 1$ ($m = 1 \dots M$) e o segundo termo é uma função do ruído

aditivo Gaussiano branco. Note que o produto de intermodulação de primeira ordem ($m = 0$) corresponde a uma versão distorcida do símbolo complexo transmitido no intervalo de tempo k e na sub-portadora n . Considerando-se (5-9), (5-10), (5-12) e (5-2) é possível, após várias manipulações matemáticas (ver Apêndice D), obter uma expressão complexa que relaciona o símbolo complexo recebido no intervalo de tempo k e sub-portadora n com os símbolos complexos transmitidos em diferentes intervalos de tempo e diferentes sub-portadoras e uma função dos *kernels* que caracterizam a não-linearidade variante no tempo. Assim,

$$\begin{aligned} R_{k,n} = & H_{k,n} \sum_{n_1=0}^{N-1} S_{k,n_1} \frac{\tilde{K}_1(n_1)}{(T - T_{cp})^0} \\ & + H_{k,n} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{n_3=0}^{N-1} S_{k,n_1} S_{k,n_2} S_{k,n_3}^* \frac{\tilde{K}_3(n_1, n_2, n_3)}{(T - T_{cp})^1} \\ & + X_{k,n} \\ & + N_{k,n} \end{aligned} \quad (5-13)$$

onde o termo de somatório simples corresponde a uma versão distorcida do símbolo complexo transmitido, o termo de somatório triplo contém os diferentes produtos de intermodulação de terceira ordem ($m=1$), $X_{k,n}$ representa os produtos de intermodulação de ordem superior ($m \geq 2$) e

$$N_{k,n} = H_{k,n} \left[\int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(t) p_n^*(t) dt \right] \quad (5-14)$$

é uma variável aleatória complexa gaussiana com média zero e variância $|H_{k,n}|^2 N_0$ (ver Apêndice C). Portanto, a função densidade de probabilidade de $N_{k,n}$ se escreve

$$p_{N_{k,n}}(N) = \frac{1}{2\pi|H_{k,n}|^2 N_0} e^{-\frac{|N|^2}{2|H_{k,n}|^2 N_0}} \quad (5-15)$$

Ainda em (5-13), as funções $\tilde{K}_1(\cdot)$ e $\tilde{K}_3(\cdot)$ são dadas por

$$\tilde{K}_1(n_1) = f_n(n_1) \tilde{H}_1 \left(\frac{n_1}{T - T_{cp}} \right) \quad (5-16)$$

e

$$\tilde{K}_3(n_1, n_2, n_3) = f_n(n_1 + n_2 - n_3) \tilde{H}_3 \left(\frac{n_1}{T - T_{cp}}, \frac{n_2}{T - T_{cp}}, \frac{-n_3}{T - T_{cp}} \right) \quad (5-17)$$

respectivamente. Note que, em geral, para $1 \leq m \leq M$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{2m+1}(n_1, n_2, \dots, n_{2m+1}) &= \tilde{H}_{2m+1}\left(\frac{n_1}{T - T_{cp}}, \dots, \frac{n_{m+1}}{T - T_{cp}}, -\frac{n_{m+2}}{T - T_{cp}} \dots - \frac{n_{2m+1}}{T - T_{cp}}\right) \\ &\quad \cdot f_n(n_1 + \dots + n_{m+1} - n_{m+2} - \dots - n_{2m+1}). \end{aligned} \quad (5-18)$$

Em (5-16), (5-17) e (5-18),

$$f_n(\gamma) = \frac{1}{T - T_{cp}} \int_{T_{cp}}^T h_s\left(\lambda, \frac{\gamma}{T - T_{cp}}\right) e^{j \frac{2\pi(\lambda - T_{cp})}{T - T_{cp}} (\gamma - n)} d\lambda \quad (5-19)$$

com

$$h_s(t, \gamma) = \sum_{p=0}^{P-1} a_p \mu_p(t) e^{-j 2\pi v_p(\gamma)} \quad (5-20)$$

e as funções $\tilde{H}_1(\cdot)$, $\tilde{H}_3(\cdot)$ e $\tilde{H}_{2m+1}(\cdot)$ são dadas por

$$\tilde{H}_1(\beta_1) = \tilde{G}(\beta_1) \tilde{U}(\beta_1), \quad (5-21)$$

$$\tilde{H}_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \tilde{G}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \tilde{U}(\beta_1) \tilde{U}(\beta_2) \tilde{U}^*(-\beta_3) \quad (5-22)$$

e em geral, para $1 \leq m \leq M$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{2m+1}(\beta_1, \dots, \beta_{2m+1}) &= \tilde{G}(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{2m+1}) \cdot \\ &\quad \tilde{U}(\beta_1) \dots \tilde{U}(\beta_{m+1}) \tilde{U}^*(-\beta_{m+2}) \dots \tilde{U}^*(-\beta_{2m+1}) \end{aligned} \quad (5-23)$$

respectivamente. Em (5-21), (5-22) e (5-23), $\tilde{G}(\cdot)$ e $\tilde{U}(\cdot)$ denotam as transformadas de Fourier de $\tilde{g}(\cdot)$ e $\tilde{u}(\cdot)$ respectivamente.

A dedução matemática de (5-21), (5-22) e (5-23) pode ser encontrada no Apêndice B e a dedução de (5-19) e (5-20) no Apêndice D. Para compensar a atenuação e o deslocamento em fase no n -ésimo símbolo recebido, $R_{k,n}$, o fator multiplicativo do n -ésimo equalizador complexo, $H_{k,n}$, é definido como

$$H_{k,n} = \left[\tilde{H}_1 \left(\frac{n}{T - T_{cp}} \right) \right]^{-1} \quad (5-24)$$

com $\tilde{H}_1(\cdot)$ definido em (5-21).

Separando, em (5-13), os termos correspondentes a $n_1 = n_2 = \dots =$

$n_{2m+1} = n$, é possível reescrevê-lo como

$$R_{k,n} = F_n \cdot M_{k,n} + Z_{k,n} + N_{k,n} \quad (5-25)$$

onde F_n denota o fator do canal de propagação (complexo e aleatório), dado por

$$F_n = f_n(n) = \frac{1}{T - T_{cp}} \int_{T_{cp}}^T h_s\left(\lambda, \frac{n}{T - T_{cp}}\right) d\lambda, \quad (5-26)$$

$$\begin{aligned} M_{k,n} &= H_{k,n} S_{k,n} \frac{1}{(T - T_{cp})^0} \tilde{H}_1(n) \\ &+ H_{k,n} S_{k,n} S_{k,n} S_{k,n}^* \frac{1}{(T - T_{cp})^1} \tilde{H}_3(n, n, -n) \\ &+ X_{k,n}|_{n_1=n_2=\dots=n_{2m+1}=n} \end{aligned} \quad (5-27)$$

e

$$\begin{aligned} Z_{k,n} &= H_{k,n} \sum_{\substack{n_1=0 \\ n_1 \neq n}}^{N-1} S_{k,n_1} \frac{f_n(n_1) \tilde{H}_1(n_1)}{(T - T_{cp})^0} \\ &+ H_{k,n} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_3=0 \\ (n_1, n_2, n_3) \neq (n, n, n)}}^{N-1} S_{k,n_1} S_{k,n_2} S_{k,n_3}^* \frac{f_n(n_1+n_2-n_3) \tilde{H}_3(n_1, n_2, -n_3)}{(T - T_{cp})^1} \\ &+ X_{k,n}|_{(n_1, n_2, \dots, n_{2m+1}) \neq (n, n, \dots, n)} \end{aligned} \quad (5-28)$$

Note que, em (5-25), $M_{k,n}$ é o símbolo desejado distorcido, $Z_{k,n}$ é a interferência gerada pela não-linearidade variante no tempo e $N_{k,n}$, definido em (5-14), representa a parcela de ruído térmico.

Assumindo que o receptor OFDM tem perfeito conhecimento de F_n , a decisão pode ser feita com base na variável

$$D_{k,n} = \frac{R_{k,n}}{F_n} = M_{k,n} + \frac{Z_{k,n}}{F_n} + \frac{N_{k,n}}{F_n} \quad (5-29)$$

A decisão associada à n -ésima sub-portadora é então feita observando-se a posição da variável aleatória $D_{k,n}$ na constelação da modulação utilizada. O ponto da constelação mais próximo a $D_{k,n}$ é escolhido.

Observe finalmente, que a caracterização de $D_{k,n}$ é a base para o desenvolvimento de um método para determinar a probabilidade de erro de sinais OFDM distorcidas por não-linearidades com memória variantes no

tempo em presença de ruído aditivo gaussiano branco. O método utilizado neste trabalho é desenvolvido nas Seções 5.3.1 e 5.3.2 para sinais OFDM/BPSK e OFDM/QPSK respectivamente.

5.3.1

Sinais OFDM/BPSK

Nesta seção, apresentamos a metodologia para avaliar a probabilidade de erro de sinais OFDM/BPSK. Supõe-se que o símbolo complexo transmitido, $S_{k,n}$, toma valores no conjunto, $\{S^m; m = 1, 2\}$ com igual probabilidade. No caso de sinais OFDM/BPSK, $\{S^1 = A; S^2 = -A\}$.

A probabilidade de erro do sistema OFDM móvel, $P(e)$, é obtida tomando-se a média das probabilidades de erro em todas as sub-portadoras, ou seja,

$$P(e) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(e) \quad (5-30)$$

onde $P_n(e)$ representa a probabilidade de erro na n-ésima sub-portadora OFDM. Pelo teorema de probabilidade total, a probabilidade de erro na n-ésima sub-portadora OFDM é dada por

$$P_n(e) = \sum_{m=1}^2 P_n(e|S_{k,n} = S^m) P(S_{k,n} = S^m) \quad (5-31)$$

considerando que o símbolo complexo transmitido, $S_{k,n}$, toma os valores S^m com igual probabilidade, tem-se

$$P_n(e) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 P_n(e|S_{k,n} = S^m) \quad (5-32)$$

A probabilidade condicional que aparece em (5-32) é dada por

$$P_n(e|S_{k,n} = S^m) = P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m) \quad (5-33)$$

onde R_m denota a região no plano complexo para o qual o símbolo S^m é assumido ter sido transmitido. As regiões de decisão do BPSK são ilustradas na Figura 5.2. Note que são as regiões ótimas, que minimizam a probabilidade de erro do receptor ótimo, na modulação BPSK em presença de apenas ruído aditivo gaussiano branco e quando a probabilidade de transmitir qualquer símbolo BPSK é a mesma.

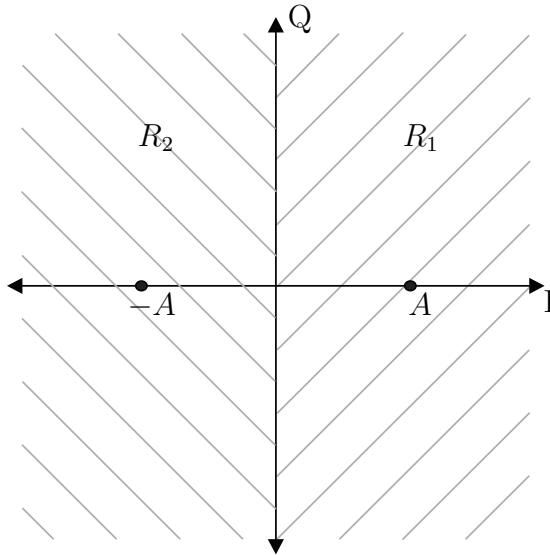


Figura 5.2: Regiões de decisão ótimas do BPSK em AWGN

Para calcular a probabilidade em (5-33), considerou-se inicialmente a expressão de $D_{k,n}$ apresentada em (5-29), ou seja,

$$D_{k,n} = \frac{R_{k,n}}{F_n} = M_{k,n} + \frac{Z_{k,n}}{F_n} + \frac{N_{k,n}}{F_n} \quad (5-34)$$

com F_n , $M_{k,n}$, $Z_{k,n}$ e $N_{k,n}$ definidas em (5-26), (5-27), (5-28) e (5-14) respectivamente. Note que a Probabilidade de erro em (5-33) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma) \\ &\quad p_{F_n, Z_{k,n}}(\phi, \gamma) d\phi d\gamma \end{aligned} \quad (5-35)$$

onde $P_n(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma)$ denota a probabilidade de erro da n -ésima sub-portadora, condicionada a certos valores do fator do canal de propagação F_n e da interferência $Z_{k,n}$. Ainda em (5-35), $p_{F_n, Z_{k,n}}(\phi, \gamma)$ denota a função de densidade de probabilidade conjunta de $Z_{k,n}$ e F_n .

A partir de (5-34) é possível verificar que a variável aleatória $D_{k,n}$, condicionada a $S_{k,n} = S^m$, $Z_{k,n} = \gamma$ e $F_n = \phi$, é uma variável aleatória complexa, gaussiana, com média $M_{k,n} + \gamma/\phi$ e variância dada por

$$\sigma_{D_{k,n}|S_{k,n}=S^m, F_n=\phi, Z_{k,n}=\gamma}^2 = \frac{|H_{k,n}|^2 N_0}{|\phi|^2} \quad (5-36)$$

Assim, a função densidade de probabilidade de $D_{k,n}$ dados $S_{k,n} = S^m$, $Z_{k,n} = \gamma$

e $F_n = \phi$, se escreve

$$p_{D_{k,n}|S_{k,n}=S^m, F_n=\phi, Z_{k,n}=\gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi \frac{|H_{k,n}|^2 N_0}{|\phi|^2}} e^{-\frac{|\alpha - \operatorname{Re}\{M_{k,n}\} - \operatorname{Re}\{\gamma/\phi\}|^2}{\frac{2|H_{k,n}|^2 N_0}{|\phi|^2}}} \quad (5-37)$$

Integrando-se (5-37) na região adequada (ver Figura 5.2), obtém-se

$$P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma) = Q\left((-1)^{m-1} \frac{\operatorname{Re}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Re}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / |\phi|^2}}\right) \quad (5-38)$$

onde $Q(\cdot)$ é a Função Q [63], definida por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \quad (5-39)$$

Note que, para determinar a probabilidade de erro de símbolo de um sistema OFDM/BPSK sujeito aos efeitos de um canal não-linear variante no tempo e ao ruído térmico do receptor faz-se necessária a obtenção de expressões para a função densidade de probabilidade conjunta de $Z_{k,n}$ e F_n . Esta função densidade de probabilidade conjunta é determinada na Seção 5.4

5.3.2 Sinais OFDM/QPSK

Nesta seção, apresentamos a metodologia para avaliar a probabilidade de erro de sinais OFDM/QPSK. Supõe-se que o símbolo complexo transmitido, $S_{k,n}$, toma valores no conjunto, $\{S^m; m = 1, 2, 3, 4\}$ com igual probabilidade. No caso de sinais OFDM/QPSK, $\{S^1 = Ae^{j\pi/4}; S^2 = Ae^{j3\pi/4}; S^3 = Ae^{j5\pi/4}; S^4 = Ae^{j7\pi/4}\}$.

A técnica descrita nesta seção segue a técnica apresentada na seção anterior. Especificamente, a probabilidade de erro do sistema OFDM móvel, $P(e)$, é novamente obtida tomando-se a média das probabilidades de erro em todas as sub-portadoras, ou seja,

$$P(e) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(e) \quad (5-40)$$

onde $P_n(e)$ representa a probabilidade de erro na n-ésima sub-portadora OFDM. Pelo teorema de probabilidade total e considerando que o símbolo

complexo transmitido, $S_{k,n}$, toma os valores S^m com igual probabilidade a probabilidade de erro na n-ésima sub-portadora OFDM é dada por

$$P_n(e) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 P_n(e|S_{k,n} = S^m) \quad (5-41)$$

finalmente, a probabilidade condicional que aparece em (5-41) é dada por

$$P_n(e|S_{k,n} = S^m) = P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m) \quad (5-42)$$

onde R_m denota a região no plano complexo para o qual o símbolo S^m é assumido ter sido transmitido. As regiões de decisão do QPSK são ilustradas na Figura 5.3. Note que são as regiões ótimas que minimizam a probabilidade de erro do receptor ótimo na modulação QPSK em presença de apenas ruído aditivo gaussiano branco quando a probabilidade de transmitir qualquer símbolo QPSK é a mesma.

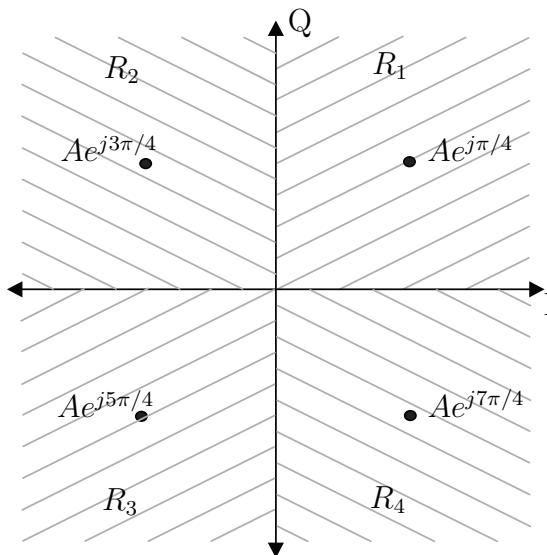


Figura 5.3: Regiões de decisão ótimas do QPSK em AWGN

Para calcular a probabilidade no lado direito de (5-42), repetimos os passos da seção anterior, ou seja, consideramos inicialmente a expressão de $D_{k,n}$

$$D_{k,n} = \frac{R_{k,n}}{F_n} = M_{k,n} + \frac{Z_{k,n}}{F_n} + \frac{N_{k,n}}{F_n} \quad (5-43)$$

com F_n , $M_{k,n}$, $Z_{k,n}$ e $N_{k,n}$ definidas em (5-26), (5-27), (5-28) e (5-14) respectivamente. Assim, a probabilidade no lado direito de (5-42), $P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m) =$

$S^m)$, se escreve

$$P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma) p_{F_n, Z_{k,n}}(\phi, \gamma) d\phi d\gamma \quad (5-44)$$

com $P_n(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma)$ sendo a probabilidade de erro da n -esima sub-portadora condicionada a certos valores do fator do canal de propagação F_n e da interferência $Z_{k,n}$. Ainda em (5-44), $p_{F_n, Z_{k,n}}(\phi, \gamma)$ denota a função de densidade de probabilidade conjunta de $Z_{k,n}$ e F_n .

Novamente, a partir de (5-43) é possível verificar que, a variável aleatória $D_{k,n}$ condicionada a $S_{k,n} = S^m$, $Z_{k,n} = \gamma$ e $F_n = \phi$, é uma variável aleatória complexa, gaussiana, com média $M_{k,n} + \gamma/\phi$ e variância dada por

$$\sigma_{D_{k,n}|S_{k,n}=S^m, F_n=\phi, Z_{k,n}=\gamma}^2 = \frac{|H_{k,n}|^2 N_0}{|\phi|^2} \quad (5-45)$$

Assim, a função densidade de probabilidade de $D_{k,n}$ dados $S_{k,n} = S^m$, $Z_{k,n} = \gamma$ e $F_n = \phi$, é dada por

$$p_{D_{k,n}|S_{k,n}=S^m, F_n=\phi, Z_{k,n}=\gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi \frac{|H_{k,n}|^2 N_0}{|\phi|^2}} e^{-\frac{|\alpha - \operatorname{Re}\{M_{k,n}\} - \operatorname{Re}\{\gamma/\phi\}|^2}{\frac{2|H_{k,n}|^2 N_0}{|\phi|^2}}} \quad (5-46)$$

Integrando-se (5-46) na região adequada (ver Figura 5.3) obtém-se

$$P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma) = Q\left(\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{4}\right) \frac{\operatorname{Re}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Re}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / 2|\phi|^2}}\right) \\ + Q\left(\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{4}\right) \frac{\operatorname{Im}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Im}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / 2|\phi|^2}}\right) \\ - Q\left(\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{4}\right) \frac{\operatorname{Re}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Re}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / 2|\phi|^2}}\right) \cdot Q\left(\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{4}\right) \frac{\operatorname{Im}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Im}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / 2|\phi|^2}}\right) \quad (5-47)$$

a expressão em (5-47) pode ser simplificada considerando-se que o valor da Função Q é geralmente muito menor do que 1, então a soma de duas Funções Q é muito maior que o produto das mesmas duas funções Q. Assim,

desconsiderando o termo do produto, (5-47) pode-se reescrever como

$$P(D_{k,n} \notin R_m | S_{k,n} = S^m, F_n = \phi, Z_{k,n} = \gamma) \approx Q \left(\cos \left(\frac{(2m+1)\pi}{4} \right) \frac{\operatorname{Re}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Re}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / 2|\phi|^2}} \right) \\ + Q \left(\sin \left(\frac{(2m+1)\pi}{4} \right) \frac{\operatorname{Im}\{M_{k,n}\} + \operatorname{Im}\{\gamma/\phi\}}{\sqrt{|H_{k,n}|^2 N_0 / 2|\phi|^2}} \right) \quad (5-48)$$

Note que, como na seção anterior, para determinar a probabilidade de erro do sinal OFDM/BPSK distorcido por não-linearidades com memória em presença de ruído aditivo gaussiano branco, é necessária a obtenção de expressões para a função densidade de probabilidade conjunta de $Z_{k,n}$ e F_n . Esta função densidade de probabilidade é determinada na seção a seguir.

5.4

Caracterização estatística conjunta de $Z_{k,n}$ e F_n

Como foi mostrado em (5-35) e (5-44), o cálculo da probabilidade de erro de símbolo de um sistema OFDM requer a caracterização estatística conjunta de $Z_{k,n}$ e F_n . Em primeiro lugar, observe que que

$$p_{F_n, Z_{k,n}}(\phi, \gamma) = p_{Z_{k,n} | F_n = \phi}(\gamma) p_{F_n}(\phi) \quad (5-49)$$

Considerando-se (5-19) e (5-20), e lembrando que $\mu_p(t)$ é um processo aleatório complexo gaussiano com média zero e com uma função autocorrelação conhecida ($R_{\mu_p(t)}(\tau)$), pode ser mostrado (ver Apêndice E), que as variáveis aleatórias $\{f_n(n_0), f_n(n_1), \dots, f_n(n_{N-1})\}$ são complexas e conjuntamente gaussianas com média zero e covariâncias dadas por

$$E[f_n(n_i) f_n^*(n_j)] = e^{-j\pi(n_j - n_i)} F(n - n_i, n_j - n) \\ \cdot \sum_{p=0}^{P-1} |a_p|^2 e^{j \frac{2\pi v_p}{\Delta} (n_j - n_i)} \quad (5-50)$$

onde $F(\cdot, \cdot)$ denota a transformada de Fourier bi-dimensional de

$$f(t_1, t_2) = R_{\mu_p}(t_1 \Delta, t_2 \Delta) \operatorname{rect}(t_1) \operatorname{rect}(t_2) \quad (5-51)$$

com $\Delta = T - T_{cp}$ e

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & ; |t| \leq 1/2 \\ 0 & ; |t| > 1/2 \end{cases} \quad (5-52)$$

Assim, F_n é uma variável aleatória complexa gaussiana de média zero e variância $\sum_{p=0}^{P-1} |a_p|^2 F(0, 0)$.

Para calcular a função densidade de probabilidade condicional $p_{Z_{k,n}|F_n=\phi}(\gamma)$, define-se \mathbf{s} como sendo um vetor aleatório contendo os símbolos modulados transmitidos nas N sub-portadoras no k -ésimo intervalo de tempo, ou seja,

$$\mathbf{s} = (S_{k,0} \ S_{k,1} \ \cdots \ S_{k,N-1})^T \quad (5-53)$$

Então, é possível escrever

$$p_{Z_{k,n}|F_n=\phi}(\gamma) = \int p_{Z_{k,n}|F_n=\phi, \mathbf{s}=\mathbf{s}}(\gamma) p_{\mathbf{s}}(\mathbf{S}) d\mathbf{S} \quad (5-54)$$

Considerando-se (5-28) e lembrando que as variáveis aleatórias $\{f_n(n_0), f_n(n_1), \dots, f_n(n_{N-1})\}$ são conjuntamente gaussianas, é possível mostrar que, dado que $F_n = \phi$ e $\mathbf{s} = (S_0 \ S_1 \ \dots \ S_{N-1})^T$, $Z_{k,n}$ é também uma variável aleatória complexa gaussiana. Para o caso particular onde apenas são considerados os produtos de intermodulação de até terceira ordem (ou seja $m = 0$ e $m = 1$), é possível também mostrar que, a média condicional de $Z_{k,n}$ é dada por

$$\begin{aligned} E[Z_{k,n}|F_n = \phi, \mathbf{s} = (S_0 \ S_1 \ \dots \ S_{N-1})^T] &= \\ \phi H_{k,n} \sum_{\substack{n_1=0 \\ (n_1, n_2, n_3) \neq (n, n, n)}}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_3=0 \\ n_1+n_2-n_3=n}}^{N-1} S_{n_1} S_{n_2} S_{n_3}^* \frac{\tilde{H}_3(n_1, n_2, -n_3)}{(T-T_{cp})^1} & \end{aligned} \quad (5-55)$$

e que a variância condicional de $Z_{k,n}$ se escreve

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z_{k,n}|F_n = \phi, \mathbf{s} = (S_0 \ S_1 \ \dots \ S_{N-1})^T] &= \\ \sum_{\substack{i=-(N-1) \\ i \neq n}}^{2(N-1)} \sum_{\substack{j=-(N-1) \\ j \neq n}}^{2(N-1)} V_i V_j^* E[f_n(n_i) f_n^*(n_j)] & \end{aligned} \quad (5-56)$$

onde $E[f_n(n_i)f_n^*(n_j)]$ é dado por (5-50) e

$$V_i = H_{k,n} c_i S_i \frac{\tilde{H}_1(i)}{(T - T_{cp})^0} + H_{k,n} \sum_{\substack{n_1=0 \\ (n_1, n_2, n_3) \neq (n, n, n)}}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_3=0 \\ n_1+n_2-n_3=i}}^{N-1} S_{n_1} S_{n_2} S_{n_3}^* \frac{\tilde{H}_3(n_1, n_2, -n_3)}{(T - T_{cp})^1} \quad (5-57)$$

com

$$c_i = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq i \leq N-1 \\ 0 & ; \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5-58)$$

5.5 Resultados numéricos

As expressões matemáticas derivadas nas seções anteriores são utilizadas para calcular a desempenho de sistemas OFDM móveis transmitidos através de um canal não-linear variante no tempo. Um caso particular com $N = 48$, $T = 4\mu s$ e $T_{CP} = 0.8\mu s$ é considerado para um sistema OFDM/BPSK. No caso do sistema OFDM/QPSK (com codificação de Gray) considerou-se $N = 48$, $T = 8\mu s$ e $T_{CP} = 1.6\mu s$. Assim, os dois sistemas considerados operam com a mesma taxa de transmissão de bits. Em ambos os casos, os símbolos das modulações BPSK e QPSK são considerados equiprováveis, assim como independentes para diferentes intervalos de tempo e sub-portadoras.

A taxa de erro de bit do sistema OFDM/BPSK é determinada utilizando-se (5-30), (5-33), (5-35) e (5-38) uma vez que, para modulações BPSK, a taxa de erro de bit é igual à probabilidade de erro de símbolo. No caso do OFDM/BPSK a taxa de erro de bit é determinada utilizando-se (5-40), (5-42), (5-44) e (5-48) e o fato de que, para modulações QPSK com codificação Gray, a taxa de erro de bit é igual à metade da probabilidade de erro de símbolo.

Para a não-linearidade sem memória correspondente a (3-10) foi considerado $L = 3$, ou seja,

$$w(t) = b_0 z^0(t) + b_1 z^1(t) + b_2 z^2(t) + b_3 z^3(t) \quad (5-59)$$

onde, $b_0 = 0$, $b_1 = 1,0$, $b_2 = 0$ e $b_3 = -0,25$ (esses valores foram os mesmos utilizados em [27] e permitem uma comparação de resultados). Para o canal multipercorso variante no tempo descrito foi considerado o modelo da Seção 3.2 com 4 taps ($P = 4$), no qual os processos $\mu_p(t)$ têm densidade espectral de

potência de Jake [57], ou seja,

$$S_{\mu_p}(f) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} \quad |f| < f_d \quad (5-60)$$

onde f_d é a frequência de *Doppler* (devido ao movimento do receptor). Neste caso, os processos $\mu_p(t)$ têm função autocorrelação dada por

$$R_{\mu_p}(\tau) = J_0(2\pi f_d \tau) \quad (5-61)$$

Considerou-se $a_0 = 1.00$, $a_1 = 0.63$, $a_2 = 0.10$, $a_3 = 0.01$, $\nu_0 = 0 \mu s$, $\nu_1 = 0,2 \mu s$, $\nu_2 = 0,4 \mu s$ e $\nu_3 = 0,6 \mu s$ (esses valores podem ser encontrados em [57, pp. 266]). Considerou-se ainda que o filtro $u(\cdot)$ de entrada da não-linearidade (ver Figura 3.5) e o filtro de recepção $g(\cdot)$ são ambos passa-faixa de butterworth de primeira ordem, com frequência central f_0 e banda de 3 dB igual a B_0 ($f_0 = 7.34375$ MHz, $B_0 = 15$ MHz). A resposta em frequência destes filtros é dada por

$$U(f) = G(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f_0}{B_0} \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \quad (5-62)$$

Simulações por computador foram usadas apenas para o cálculo de (5-54). As taxas de erro de bit foram obtidas para diferentes valores da razão E_b/N_0 no intervalo de 0 – 35 dB, onde E_b denota a energia média por bit recebida e N_0 denota a densidade espectral de potência do ruído aditivo gaussiano branco. Os resultados obtidos foram parametrizados para valores específicos do produto $f_d T/N$ (uma caracterização do canal multipercorso variante no tempo) e para valores específicos do Back-off utilizado. Assim os resultados podem ser vistos em função do *Back-Off* de saída (*OBO* - *Output Back-Off*) ou do *Back-Off* de entrada (*IBO* - *Input Back-Off*). Estes *Back-Offs* são definidos respectivamente por

$$OBO_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{OUT_{sat}}}{P_{OUT}} \right) \quad (5-63)$$

com $P_{OUT_{sat}}$ e P_{OUT} denotando a potência máxima e potência média na saída da não-linearidade, respectivamente. e

$$IBO_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{IN_{sat}}}{P_{IN}} \right) \quad (5-64)$$

com $P_{IN_{sat}}$ e P_{IN} denotando a potência máxima e potência média na entrada à não-linearidade, respectivamente.

Os relacionamentos entre os *Back-Offs* (de entrada e saída) e a energia do símbolo E_s (que é utilizada para os cálculos de probabilidade de erro de símbolo) é determinado no Apêndice A.

A taxa de erro de bit total, na borda e no centro são ilustradas nas figuras (5.4) e (5.5) para os sistemas OFDM/BPSK e OFDM/QPSK respectivamente, ambos com OBO = 4dB (IBO = 6.5dB). Nas duas figuras é possível observar que, para valores de E_b/N_0 baixos, quando a contribuição do ruído na taxa de erro domina em relação à contribuição da não-linearidade, a taxa de erro da sub-portadora na borda é maior que a taxa de erro da sub-portadora no centro, entretanto para valores de E_b/N_0 altos, quando a contribuição da não-linearidade na taxa de erro domina em relação à contribuição do ruído, a taxa de erro da sub-portadora no centro é maior que a taxa de erro da sub-portadora na borda.

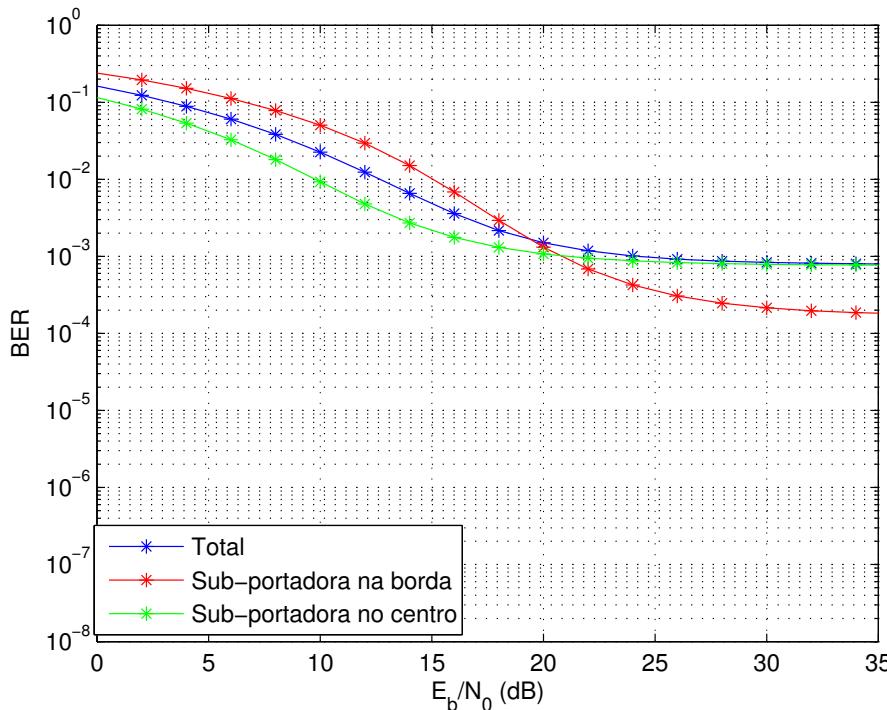


Figura 5.4: Taxa de erro de bit total, na borda e no centro de um sistema OFDM/BPSK com OBO = 4dB (IBO = 6.5dB) e $f_dT/N = 0.003$.

O efeito do canal multipercorso variante no tempo em sistemas OFDM/BPSK e OFDM/QPSK pode ser visualizado nas figuras (5.6) e (5.7) respectivamente, nestas figuras a taxa de erro de bit foi calculada para OBO = 4dB (IBO = 6.5dB) e para diferentes valores de f_dT/N . Para fins de comparação, estas figuras também mostram os resultados obtidos por Rodrigues [27] onde não é considerado um canal multipercorso variante no tempo.

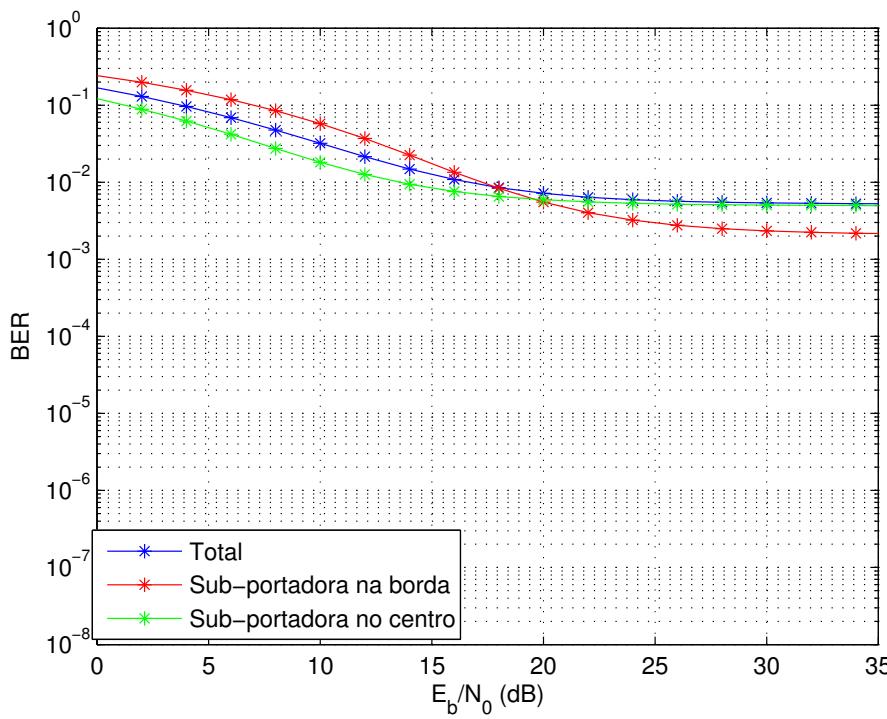


Figura 5.5: Taxa de erro de bit total, na borda e no centro de um sistema OFDM/QPSK com OBO = 4dB (IBO = 6.5dB) e $f_dT/N = 0.003$.

Essencialmente estes resultados confirmam que, quando ocorre uma diminuição da mobilidade, a taxa de erro de bit também diminui.

Para ilustrar o efeito da não-linearidade em sistemas OFDM/BPSK e OFDM/QPSK, a Figura (5.8) e (5.9) mostram a taxa de erro de bit para $f_dT/N = 0.003$ e para diferentes valores do OBO. Estes resultados confirmam que, quanto mais perto da região linear esta operando o dispositivo não-linear, a probabilidade de erro é menor.

5.6 Resumo

Este capítulo apresentou um desenvolvimento analítico que permite analisar o efeito de um canal constituído por uma não-linearidade com memória seguida por um canal de propagação multipercorso sobre a probabilidade de erro de sistemas OFDM móveis. O canal foi modelado por uma série de Volterra variante no tempo e a envoltória complexa do sinal OFDM por um processo estocástico gaussiano complexo e ciclo-estacionário. Foram obtidas expressões para o símbolo complexo recebido no decisor considerando um receptor específico. Expressões para calcular a probabilidade de erro de símbolo em presença de ruído aditivo gaussiano branco foram obtidas e foi feita a ca-

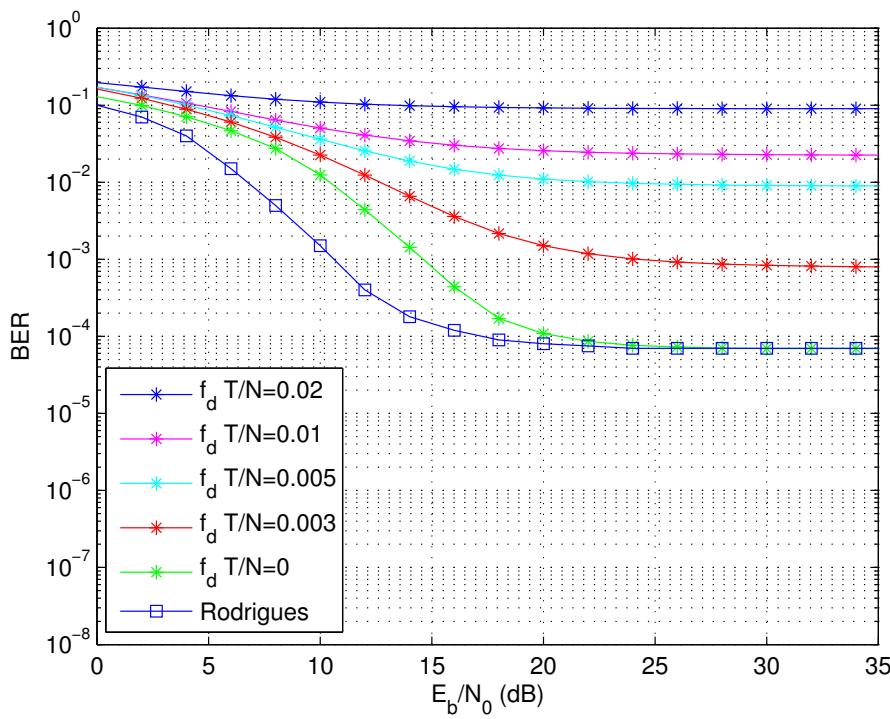


Figura 5.6: Taxa de erro de bit de um sistema OFDM/BPSK com OBO = 4dB (IBO = 6.5dB) e diferentes valores de $f_d T/N$.

racterização de todas as variáveis envolvidas nestas expressões. Os resultados analíticos foram aplicados para casos particulares de sistemas OFDM/BPSK e OFDM/QPSK, permitindo uma avaliação quantitativa da degradação de desempenho (em termos de taxa de erro de bit) dos sistemas OFDM provocado pela utilização de dispositivos não-lineares e canais variantes no tempo.

Os resultados obtidos neste capítulo foram apresentados no artigo: "Performance on Mobile OFDM Systems over Time-varying Non-linearities with Memory" aceito para publicação no *International Symposium on Wireless Communication Systems 2014*.

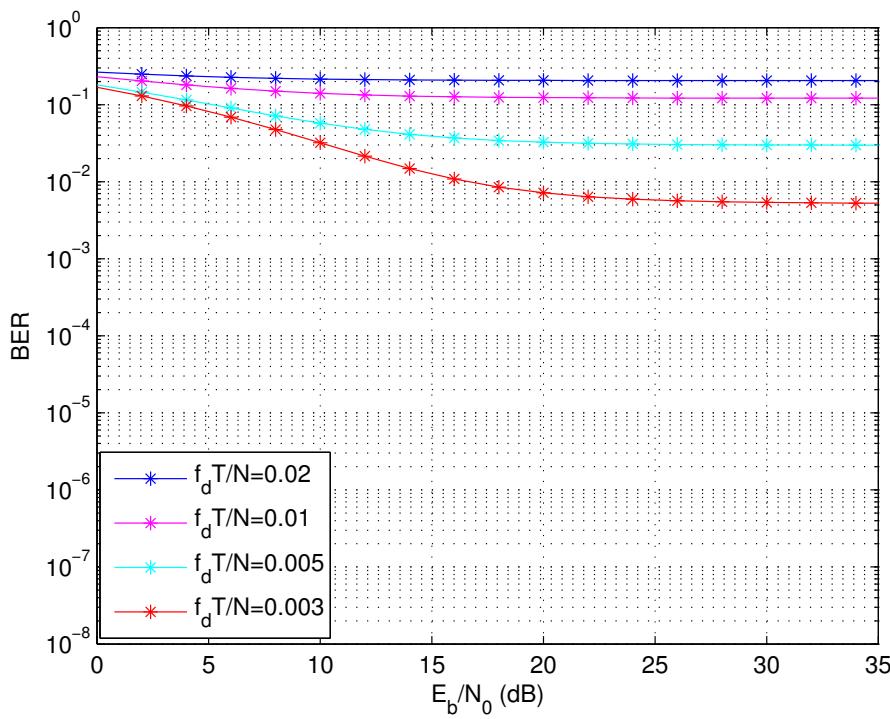


Figura 5.7: Taxa de erro de bit de um sistema OFDM/QPSK com OBO = 4dB e diferentes valores de $f_d T/N$.

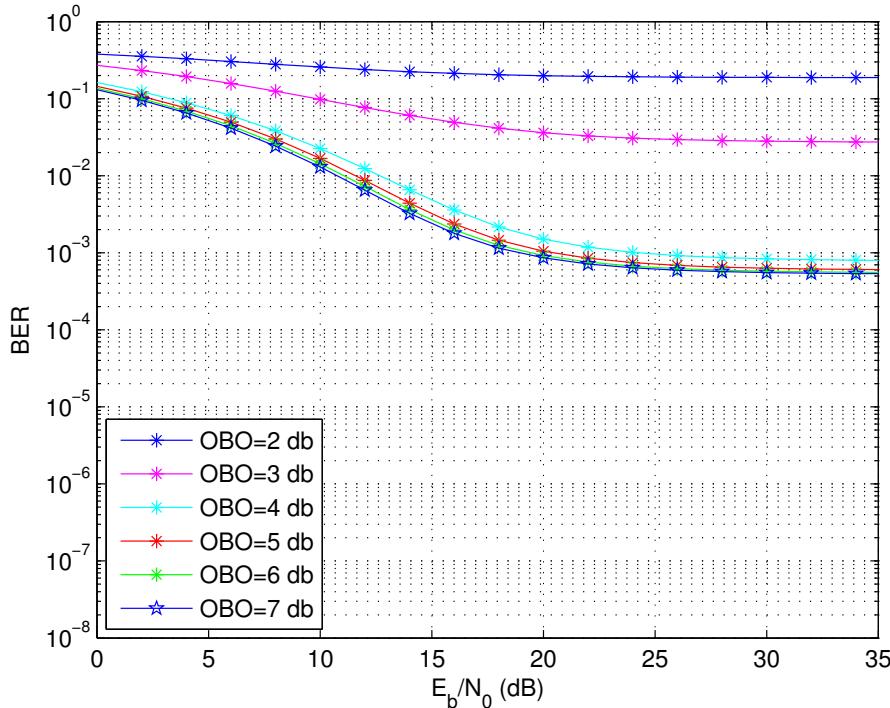


Figura 5.8: Taxa de erro de bit de um sistema OFDM/BPSK com $f_d T/N = 0.003$ e diferentes valores de OBO.

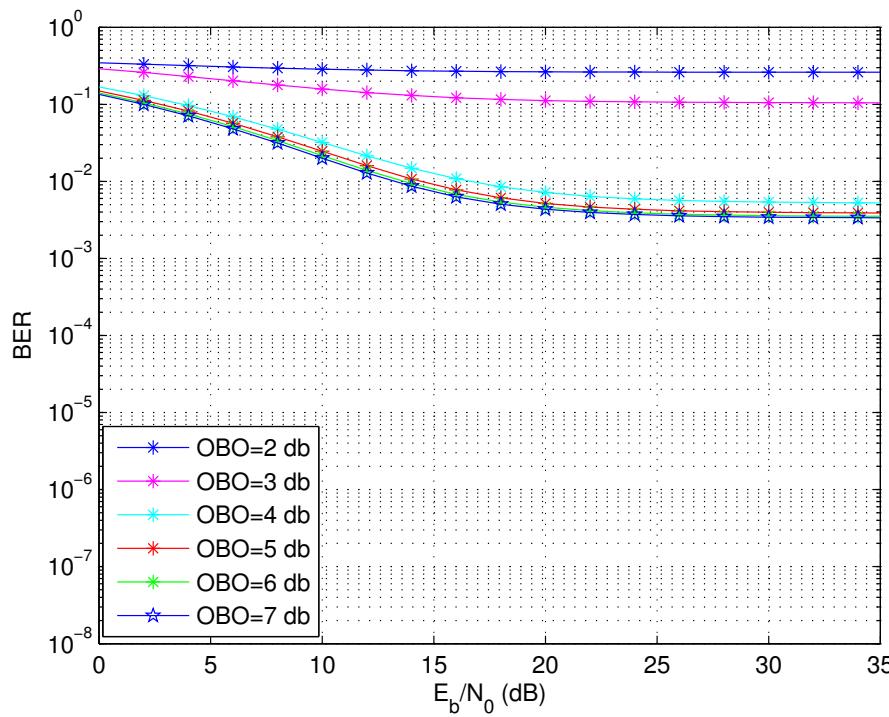


Figura 5.9: Taxa de erro de bit de um sistema OFDM/QPSK com $f_dT/N = 0.003$ e diferentes valores de OBO.