

### 3

## Caracterização de sistemas não-lineares com memória

Devido a sua natureza multiportadora, sistemas OFDM podem ter seu desempenho significativamente prejudicado pelos efeitos de não-linearidades. Além disso, o aumento da duração dos símbolos em relação a sistemas de portadora única, o torna mais sensível a canais variantes no tempo. O desenvolvimento de técnicas para avaliar o impacto de não-linearidades sem memória nos sinais OFDM tem sido um tema de extensa pesquisa [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Um fator importante ignorado até poucos anos atrás é o efeito de memória presente na maioria dos dispositivos não-lineares (e.g. SSPAs, TWTs, HPAs, etc). A memória, usualmente presente nos amplificadores de alta potência, tem efeitos adicionais sobre as distorções não-lineares de sinais OFDM. Existe atualmente na literatura um número reduzido de trabalhos que consideram os efeitos de não-linearidades com memória. Estes trabalhos incluem os resultados do Bohara [26] e do Rodrigues [27, 28, 29].

Com relação às degradações geradas por canais lineares variantes no tempo, existem na literatura atual diversos trabalhos [30]-[39]. Estes trabalhos abordam principalmente a caracterização, estimação e detecção de canais assim como análises de desempenho de diversos sistemas de comunicações.

Neste capítulo, o conhecimento prévio da modelagem de sistemas não-lineares com memória e de canais variantes no tempo é utilizado na proposição de um modelo matemático para sistemas não-lineares com memória variantes no tempo. Com este objetivo, são apresentados na Seção 3.1, os modelos usuais para sistemas não-lineares com memória invariantes no tempo. Na Seção 3.2 é proposto um modelo para avaliar os efeitos de não-linearidades com memória variantes no tempo. Este modelo inclui a caracterização matemática de um canal multipercurso variante no tempo.

### 3.1

#### Caracterização de sistemas não-lineares com memória invariantes no tempo

Devido à natureza dinâmica (e dependência da frequência) das distorções produzidas por canais não-lineares com memória em sinais multiportadora, os modelos convencionais que descrevem a conversão AM/AM e conversão AM/PM não são suficientes para caracterizar os modelos de não-linearidades com memória. Assim, modelos mais elaborados têm que ser empregados. É possível encontrar na literatura diversos modelos para a caracterização de não-linearidades com memória. Estes modelos são agrupados em duas classes: os modelos baseados em redes neurais e os modelos baseados em Série de Volterra.

Os modelos baseados em redes neurais são utilizados principalmente na identificação de sistemas não-lineares [42, 43], assim como no estudo de pré-distorções para mitigar os efeitos das não-linearidades [44, 45].

Neste trabalho, o modelo utilizado para caracterizar o canal não-linear com memória é o modelo baseado na versão contínua da Série de Volterra. De acordo com a teoria de Séries de Volterra, a envoltória complexa  $\tilde{y}(t)$  do sinal de saída de um sistema contínuo não-linear invariante no tempo com memória pode ser escrito em termos da envoltória complexa  $\tilde{s}(t)$  do sinal de entrada, como

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_1(\alpha_1) \tilde{s}(t - \alpha_1) d\alpha_1 \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{2m+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) \\ & \cdot \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{s}(t - \alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{s}^*(t - \alpha_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_{2m+1} \end{aligned} \quad (3-1)$$

onde  $\tilde{k}_{2m+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1})$  representam os *kernels* da Série de Volterra que caracteriza a não-linearidade, em banda básica. Na literatura, diversos modelos baseados em expressões reduzidas das Séries de Volterra são utilizados para caracterizar sistemas não-lineares com memória. Eles incluem: o modelo polinomial com memória [46], o modelo polinomial com memória generalizado [47] e o modelo *Envelope Memory Polynomial* [48]. Os principais modelos que utilizam as Séries de Volterra para caracterizar sistemas não-lineares com memória são apresentados a seguir.

### 3.1.1 Modelo de Wiener

O modelo de *Wiener* (ver Figura 3.1) consiste em um filtro linear com resposta ao impulso  $\tilde{u}(t)$  seguido por uma não-linearidade polinomial sem memória. Neste caso, é possível mostrar que os *kernels* da Série de Volterra são dados por

$$\tilde{k}_1(\alpha_1) = \gamma_1 \tilde{u}(\alpha_1) \quad (3-2)$$

e

$$\tilde{k}_{2m+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) = \gamma_{2m+1} \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{u}(\alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{u}^*(\alpha_s) \quad (3-3)$$

para  $m \geq 1$ . Note que, em (3-2) e (3-3) os  $\gamma_{2m+1}$  representam as constantes que parametrizam a não-linearidade sem memória. Assim, a saída do modelo

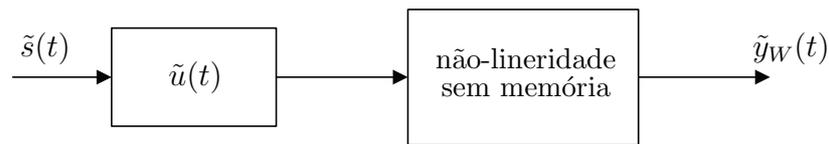


Figura 3.1: Modelo de Wiener para não-linearidades com memória

de *Wiener* é dada por

$$\tilde{y}_W(t) = \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha_1) \tilde{s}(t - \alpha_1) d\alpha_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m+1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha) \tilde{s}(t - \alpha) d\alpha \right)^{m+1} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^*(\beta) \tilde{s}^*(t - \beta) d\beta \right)^m \quad (3-4)$$

O modelo de *Wiener* foi estudado para pré-distorção de amplificadores TWT (do inglês *Traveling-Wave Tube*) [49, 50], bem como um meio mas geral para a identificação de sistemas não-lineares [51, 52]. Este modelo é um dos mais simples usados para combinar efeitos de memória com não-linearidades, porém sua eficácia na modelagem da maioria dos amplificadores de potência é muito limitada. Além disso, o modelo de Wiener tem uma característica indesejável na medida em que o sinal de saída (3-4) depende de forma não-linear da resposta ao impulso  $\tilde{u}(\alpha)$ , tornando a sua estimativa mais problemática.

### 3.1.2

#### Modelo de Hammerstein

Um outro modelo de não-linearidade com memória é o modelo de Hammerstein (ver Figura 3.2), o qual é formado por uma não-linearidade polinomial sem memória seguido por um filtro linear com resposta ao impulso  $\tilde{h}(t)$ . Assim, para o modelo de Hammerstein tem-se

$$\tilde{y}_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{2m+1} \tilde{s}^{m+1}(t - \alpha) \tilde{s}^{*m}(t - \alpha) d\alpha \quad (3-5)$$

onde  $\gamma_{2m+1}$  representa as constantes que parametrizam a não-linearidade sem memória. Este modelo foi estudado principalmente para a identificação de

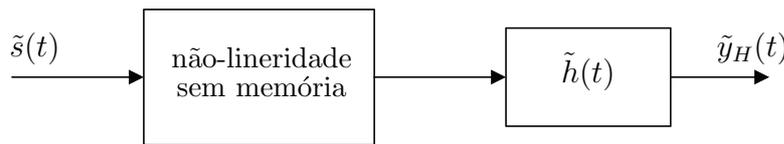


Figura 3.2: Modelo de Hammerstein para não-linearidades com memória

sistemas não-lineares com memória [52]. Note que (ver 3-5), este modelo tem a característica de depender de forma linear da resposta ao impulso  $\tilde{h}(\alpha)$  e das constantes  $\gamma_{2m+1}$ .

### 3.1.3

#### Modelo de Wiener-Hammerstein

As estruturas dos modelos de Wiener e Hammerstein podem se combinar de modo a formar uma estrutura como à da Figura 3.3, ou seja um filtro linear com resposta ao impulso  $\tilde{u}(t)$  seguido de uma não-linearidade polinomial sem memória e outro filtro linear com resposta ao impulso  $\tilde{h}(t)$ . Neste caso, é possível mostrar que os *kernels* da Série de Volterra são dados por

$$\tilde{k}_1(\alpha_1) = \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(v) \tilde{u}(\alpha_1 - v) dv \quad (3-6)$$

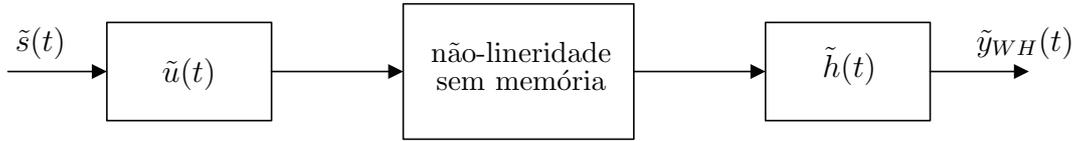


Figura 3.3: Modelo de Wiener-Hammerstein para não-linearidades com memória

e

$$\tilde{k}_{2m+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) = \gamma_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(v) \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{u}(\alpha_r - v) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{u}^*(\alpha_s - v) dv \quad (3-7)$$

para  $m \geq 1$ . Note que, em (3-6) e (3-7),  $\gamma_{2m+1}$  representa as constantes que parametrizam a não-linearidade sem memória. Assim, a saída do modelo de Wiener-Hammerstein é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{WH}(t) = & \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(v) \tilde{u}(\alpha_1 - v) \tilde{s}(t - \alpha_1) d\alpha_1 dv \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(v) \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{u}(\alpha_r - v) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{u}^*(\alpha_s - v) \\ & \cdot \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{s}(t - \alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{s}^*(t - \alpha_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_{2m+1} dv \quad (3-8) \end{aligned}$$

O Modelo de Wiener-Hammerstein, embora mais geral do que o modelo de Wiener ou do que o modelo de Hammerstein ainda depende não-linearmente da resposta ao impulso  $\tilde{u}(t)$  do primeiro filtro linear. Contudo, este modelo tem sido largamente utilizado como uma ferramenta de análise geral [53].

### 3.1.4 Modelo de Wiener Paralelo

O modelo de Wiener paralelo é formado pela combinação das saídas de muitos modelos de Wiener (ver Figura 3.4) e tem sido principalmente utilizado para a identificação de sistemas não-lineares com memória. O modelo de Wiener paralelo pode-se encaixar no modelo geral de Volterra (3-1) sim-

plesmente calculando os *kernels* de cada ramificação.

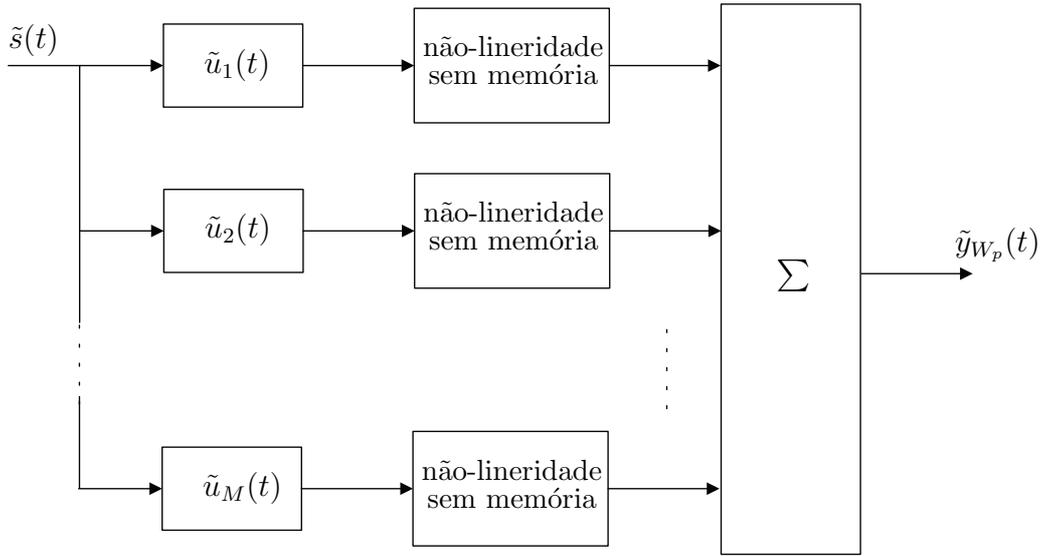


Figura 3.4: Modelo de Wiener paralelo para não-linearidades com memória

### 3.2

#### Caracterização de sistemas não-lineares com memória variantes no tempo

A teoria de Séries de Volterra pode ser generalizada para incluir a modelagem de sistemas não-lineares variantes no tempo e com memória [54, 55]. Assim, para este tipo de sistemas, o relacionamento entre a envoltória complexa  $\tilde{s}(t)$  do sinal de entrada e a envoltória complexa  $\tilde{y}(t)$  do sinal de saída é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_1(t, \alpha_1) \tilde{s}(t - \alpha_1) d\alpha_1 \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) \\ & \cdot \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{s}(t - \alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{s}^*(t - \alpha_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_{2m+1} \end{aligned} \quad (3-9)$$

onde  $\tilde{s}(t)$  é a envoltória complexa do sinal de entrada (que no caso de sinais OFDM é dada por (2-35) ou (2-13)) e  $\tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1})$  representam os *kernels* variantes no tempo da Série de Volterra que caracteriza a não-linearidade, em banda básica.

### 3.2.1

#### Determinação dos kernels da não-linearidade variante no tempo

O modelo de não-linearidade com memória, variante no tempo, a ser descrita por uma Série de Volterra é ilustrado na Figura 3.5. Nesta figura,  $\tilde{u}(t)$  representa a resposta ao impulso (equivalente passa-baixa) de um filtro linear invariante no tempo e  $\tilde{h}(t, v)$  representa a resposta ao impulso (equivalente passa-baixa) de um filtro linear variante no tempo.

Neste modelo, considera-se que a não-linearidade sem memória é do tipo

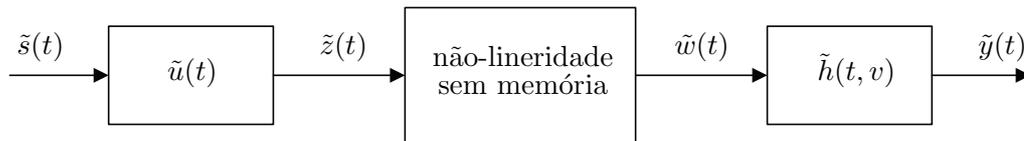


Figura 3.5: Modelo de não-linearidade com memória variante no tempo

polinomial, ou seja

$$w(t) = \sum_{\ell=0}^L b_{\ell} z^{\ell}(t) \quad (3-10)$$

É possível mostrar [56] que na faixa de frequências da envoltória complexa do sinal  $z(t)$  a envoltória complexa de  $w(t)$  se escreve

$$\tilde{w}(t) = \sum_{m=0}^M \gamma_{2m+1} \tilde{z}^{m+1}(t) \tilde{z}^{*m}(t) \quad (3-11)$$

onde

$$\gamma_{2m+1} = \frac{b_{2m+1}}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} \quad (3-12)$$

e  $M = \lfloor (L-1)/2 \rfloor$ , ou seja,  $M$  é o maior inteiro menor ou igual a  $(L-1)/2$ . Esta não-linearidade poderia representar, por exemplo, um amplificador de alta potência operando na sua região não-linear.

Note, da Figura 3.5, que

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \tilde{w}(t-v) dv \quad (3-13)$$

e

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha) \tilde{s}(t-\alpha) d\alpha \quad (3-14)$$

Observe ainda que, em (3-13),  $\tilde{h}(t, v)$  representa o equivalente passa-baixa da resposta do sistema linear, no instante  $t$ , a um impulso colocado em sua entrada no instante  $t - v$ . Substituindo-se (3-14) em (3-11) e (3-11) em (3-13) obtém-se, após alguns manipulações algébricas,

$$\tilde{y}(t) = \sum_{m=0}^M \tilde{a}_m(t) \quad (3-15)$$

onde

$$\tilde{a}_0(t) = \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \tilde{u}(\alpha_1 - v) \tilde{s}(t - \alpha_1) d\alpha_1 dv \quad (3-16)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m(t) = & \gamma_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{u}(\alpha_r - v) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{u}^*(\alpha_s - v) \\ & \cdot \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{s}(t - \alpha_r) \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{s}^*(t - \alpha_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_{2m+1} dv \end{aligned} \quad (3-17)$$

para  $1 \leq m \leq M$ . As expressões dos *kernels* de Volterra, correspondentes ao diagrama da Figura 3.5 e a uma não-linearidade sem memória dada por (3-11), podem ser obtidos comparando-se (3-15), (3-16) e (3-17) com (3-9). Obtém-se assim,

$$\tilde{k}_1(t, \alpha_1) = \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \tilde{u}(\alpha_1 - v) dv, \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) = & \gamma_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(t, v) \prod_{r=1}^{m+1} \tilde{u}(\alpha_r - v) \\ & \cdot \prod_{s=m+2}^{2m+1} \tilde{u}^*(\alpha_s - v) dv \quad \text{para } 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (3-19)$$

e  $\tilde{k}_{2m+1}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) = 0$  para  $m > M$ .

### 3.2.2

#### Caracterização do canal variante no tempo

Neste trabalho, o sistema linear variante no tempo que aparece na Figura 3.5 modela um canal de propagação multipercurso, variante no tempo, seguido

de um filtro de recepção. Considerou-se [57]

$$\tilde{h}(t, v) = \sum_{p=0}^{P-1} a_p \mu_p(t) \tilde{g}(v - \nu_p) \quad (3-20)$$

onde  $P$  é o número de percursos de propagação,  $a_p$  e  $\nu_p$  representam os coeficientes de atenuação e retardo, respectivamente,  $\mu_p(t)$  é um processo aleatório complexo gaussiano de média nula com função autocorrelação conhecida e  $\tilde{g}(\cdot)$  representa a resposta ao impulso do filtro de recepção (equivalente passa-baixa). Este canal tem sido utilizado em diversos estudos envolvendo sistemas de comunicações móveis [58, 32, 59, 60].

A função autocorrelação deste canal é dada por

$$\begin{aligned} R_{\tilde{h}}(t_1, t_2, v_1, v_2) &= E[\tilde{h}(t_1, v_1) \tilde{h}^*(t_2, v_2)] \\ &= \sum_{p_1=0}^{P-1} \sum_{p_2=0}^{P-1} a_{p_1} a_{p_2}^* E[\mu_{p_1}(t_1) \mu_{p_2}^*(t_2)] \\ &\quad \cdot \tilde{g}(v_1 - \nu_{p_1}) \tilde{g}^*(v_2 - \nu_{p_2}) \end{aligned} \quad (3-21)$$

No caso particular em que os processos complexos  $\mu_{p_1}(\cdot)$  e  $\mu_{p_2}(\cdot)$  são conjuntamente estacionários no sentido amplo (ESA) e descorrelatados para  $p_1 \neq p_2$  tem-se [57]

$$R_{\tilde{h}}(\tau, v_1, v_2) = \sum_{p=0}^{P-1} |a_p|^2 R_{\mu_p}(\tau) \tilde{g}(v_1 - \nu_p) \tilde{g}^*(v_2 - \nu_p) \quad (3-22)$$

onde

$$R_{\mu_p}(\tau) = E[\mu_p(t) \mu_p^*(t + \tau)] \quad (3-23)$$