

2

Visão geral OFDM

2.1

Princípios do OFDM

Num sistema convencional de transmissão, os símbolos são transmitidos serialmente através de uma única portadora, cujo espectro ocupa toda a faixa de frequências disponível. O OFDM consiste na transmissão paralela de dados em diversas sub-portadoras (que podem ter a mesma modulação ou diferentes tipos de modulação). Assim, as taxas de transmissão por sub-portadora são tanto mais baixas quanto maior o número de portadoras utilizadas. De modo a garantir uma ortogonalidade entre as sub-portadoras, o espaçamento entre elas têm que ser cuidadosamente selecionado. Desse modo, embora exista uma superposição espectral de sub-portadoras, a informação contida em cada uma delas poderá ser isolada das demais através de um correlator (ou filtro casado) adequado. Para tal, é necessário que se garanta um certo nível de ortogonalidade entre as sub-portadoras no sinal recebido. Vale observar que a degradação desta ortogonalidade produz as chamadas interferências entre portadoras (*Inter-Carrier Interference* - ICI)

Em sua concepção original, a geração e recepção de símbolos OFDM requerem conjuntos de osciladores, resultando numa implementação cara e complexa, particularmente para um número elevado de sub-portadoras. Entretanto, conforme mostrado em [7], esses processos (geração e recepção) podem ser feitos de forma mais simples utilizando-se a Transformada Rápida de Fourier inversa para a geração e a Transformada Rápida de Fourier para a recepção, conduzindo a uma implementação alternativa para sistemas OFDM.

Nesta seção alguns aspectos de sistemas OFDM são introduzidos. Eles incluem os dois tipos de implementação mencionados: Implementação baseado em osciladores e implementação baseada em Transformada Rápida de Fourier. Além disso, são apresentados aspectos relativos a o intervalo de guarda, prefixo cíclico e pulsos formatadores, que constituem características do sistema OFDM que visam reduzir as interferências entre portadoras (ICI).

2.1.1

Implementação baseado em osciladores

As estruturas do transmissor e do receptor OFDM baseados em osciladores são apresentadas na Figura 2.1. No transmissor, o símbolo OFDM é formado pela combinação dos sinais modulados nas N sub-portadoras do sistema. Assim, o símbolo OFDM é composto pelos N símbolos complexos correspondentes à modulação de cada uma das sub-portadoras.

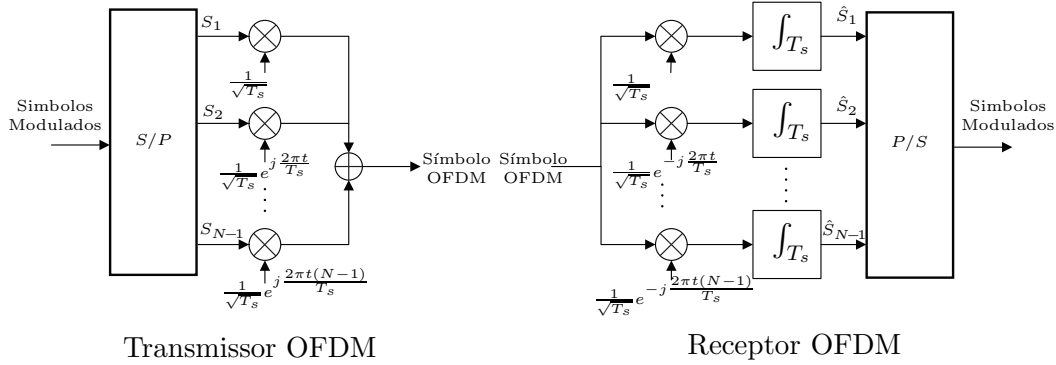


Figura 2.1: Estrutura do sistema OFDM baseado em osciladores

A envoltória complexa do símbolo OFDM é então dado por

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{j \left[\frac{2\pi n t}{T_s} \right]} \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (2-1)$$

onde S_n representa o símbolo complexo transmitido na sub-portadora n e T_s a duração do símbolo OFDM. No receptor, o n -ésimo símbolo complexo modulado é recuperado multiplicando-se o símbolo OFDM pelo complexo conjugado da n -ésima sub-portadora e integrando-se o resultado no intervalo de duração do símbolo. Assim, no receptor, o símbolo complexo se escreve

$$\hat{S}_n = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \int_0^{T_s} \tilde{s}(t) e^{-j \left[\frac{2\pi n t}{T_s} \right]} dt \quad (2-2)$$

note que, considerando-se (2-1)

$$\hat{S}_n = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{n_1=0}^{N-1} S_{n_1} e^{j \left[\frac{2\pi(n_1-n)t}{T_s} \right]} dt = S_n \quad (2-3)$$

2.1.2

Implementação baseado em FFT

Como foi dito anteriormente, em sua concepção inicial a geração e detecção de símbolos OFDM requerem um grande conjunto de osciladores, resultando numa implementação complexa. Entretanto, a geração e a detecção de símbolos OFDM podem ser realizadas empregando-se, respectivamente, a Transformada Discreta inversa de Fourier (IDFT) e a Transformada Discreta de Fourier (DFT) [7].

As N componentes de um vetor $\mathbf{x}$, correspondentes à saída da Transformada Discreta inversa de Fourier de um vetor $\mathbf{X}$, de também N componentes, são dadas por

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j\left[\frac{2\pi nk}{N}\right]}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2-4)$$

Note que, se amostrarmos N vezes a envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ de um símbolo OFDM dado por (2-1), nos instantes $t = kT_s/N$, as amostras obtidas se escrevem

$$\tilde{s}_k = \tilde{s}(kT_s/N) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{j\left[\frac{2\pi nk}{N}\right]}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2-5)$$

Comparando-se (2-5) com a definição da IDFT, em (2-4), pode-se notar que as amostras da envoltória complexa do símbolo OFDM, podem ser geradas mediante a aplicação da IDFT sobre a sequência de símbolos complexos $\{S_n\} : n = 0 \dots N-1$

$$\tilde{s}_k = \sqrt{\frac{N}{T_s}} IDFT[\{S_n\}] \quad , \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2-6)$$

Finalmente um conversor Digital/Analógico pode ser usado para se obter a envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ do símbolo OFDM a partir das N amostras de $\tilde{s}_k$.

Lembrando-se que, as N componentes de um vetor $\mathbf{X}$, correspondentes à saída da Transformada Discreta de Fourier de um vetor $\mathbf{x}$, de N componentes, são dadas por

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j\left[\frac{-2\pi nk}{N}\right]}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2-7)$$

a detecção do símbolo OFDM pode ser realizada amostrando-se o símbolo OFDM recebido, nos instantes $t = kT_s/N$, e aplicando-se a DFT sobre o

conjunto de N amostras recebidas. Para condições ideais (sem ruído e sem interferências), essa operação fornece valores de $\hat{S}_n$ dados por

$$\hat{S}_n = \sqrt{\frac{T_s}{N}} DFT\{\tilde{s}(kT_s/N)\} = \frac{\sqrt{T_s}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_k e^{-j[\frac{2\pi nk}{N}]} , \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2-8)$$

note que, considerando-se (2-5)

$$\hat{S}_n = \sqrt{\frac{T_s}{N}} DFT\{\tilde{s}(kT_s/N)\} = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} S_{n_1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j[\frac{2\pi(n_1-n)k}{N}]} = S_n \quad (2-9)$$

Na prática, a Transformada Discreta de Fourier e Transformada Discreta de Fourier inversa são obtidos utilizando-se os algoritmos que caracterizam a Transformada Rápida de Fourier (FFT) e a Transformada Rápida Inversa de Fourier (IFFT). A estrutura do transmissor e receptor OFDM baseado em FFT é apresentada na Figura 2.2.

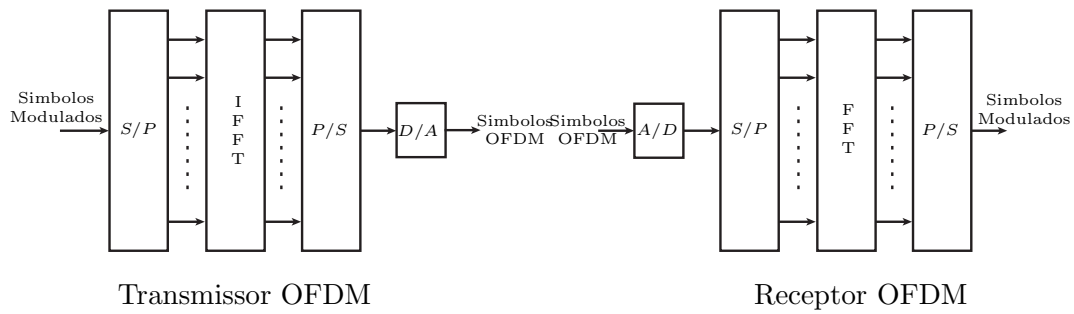


Figura 2.2: Estrutura do sistema OFDM baseado em FTT

2.1.3

Intervalo de guarda

Como foi dito anteriormente, por conta do aumento no tempo da duração dos símbolos em um sistema OFDM (símbolo OFDM) em relação a sistemas de portadora única, uma vantagem do uso do OFDM em sistemas de comunicações é a redução de interferência entre símbolos (ISI) usualmente causada pelo espalhamento de retardo do canal de transmissão. Para minorar mais ainda os efeitos de interferência entre símbolos OFDM sobre o sinal recebido, um intervalo de guarda de duração T_g é introduzido em cada símbolo OFDM. A duração deste intervalo de guarda deve ser tal que, a resposta da convolução entre o canal de propagação e o sinal transmitido não gere interferências entre

símbolos OFDM adjacentes [7].

O intervalo de guarda pode ser preenchido com zeros ou com extensão cíclica do símbolo. No primeiro caso ($T_g = T_{zp}$) o intervalo de guarda é colocado no final de cada símbolo OFDM, no segundo caso ($T_g = T_{cp}$), o intervalo de guarda é colocado no início de cada símbolo OFDM. O intervalo de guarda com extensão cíclica, garante a ortogonalidade entre as sub-portadoras, mantendo o símbolo OFDM periódico na duração do símbolo estendido e, portanto, evitando a interferência entre portadoras (ICI). O intervalo de guarda com extensão cíclica (prefixo cíclico) do símbolo OFDM é ilustrado na Figura 2.3.

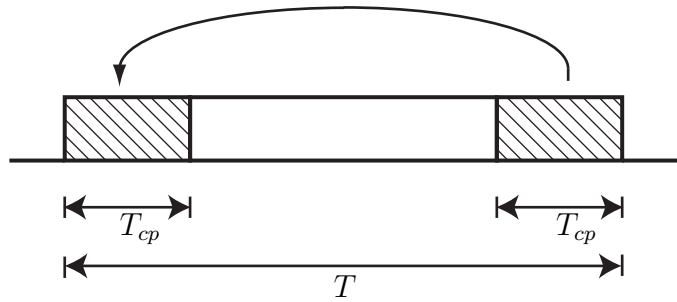


Figura 2.3: Prefixo cíclico do sinal OFDM

Conforme ilustrado nesta figura, no transmissor, as últimas amostras do símbolo OFDM $\{\tilde{s}_k\}$ são inseridas no começo do símbolo. Este procedimento aumenta a duração do símbolo OFDM que passa de T_s para $T = T_s + T_{cp}$. Note que a duração da parte útil do símbolo OFDM é $T - T_{cp}$ e assim, o espaço entre sub-portadoras é $1/(T - T_{cp})$. No receptor, apenas as informações contidas num intervalo de duração T_s são consideradas.

2.1.4

Pulso Formatador

Em presença de canais variantes no tempo, o uso do prefixo cíclico (para mitigar as interferências entre portadoras (ICI)) usualmente não é muito eficiente, pois requer uma estimação precisa do canal. Uma outra opção para combater a interferência entre portadoras (ICI) é a utilização de um pulso formatador [40, 41]. Os pulsos usualmente utilizados são o pulso formatador retangular e o pulso formatador de cosseno levantado.

O pulso formatador retangular é dado por

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & ; \quad t \in [0, T] \\ 0 & ; \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2-10)$$

e, o pulso formatador de cosseno levantado é dado por

$$w(t) = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi t}{2\beta T}) & ; \quad t \in [0, \beta T] \\ 1 & ; \quad t \in [\beta T, T] \\ \cos^2(\frac{\pi(t-T)}{2\beta T}) & ; \quad t \in [T, (1+\beta)T] \\ 0 & ; \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2-11)$$

onde β é o factor de roll-off do cosseno levantado e T é a duração do símbolo OFDM.

2.2

Caracterização do sinal OFDM

Nesta seção, a caracterização do sinal OFDM Ciclo-Estacionário e Estacionário é apresentada. Para ambos os casos, o símbolo OFDM é formado considerando-se a utilização de um intervalo de guarda (com prefixo cíclico) e um pulso formatador.

2.2.1

Sinal OFDM Ciclo-Estacionário

O sinal OFDM (utilizando-se um intervalo de guarda com prefixo cíclico e um pulso formatador) pode ser escrito como [29]

$$s(t) = \text{Re}\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (2-12)$$

com $\tilde{s}(t)$ denotando a envoltória complexa do sinal OFDM em relação à frequência f_c , dada por

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} S_{k,n} p(t - kT) e^{j\left[\frac{2\pi n(t-kT-T_{cp})}{T-T_{cp}} + \theta\right]} \quad (2-13)$$

onde $S_{k,n}$ representa o símbolo complexo transmitido na sub-portadora n no k -ésimo intervalo de tempo, N é o número de sub-portadoras do sinal OFDM, T é a duração do símbolo OFDM, θ é a variável aleatória que modela a fase do oscilador do modulador e $p(\cdot)$ é a função que modela o pulso formatador. No caso particular de pulso formatador retangular, tem-se

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} & ; \quad t \in [0, T] \\ 0 & ; \quad t \notin [0, T] \end{cases} \quad (2-14)$$

onde T_{cp} é a duração do prefixo cíclico do sinal OFDM. A variável aleatória θ é considerada uniformemente distribuída entre $[0, 2\pi)$. Neste trabalho, os símbolos são considerados equiprováveis e estatisticamente independentes entre si, assim como estatisticamente independentes de θ .

Média da envoltória complexa do Sinal OFDM

A média da envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ é dada por

$$m_{\tilde{s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E[S_{k,n}] p(t - kT) e^{j\frac{2\pi n}{T-T_{cp}}(t-kT-T_{cp})} E[e^{j\theta}] \quad (2-15)$$

Observe que, como θ é uniformemente distribuída em $(0, 2\pi]$, $E[e^{j\theta}] = 0$ e, conseqüentemente,

$$m_{\tilde{s}} = 0 \quad (2-16)$$

Função autocorrelação da envoltória complexa do sinal OFDM

Considerando-se que os símbolos complexos transmitidos em diferentes intervalos de tempo e diferentes sub-portadoras são independentes, ou seja, que

$$E[S_{k_1, n_1} S_{k_2, n_2}^*] = \begin{cases} 0 & ; \quad k_1 \neq k_2 \text{ ou } n_1 \neq n_2 \\ E_s & ; \quad k_1 = k_2 = k \text{ e } n_1 = n_2 = n \end{cases} \quad (2-17)$$

com E_s denotando a energia média dos símbolos, obtém-se para a função autocorrelação da envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ a expressão

$$\begin{aligned} R_{\tilde{s}}(t, \tau) &= E[\tilde{s}(t + \tau) \tilde{s}^*(t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E_s p(t + \tau - kT) p^*(t - kT) e^{j\frac{2\pi n\tau}{T-T_{cp}}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

e a potência variante no tempo é dada por

$$P_{\tilde{s}}(t) = R_{\tilde{s}}(t, 0) \quad (2-19)$$

Note que como a média e a função autocorrelação de $\tilde{s}(t)$ são periódicas no tempo, com período T , ou seja,

$$m_{\tilde{s}}(t + kT) = m_{\tilde{s}}(t) = 0 \quad (2-20)$$

e

$$R_{\tilde{s}}(t + kT, \tau) = R_{\tilde{s}}(t, \tau) \quad (2-21)$$

o processo estocástico $\tilde{s}(t)$ é ciclo-estacionário. Para determinar a densidade espectral de potência do processo estocástico $\tilde{s}(t)$, definimos a média da função autocorrelação como

$$\check{R}_{\tilde{s}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T R_{\tilde{s}}(t, \tau) dt \quad (2-22)$$

onde $\int_T$ representa a integral em qualquer intervalo de duração T , substituindo-se (2-18) em (2-22), tem-se

$$\check{R}_{\tilde{s}}(\tau) = E_s \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T - T_{cp}}} I(\tau) \quad (2-23)$$

onde

$$I(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} p(t + \tau - kT) p^*(t - kT) dt \quad (2-24)$$

o cálculo de $I(\tau)$ pode ser feito efetuando-se a mudança de variável de integração $\alpha = t + \tau - kT$. Assim procedendo, verificamos que o integrando surge como função de τ e que o somatório estende o domínio de integração a todo o conjunto $\mathbb{R}$. Temos então que

$$I(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha) p^*(\alpha - \tau) d\alpha \quad (2-25)$$

Podemos ainda expressar a integral em (2-25) como a convolução $p(\tau) * p^*(-\tau)$, obtendo finalmente

$$\check{R}_{\tilde{s}}(\tau) = \frac{E_s}{T} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T - T_{cp}}} p(\tau) * p^*(-\tau) \quad (2-26)$$

A potência média do processo ciclo-estacionário $\tilde{s}(t)$ é dada por

$$\bar{P}_{\tilde{s}} = \check{R}_{\tilde{s}}(0) = \frac{1}{T} \int_T R_{\tilde{s}}(t, 0) \quad (2-27)$$

que, considerando (2-26) e (2-14), se escreve

$$\bar{P}_{\tilde{s}} = \frac{E_s N}{T - T_{cp}} \quad (2-28)$$

Assim, definimos sua função densidade espectral de potência como a Transformada de Fourier da média, no tempo, de sua função autocorrelação. ou seja,

$$S_{\tilde{s}}(f) \triangleq \mathcal{F} [\check{R}_{\tilde{s}}(\tau)] \quad (2-29)$$

Função pseudo autocorrelação

A função pseudo autocorrelação do processo aleatório $\tilde{s}(t)$ é definida por

$$\hat{R}_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = E[\tilde{s}(t_1)\tilde{s}(t_2)] \quad (2-30)$$

Considerando-se que os símbolos complexos transmitidos em diferentes intervalos de tempo e diferentes sub-portadoras são independentes,

$$\hat{R}_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E[(S_{k,n})^2] E \left[p(t_1 - kT) p(t_2 - kT) e^{j \frac{2\pi n}{T-T_{cp}}(t_1+t_2)} \right] E[e^{2\theta}] \quad (2-31)$$

como θ é uniformemente distribuído em $(0, 2\pi]$,

$$E[e^{2\theta}] = 0 \quad (2-32)$$

e conseqüentemente, (2-31) é nula, ou seja,

$$\hat{R}_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = 0 \quad (2-33)$$

2.2.2

Sinal OFDM Estacionário

O sinal OFDM (utilizando-se um intervalo de guarda com prefixo cíclico e um pulso formatador) também pode ser escrito como [24]

$$s(t) = \text{Re}\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (2-34)$$

com $\tilde{s}(t)$ denotando a envoltória complexa do sinal OFDM em relação à frequência f_c , dada por

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} S_{k,n} p(t + \epsilon - kT) e^{j \left[\frac{2\pi n}{T-T_{cp}}(t-kT-T_{cp}+\epsilon) + \theta \right]} \quad (2-35)$$

onde $S_{k,n}$ representa o símbolo complexo transmitido na sub-portadora n no k -ésimo intervalo de tempo, N é o número de sub-portadoras do sinal OFDM, T é a duração do símbolo OFDM, θ e ϵ são variáveis aleatórias que modelam, respectivamente, a fase do oscilador do modulador e o erro de sincronismo de relógio no receptor e $p(\cdot)$ é a função que modela o pulso formatador. No caso

particular de pulso formatador retangular, tem-se

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} & ; \quad t \in [0, T] \\ 0 & ; \quad t \notin [0, T] \end{cases} \quad (2-36)$$

onde T_{cp} é a duração do prefixo cíclico do sinal OFDM. As variáveis aleatórias θ e ϵ são consideradas uniformemente distribuídas entre $[0, 2\pi)$ e $[-T/2, T/2)$ respectivamente e estatisticamente independentes entre si. Neste trabalho, os símbolos são considerados equiprováveis e estatisticamente independentes entre si, assim como estatisticamente independentes de θ e ϵ .

Média da envoltória complexa do Sinal OFDM

A média da envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ é dada por

$$m_{\tilde{s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E[S_{k,n}] E \left[p(t + \epsilon - kT) e^{j \left[\frac{2\pi n}{T-T_{cp}} (t - kT - T_{cp} + \epsilon) \right]} \right] E[e^{j\theta}] \quad (2-37)$$

Observe que, como θ é uniformemente distribuída em $(0, 2\pi]$, $E[e^{j\theta}] = 0$ e, conseqüentemente,

$$m_{\tilde{s}} = 0 \quad (2-38)$$

Função autocorrelação da envoltória complexa do sinal OFDM

Considerando-se que os símbolos complexos transmitidos em diferentes intervalos de tempo e diferentes sub-portadoras são independentes, ou seja, que

$$E[S_{k_1, n_1} S_{k_2, n_2}^*] = \begin{cases} 0 & ; \quad k_1 \neq k_2 \text{ ou } n_1 \neq n_2 \\ E_s & ; \quad k_1 = k_2 = k \text{ e } n_1 = n_2 = n \end{cases} \quad (2-39)$$

com E_s denotando a energia média dos símbolos, obtém-se para a função autocorrelação da envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ a expressão

$$\begin{aligned} R_{\tilde{s}}(t, \tau) &= E[\tilde{s}(t + \tau) \tilde{s}^*(t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E_s E[p(t + \tau + \epsilon - kT) p^*(t + \epsilon - kT)] e^{j \frac{2\pi n \tau}{T-T_{cp}}} \end{aligned} \quad (2-40)$$

lembrando que ϵ é uniformemente distribuída em $[-T/2, T/2)$, temos

$$R_{\tilde{s}}(t, \tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E_s p(t + \tau + \mathcal{E} - kT) p^*(t + \mathcal{E} - kT) d\mathcal{E} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T-T_{cp}}} \quad (2-42)$$

invertendo a ordem da integração e do somatório, temos

$$\begin{aligned}
 R_{\tilde{s}}(t, \tau) &= \frac{E_s}{T} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T-T_{cp}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} p(t + \tau + \mathcal{E} - kT) p^*(t + \mathcal{E} - kT) d\mathcal{E} \\
 &= E_s \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T-T_{cp}}} I(t + \tau, t)
 \end{aligned} \tag{2-43}$$

o cálculo de $I(t + \tau, t)$ pode ser feito efetuando-se a mudança de variável de integração $\alpha = t + \tau + \epsilon - kT$. Assim procedendo, verificamos que o integrando surge como função apenas de τ e que o somatório estende o domínio de integração a todo o conjunto $\mathbb{R}$. Temos então que

$$I(t + \tau, t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha) p^*(\alpha - \tau) d\alpha \tag{2-44}$$

podemos ainda expressar a integral em (2-44) como a convolução $p(\tau) * p^*(-\tau)$, obtendo finalmente

$$R_{\tilde{s}}(\tau) = \frac{E_s}{T} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T-T_{cp}}} p(\tau) * p^*(-\tau) \tag{2-45}$$

Note que (2-45), é idêntica a pegar (2-18) e tirar a média em t , apresentada em (2-26). A partir de (2-38) e (2-45), podemos concluir que $\tilde{s}(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo (ESA). Assim, definimos sua função densidade espectral de potência como a Transformada de Fourier de sua função autocorrelação. ou seja,

$$S_{\tilde{s}}(f) \triangleq \mathcal{F}[R_{\tilde{s}}(\tau)] \tag{2-46}$$

A potência média do processo estacionário $\tilde{s}(t)$ é dada por

$$P_{\tilde{s}} = R_{\tilde{s}}(0) \tag{2-47}$$

que, considerando (2-45) e (2-36), se escreve

$$P_{\tilde{s}} = \frac{E_s N}{T - T_{cp}} \tag{2-48}$$

Função pseudo autocorrelação

A função pseudo autocorrelação do processo aleatório $\tilde{s}(t)$ é definida por

$$\hat{R}_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = E[\tilde{s}(t_1)\tilde{s}(t_2)] \quad (2-49)$$

Considerando-se que os símbolos complexos transmitidos em diferentes intervalos de tempo e diferentes sub-portadoras são independentes,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E[(S_{k,n})^2] E \left[p(t_1 + \epsilon - kT) p(t_2 + \epsilon - kT) e^{j \frac{2\pi n}{T-T_{cp}}(t_1+t_2+2\epsilon)} \right] \\ \cdot E[e^{2\theta}] \end{aligned} \quad (2-50)$$

como θ é uniformemente distribuído em $(0, 2\pi]$,

$$E[e^{2\theta}] = 0 \quad (2-51)$$

e conseqüentemente, (2-50) é nula, ou seja,

$$\hat{R}_{\tilde{s}}(t_1, t_2) = 0 \quad (2-52)$$

Finalmente, considerando-se o Teorema do limite central podemos concluir que a envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ (para N grande) pode ser considerado um processo estacionário no sentido amplo (ESA), gaussiano e próprio.

2.2.3

Densidade espectral de potência da envoltória complexa do sinal OFDM

A densidade espectral de potência de um processo estacionário no sentido amplo é dada pela Transformada de Fourier de sua função autocorrelação e a de um processo ciclo-estacionário é dada pela Transformada de Fourier da média da sua função autocorrelação. Como foi mostrado em (2-29) e (2-46) os dois resultados são equivalentes, assim a partir de (2-26) ou (2-45), tem-se

$$S_{\tilde{s}}(f) = \frac{E_s}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F} \left[e^{j \frac{2\pi n \tau}{T-T_{cp}}} p(\tau) * p^*(-\tau) \right] \quad (2-53)$$

utilizando-se algumas propriedades da Transformada de Fourier, tem-se

$$S_{\tilde{s}}(f) = \frac{E_s}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \left| P \left(f - \frac{n}{T-T_{cp}} \right) \right|^2 \quad (2-54)$$

onde $P(f)$ é a Transformada de Fourier de $p(t)$.

A título de exemplo, considere o caso particular em que $p(t)$ é o pulso retangular definido em (2-36). Neste caso,

$$\left| P \left(f - \frac{n}{T - T_{cp}} \right) \right|^2 = \frac{T^2}{T - T_{cp}} \text{sinc}^2 \left[\left(f - \frac{n}{T - T_{cp}} \right) T \right] \quad (2-55)$$

Função densidade espectral de potência normalizada da envoltória complexa $\tilde{s}(t)$

Define-se a Densidade espectral de potência normalizada como

$$\bar{S}_{\tilde{s}}(f) = \frac{S_{\tilde{s}}(f)}{P_{\tilde{s}}} \quad (2-56)$$

onde $S_{\tilde{s}}(\tau)$ é dada por (2-54) e $P_{\tilde{s}}$ é dado por (2-48). Assim podemos reescrever a densidade espectral de potência normalizada como

$$\bar{S}_{\tilde{s}}(f) = \frac{T - T_{cp}}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \left| P \left(f - \frac{n}{T - T_{cp}} \right) \right|^2 \quad (2-57)$$

A Figura 2.4 ilustra a densidade espectral de potência normalizada da envoltória complexa de $s(t)$ obtida a partir de (2-57) e (2-55). Note que, nesta figura, a frequência foi normalizada com relação à banda de 3 dB B_0 e à frequência central f_0 do espectro do sinal OFDM, dadas por

$$B_0 = \frac{N}{(T - T_{cp})} \quad (2-58)$$

e

$$f_0 = \frac{N - 1}{2(T - T_{cp})} \quad (2-59)$$

respectivamente.

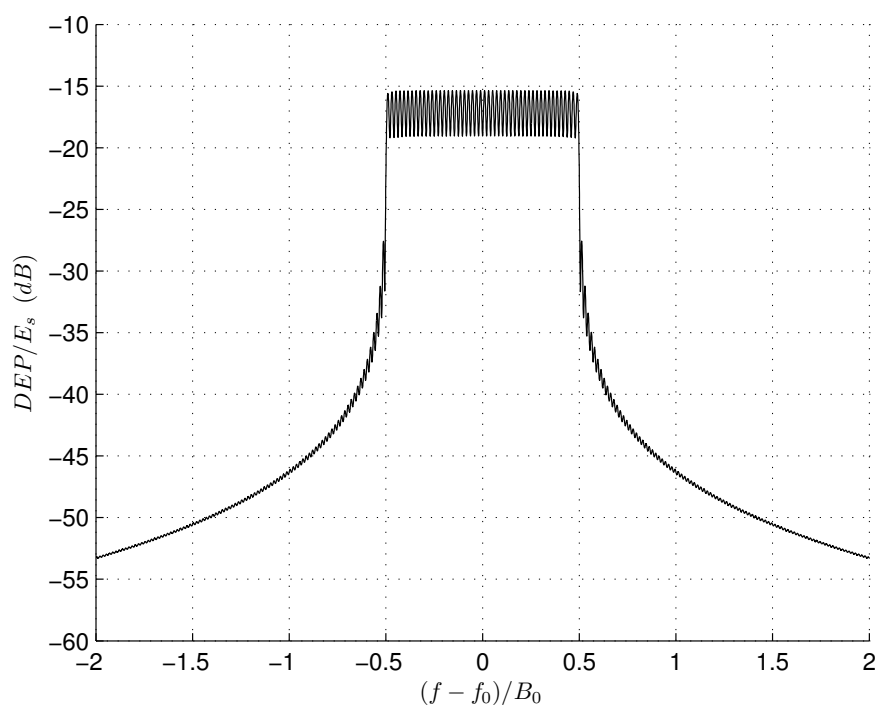


Figura 2.4: DEP da envoltória complexa do sinal OFDM/BPSK com $N = 48$, $T = 4\mu s$, $T_{CP} = 0.8\mu s$ e pulso formatador retangular