

5 Análise Dinâmica

Devido à sua esbeltez, as cascas conoidais podem estar sujeitas a grandes amplitudes de vibração. Sendo assim, com o intuito de projetar com segurança a estrutura da casca, suas frequências naturais e modos de vibração devem ser analisados. Contudo, como nas placas e nas vigas, as frequências naturais para a mesma geometria podem variar em função das condições de contorno. Em geral, na prática, a mesma condição de contorno é adotada para os dois bordos retilíneos opostos, procedimento seguido neste capítulo. Assim como as condições de contorno, as dimensões e a curvatura da casca influenciam as frequências naturais e modos de vibração.

Neste capítulo, apresenta-se uma análise paramétrica da casca conoidal, descrita no capítulo anterior, com a finalidade de estudar o efeito das condições de contorno, dimensões e curvatura da casca nas suas frequências naturais e modos de vibração.

Para a análise modal da casca conoidal, são utilizados os seguintes programas:

- 1) *Maple 14* - para geração da geometria 3D da casca conoidal;
- 2) *Microsoft Excel* - para geração dos gráficos referentes aos modos;
- 3) *Autodesk ROBOT Structural Analysis Professional 2014* - para análise modal da casca por elementos finitos.

5.1. Metodologia para Análise Modal da Casca Conoidal

Adota-se, como referência, analogamente ao Capítulo 4, uma casca de concreto com 6,0 cm de espessura, módulo de elasticidade $E=14.000$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu=0,30$ e peso específico $\rho=25$ kN/m³. As dimensões da casca (projeção no plano x-y) são $a=6$ m e $2b=8$ m (ver Figura 5.1 abaixo). A

altura do arco de parábola maior é $H_h = 1,50$ m, enquanto a altura do arco de parábola menor é $H_l = 0,75$ m. Inicialmente considera-se a casca engastada nos quatro bordos.

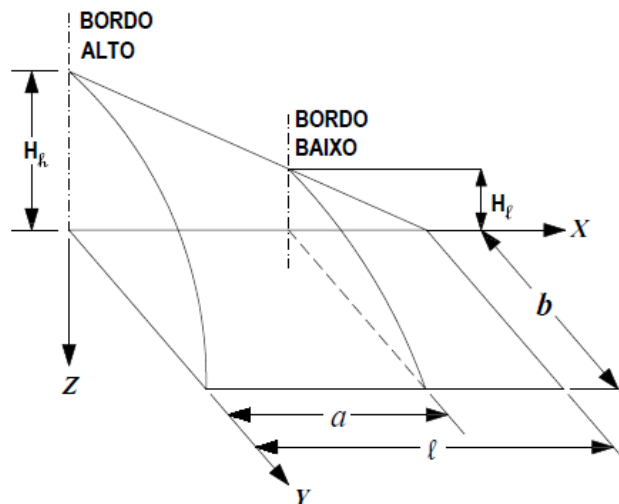


Figura 5.1 – Geometria da casca conoidal (Figura análoga à Figura 3.1)

5.1.1.

Análise de convergência do modelo para escolha da malha em EF

No programa ROBOT, é utilizada a análise modal denominada PP, ou seja, levando em consideração as forças estáticas geradas pelo peso próprio da casca, conforme ilustra a Figura 5.2.

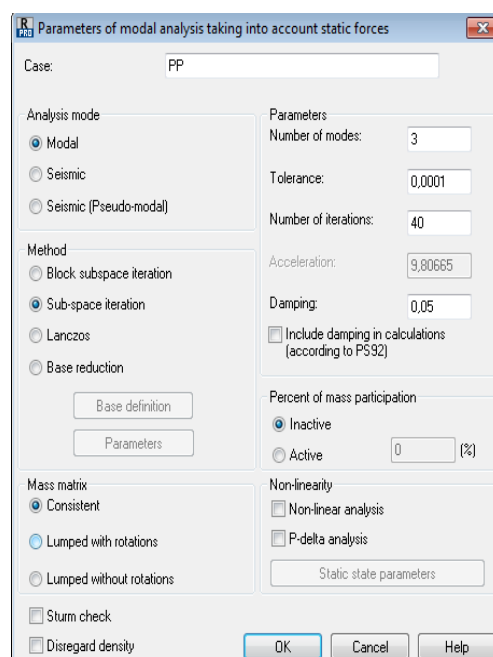


Figura 5.2 – Parâmetros da análise modal no programa ROBOT

Tabela 5.1 - Convergência das Frequências Naturais

Malha	<u>Nº de elementos em X x</u> <u>Nº de elementos em Y</u>	<u>Frequência natural do</u> <u>primeiro modo de</u> <u>vibração</u>
Malha 1	8 x 24	20,88 Hz
Malha 2	16 x 24	20,73 Hz
Malha 3	24 x 24	20,70 Hz
Malha 4	24 x 48	20,42 Hz ^{**}

^{**} Malha escolhida como convergente.

5.1.2.

Resultados para a Casca Conoidal - Malha 24 x 48 – MODO 1

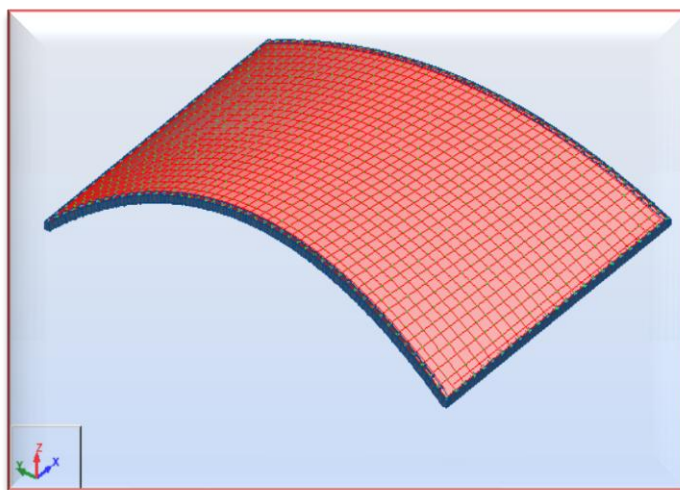


Figura 5.3 – Malha de EF da casca conoidal

No programa ROBOT, o caminho *Resultados > Avançado > Análise Modal* fornece uma tabela de resultados referentes à análise modal da casca conoidal. A fim de visualizar os autovetores relativos os modos de vibração, deve-se selecionar *Colunas de Tabela* e, na aba *Vetor Próprio*, selecionar UX, UY e UZ. A Figura 5.4 mostra a janela do programa onde a seleção deve ser feita. Depois disso, deve-se inserir a numeração dos nós correspondentes aos eixos centrais da casca, X-X e Y-Y.

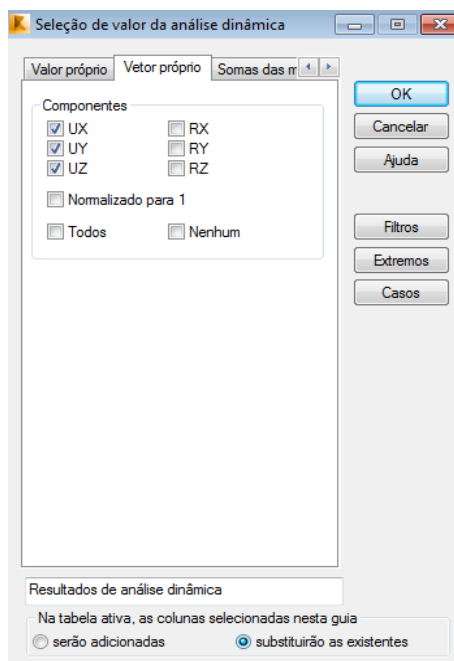
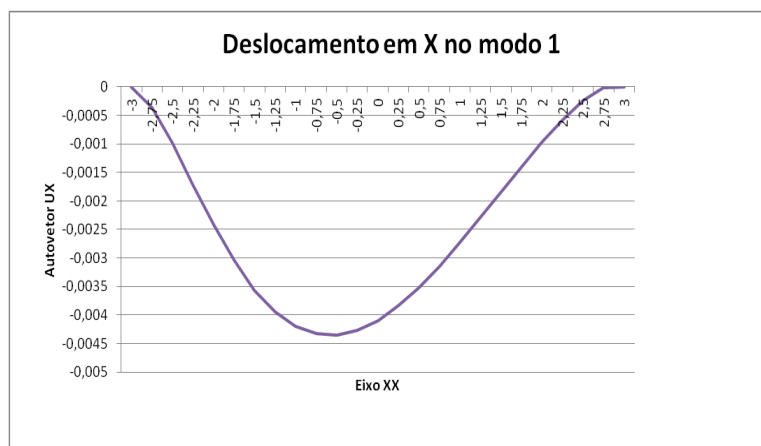


Figura 5.4 – Janela para seleção dos autovetores

As tabelas são obtidas com o auxílio do programa *Microsoft Excel*. As Figuras 5.5 e 5.6 ilustram para, respectivamente, os eixos X-X e Y-Y, os autovetores UX, UY e UZ relativos ao primeiro modo de vibração, onde UX e UY representam os deslocamentos na superfície média da placa e UZ, o deslocamento transversal à superfície média.



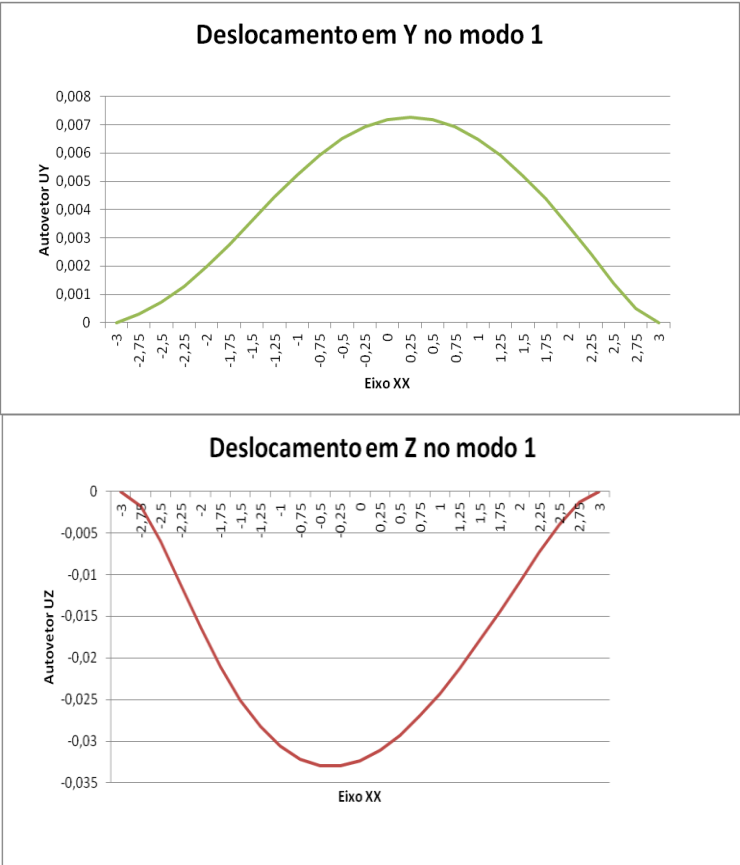
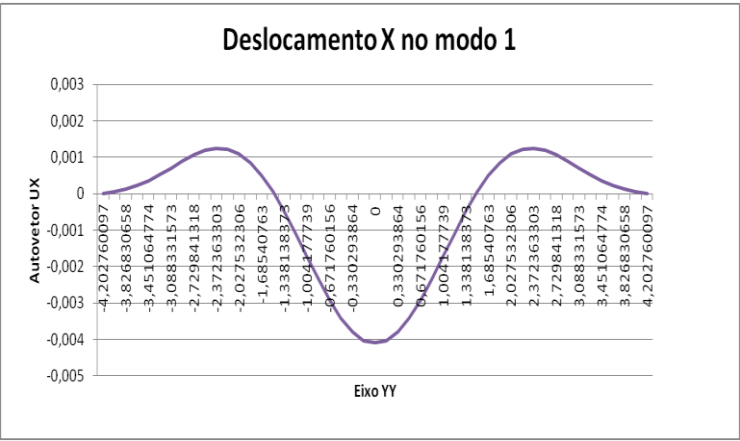


Figura 5.5 – Variação dos deslocamentos relativos ao primeiro modo de vibração ao longo do eixo de simetria XX.



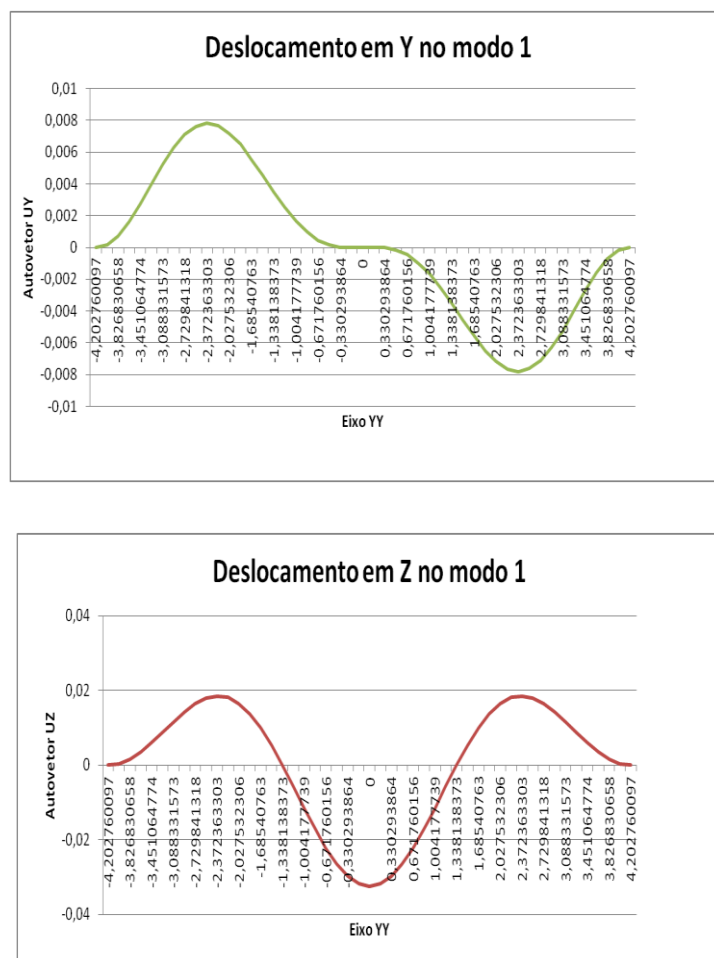


Figura 5.6 – Variação dos deslocamentos relativos ao primeiro modo de vibração ao longo do eixo YY.

5.2.

Variação da curvatura (parâmetros H_h e H_l) da casca conoidal

De posse do modelo inicial da casca conoidal em EF, foram variadas as alturas das parábolas que definem os dois bordos curvos, a saber, H_h (altura da parábola maior) e H_l (altura da parábola menor), variando assim a curvatura da casca, e investigada a influência desta variação no comportamento dos modos de vibração da casca e em suas frequências naturais. Considera-se a casca engastada nos quatro bordos.

O modelo inicial possuía $H_h = 1,50$ m e $H_l = 0,75$ m. A variação se deu gerando mais quatro modelos, dois com alturas menores e dois com alturas maiores, utilizando o incremento de 0,5 m, para mais e para menos no parâmetro H_h . O parâmetro H_l é calculado de forma que a relação $H_h / H_l = 2$ permanece constante.

A Tabela 5.2 mostra para as cinco geometrias analisadas as frequências relativas aos três primeiros modos de vibração. Os respectivos modos de vibração são mostrados na Tabela 5.3.

Tabela 5.2 - Frequências naturais para diferentes curvaturas da casca

Hh (m)	FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO (f) - Hz		
	MODO 1	MODO 2	MODO 3
0,5	12,86	13,66	18,75
1	17,36	18,5	25,78
1,5	20,42	21,57	29,41
2	23,02	23,19	30,57
2,5	24,21	24,92	29,99

Pode-se observar que, para os três primeiros modos de vibração, quanto menor a curvatura da casca, menores são as frequências naturais de vibração. Quanto ao formato dos modos de vibração, comparando a casca de menor curvatura, $H_h = 0,5$ m, e a casca de maior curvatura, $H_h = 2,5$ m, verifica-se que ao longo da geratriz (eixo reto) não há modificações significativas na forma modal, como mostra a Figura 5.7. Porém, ao se considerar o eixo curvo da casca, percebe-se uma considerável mudança na forma dos modos de vibração, para os três primeiros modos, em todas as componentes de deslocamento UX, UY e UZ, como observado na Figura 5.8, que ilustra o autovetor UZ. Verifica-se que o número de semiondas varia com a curvatura da casca.



(a) $H_h = 0,5$ m



(b) $H_h = 2,5$ m

Figura 5.7 - Variação do primeiro modo de vibração em função da curvatura da casca. Direção x.

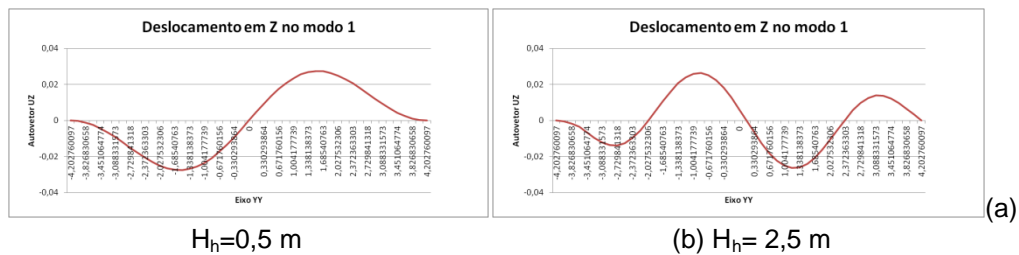
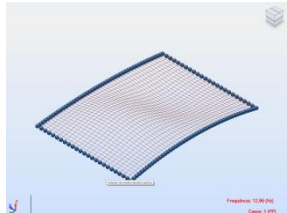
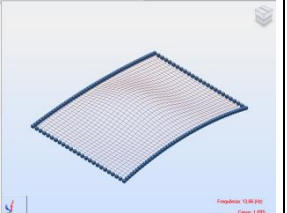
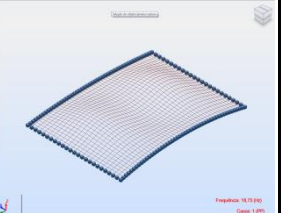
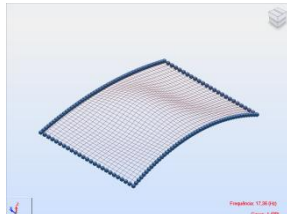
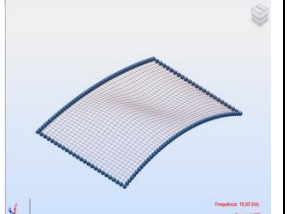
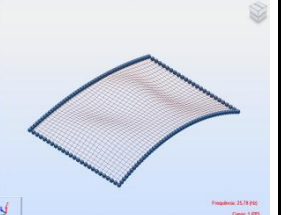
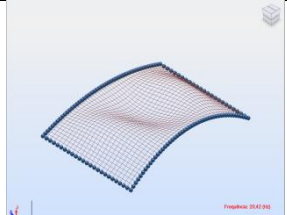
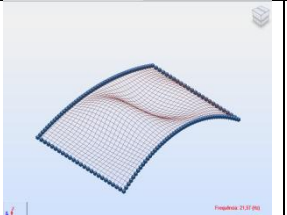
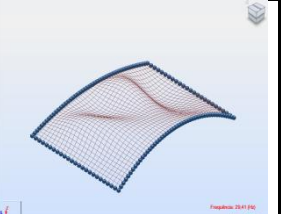
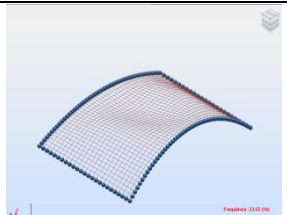
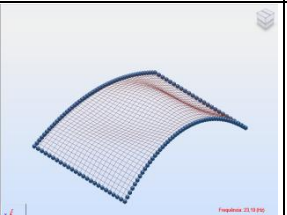
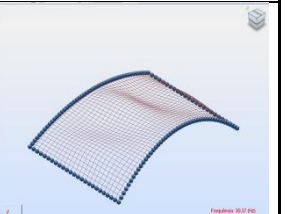
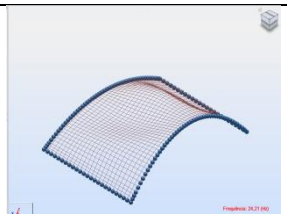
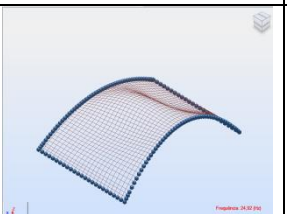
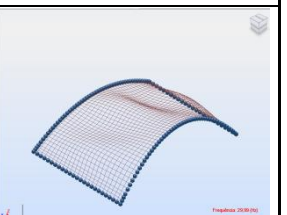


Figura 5.8 - Variação do primeiro modo de vibração em função da curvatura da casca.
Direção y.

Tabela 5.3 - Modos de vibração para diferentes curvaturas da casca
(Caso EEEE)

Hh (m)	MODOS DE VIBRAÇÃO PARA DIFERENTES CURVATURAS DA CASCA CONOIDAL		
	MODO 1	MODO 2	MODO 3
0,5			
1			
1,5			
2			
2,5			

5.3.

Variação das Condições de Contorno da Casca Conoidal

Variam-se agora as condições de contorno da casca conoidal, e verifica-se a sua influência nos modos de vibração da estrutura da casca e em suas frequências naturais, para os três primeiros modos.

Para estudar o efeito das condições de contorno, considera-se, como é usual em projeto, os bordos retilíneos opostos com a mesma condição de contorno, a saber, (1) os dois bordos retilíneos engastados e (2) os dois bordos retilíneos simplesmente apoiados, e diferentes condições de contorno ao longo dos dois outros bordos curvos (engastado (E), simplesmente apoiado (S A) ou livre (L)).

A Figura 5.9, mostra a numeração dos bordos da casca conoidal adotada na análise.

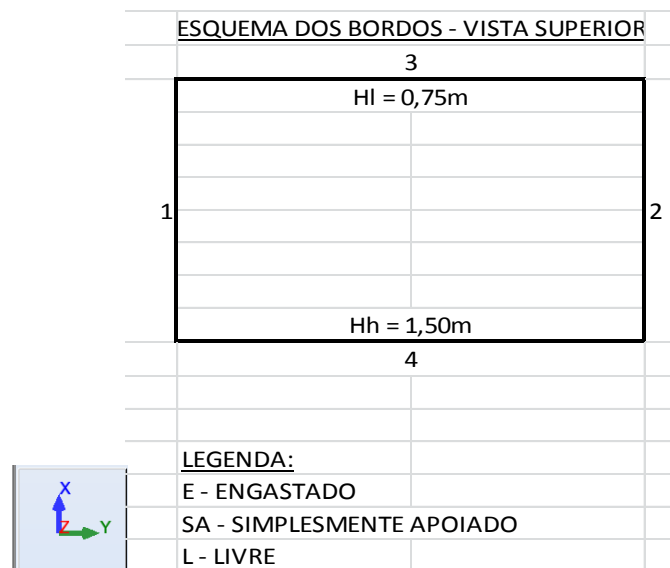


Figura 5.9 - Desenho esquemático da numeração dos bordos

A Tabela 5.4 mostra a variação das três primeiras frequências naturais com as condições de contorno.

Tabela 5.4 – Frequências naturais de vibração para as diferentes condições de contorno da casca conoidal.

CONÓIDE COM Hh = 1,50m			
BORDOS	FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO (f) - Hz		
1-2-3-4	MODO 1	MODO 2	MODO 3
E-E-E-E	20,42	21,57	29,41
E-E-E-SA	19,25	20,58	28,63
E-E-SA-E	18,59	20,13	28,58
E-E-SA-SA	17,01	19,24	27,77
E-E-E-L	14,47	16,08	23,69
E-E-SA-L	10,68	14,81	22,66
E-E-L-E	9,38	12,03	20,68
E-E-L-SA	7,91	11,68	20,25
E-E-L-L	6,42	10,34	12,73
SA-SA-E-E	19,75	20,15	26,99
SA-SA-E-SA	17,86	19,28	24,49
SA-SA-SA-E	16,23	17,04	22,53
SA-SA-SA-SA	14,61	15,93	20,31
SA-SA-E-L	11,89	14,74	19,79
SA-SA-SA-L	11,56	12,42	16,27
SA-SA-L-E	8,91	9,80	16,73
SA-SA-L-SA	6,82	9,54	15,97
SA-SA-L-L (*)	3,11	6,11	7,77

Como se pode observar, a frequência natural mais baixa varia de 20,42 Hz para uma casca engastada nos quatro bordos (E-E-E-E, caso mais rígido) até 3,11 Hz para uma casca simplesmente apoiada ao longo dos dois bordos retilíneos e livre nos bordos curvos (SA-SA-L-L, caso mais flexível dentre os aqui analisados). Observa-se que a casca pode apresentar frequências baixas, podendo

exibir fenômenos de ressonância e vibrações indesejáveis na presença de cargas ambientais severas. Também deve-se ressaltar que estas vibrações, ao excitar modos assimétricos, podem induzir a perda de estabilidade por *snap-through*. Comparando o caso E-E-L-L com o mais flexível, podemos observar que a frequência fundamental variou de 6,42 Hz a 3,11 Hz. Na maioria dos casos práticos da engenharia, onde os bordos curvos são livres, a rigidez dos apoios retilíneos dependerá da rigidez relativa da casca e do próprio apoio. Sendo assim, considerando-se uma casca com um apoio flexível, pode-se afirmar que as frequências naturais da mesma irão variar na faixa entre as observadas para os casos E-E-L-L e SA-SA-L-L.

Quanto ao formato dos modos de vibração, observa-se que para o eixo retilíneo da casca, comparando as diferentes condições de contorno, praticamente não há modificação. Porém, se considerarmos o eixo Y-Y, eixo curvo da casca, percebemos duas situações distintas, dependendo de como as condições de contorno estão dispostas: (1) quando os apoios retilíneos são mais rígidos, caso engastado, nota-se uma considerável mudança na forma dos modos de vibração, quando se variam as condições para os outros dois bordos curvos. (2) quando os apoios são mais flexíveis, caso simplesmente apoiado, nota-se que não há variação significativa no formato dos modos, quando se variam as condições de contorno para os outros dois bordos curvos. As Figuras 5.10 e 5.11 ilustram esta situação para o primeiro modo de vibração, ou seja, para o modo referente às menores frequências naturais de vibração da casca.

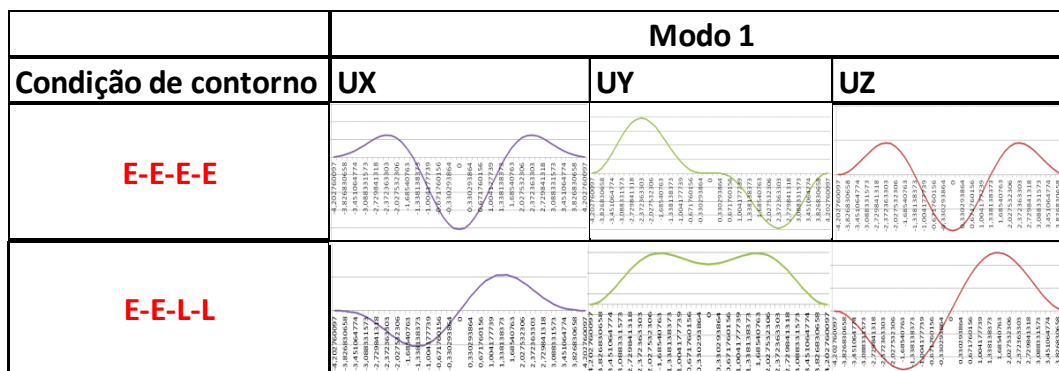


Figura 5.10 – Comparação entre os modos de vibração para os modelos E-E-E-E e

E-E-L-L

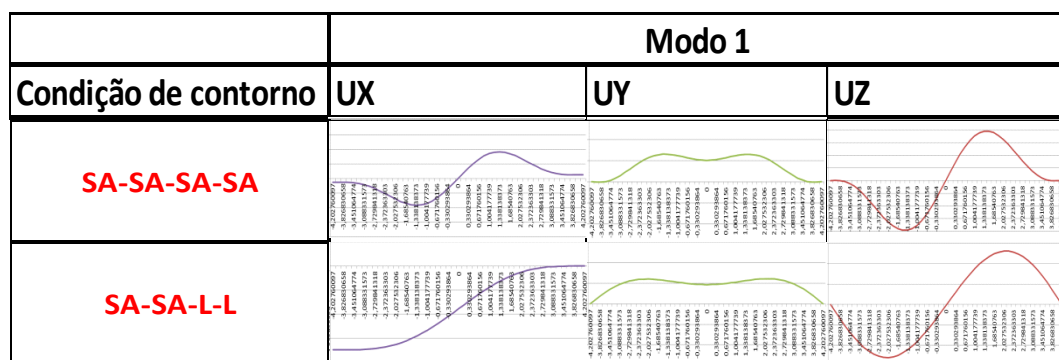


Figura 5.11 – Comparação entre os modos de vibração para os modelos SA-SA-SA-SA e SA-SA-L-L

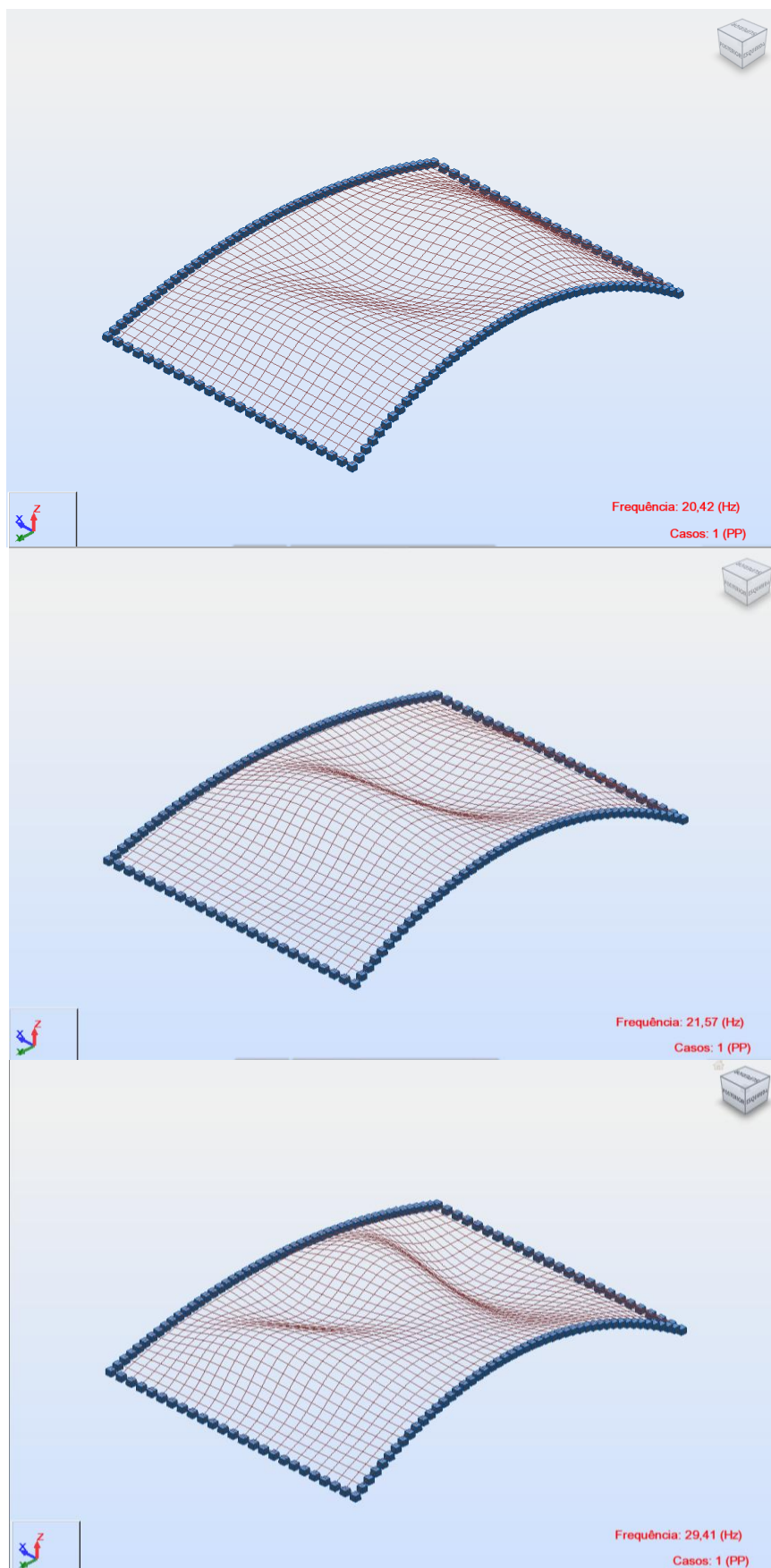


Figura 5.12 - Modos de vibração do modelo EEEE

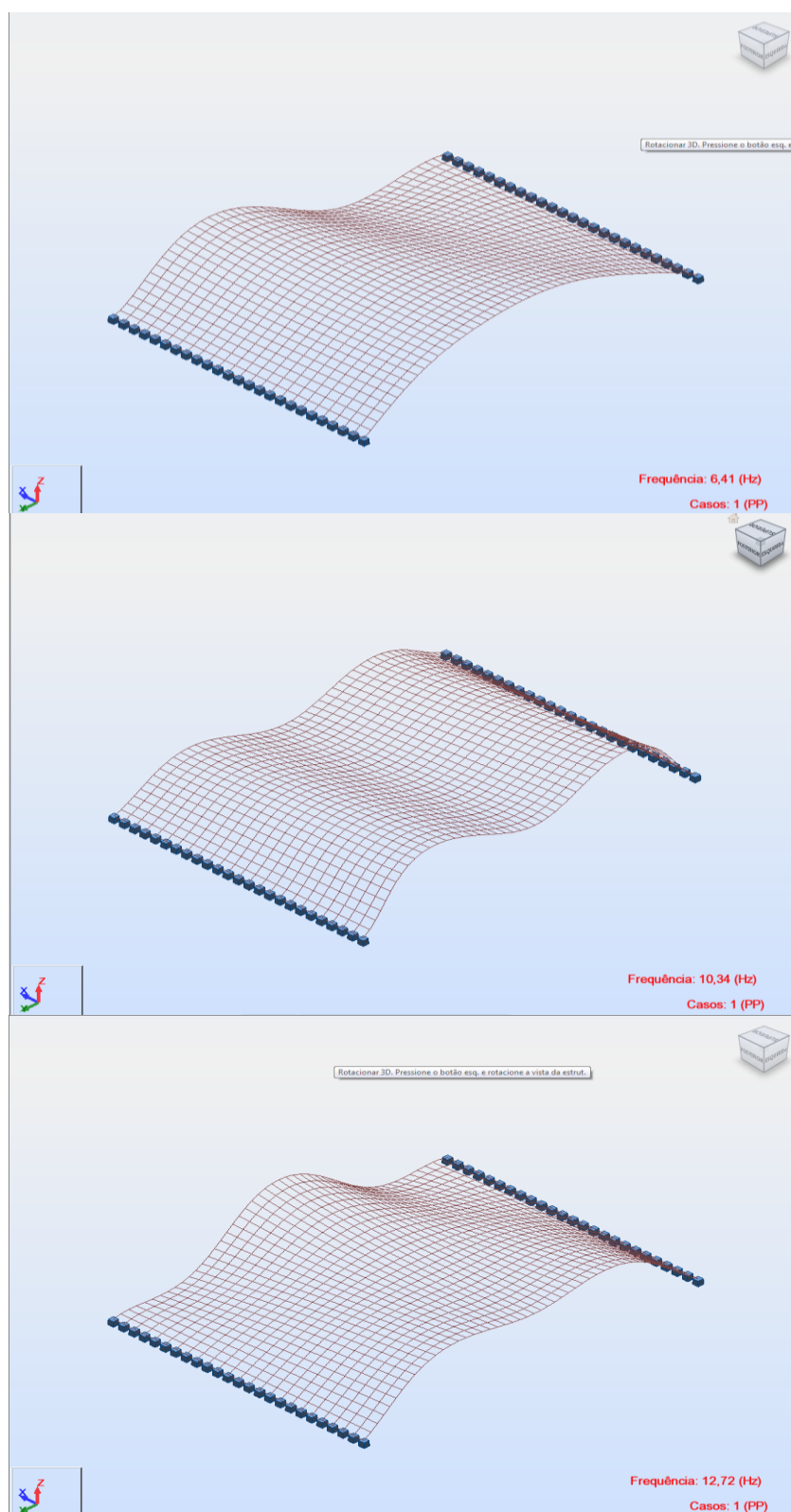


Figura 5.13 – Modos de vibração do modelo EELL

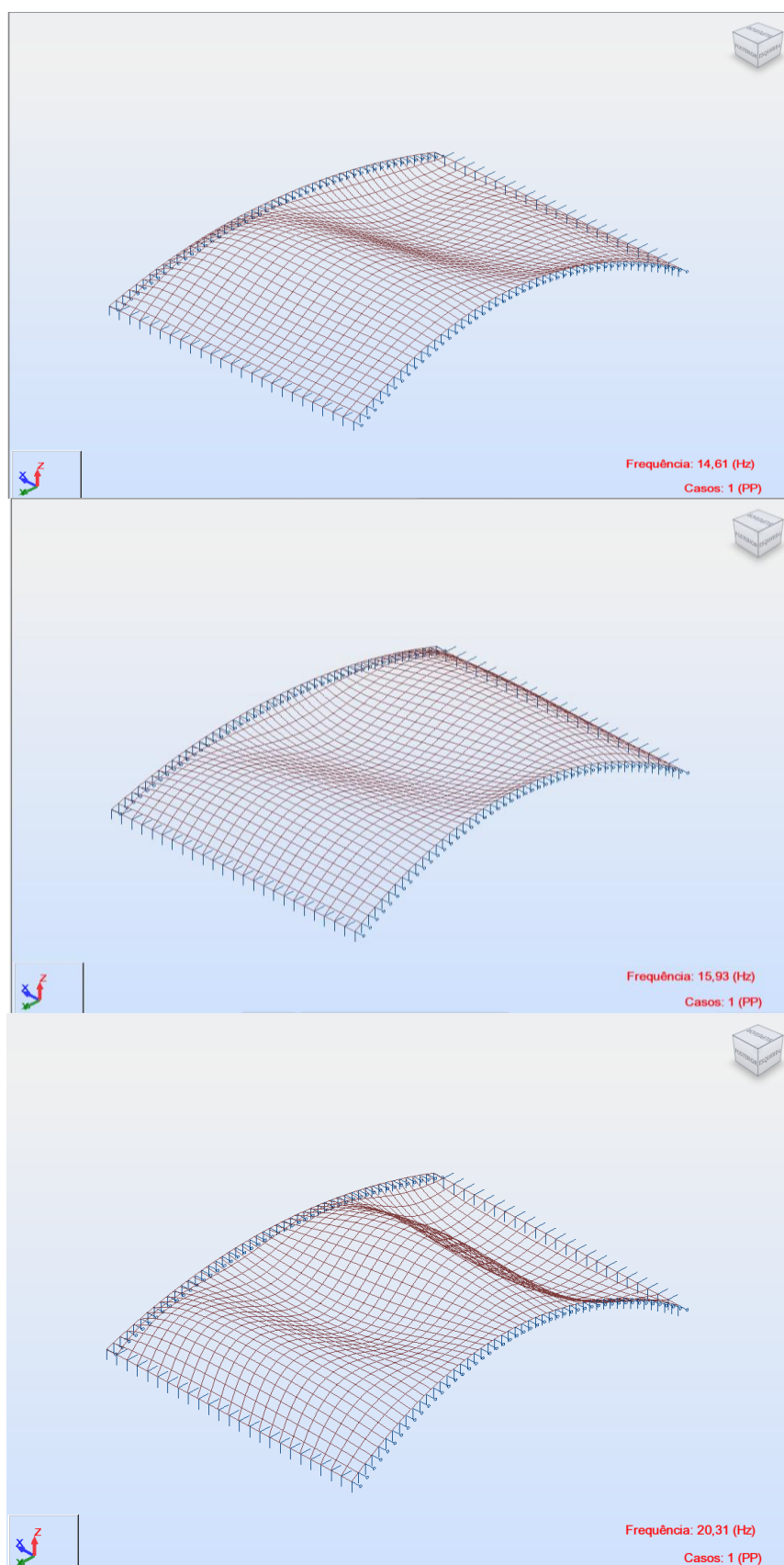


Figura 5.14 - Modos de vibração do modelo SASASASA

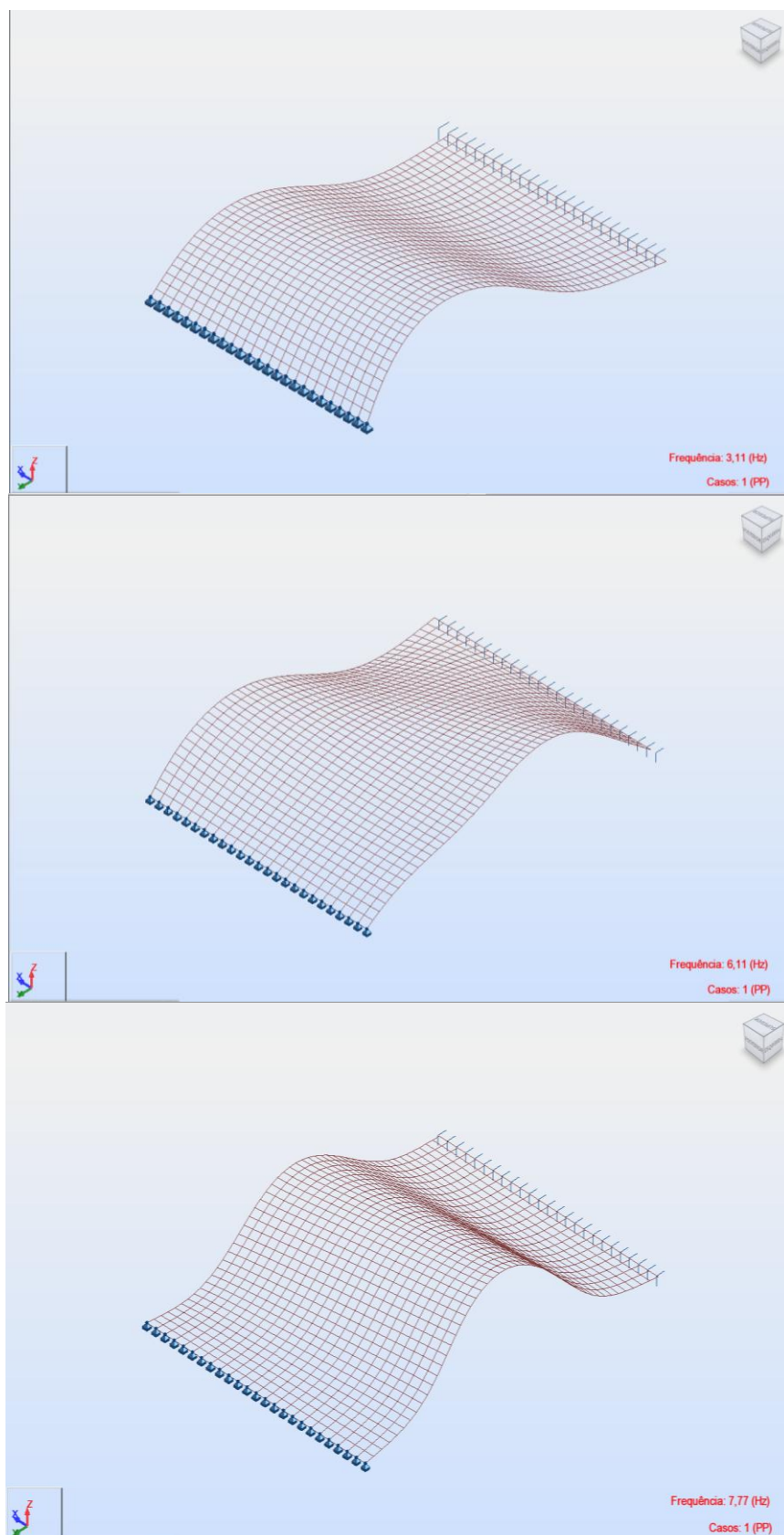


Figura 5.15 - Modos de vibração do modelo SASALL

5.4.

Variação do Comprimento da Casca Conoidal

Estuda-se agora a influência da variação no comprimento da casca conoidal nos modos de vibração e frequências naturais da estrutura. O comprimento do modelo de referência é $a = 6\text{m}$. Os comprimentos adicionais adotados são $a = 3\text{m}$; $a = 9\text{m}$; e $a = 12\text{m}$, quando o parâmetro H_I se torna zero, e a casca passa a ter três bordos retilíneos. Para todos os comprimentos consideram-se duas condições de contorno: EEEE e SASALL. As frequências naturais relativas aos 3 primeiros modos de vibração são apresentadas na Tabela 5.5, enquanto os respectivos modos de vibração são apresentados nas Figuras 5.16 a 5.21.

As malhas de EF utilizadas foram 12×48 ($a = 3\text{m}$); 48×48 ($a = 9\text{m}$); e 72×48 ($a = 12\text{m}$), para que fosse mantida a mesma proporção que a malha de 24×48 , utilizada para o modelo de referência, com $a = 6\text{m}$.

Tabela 5.5 - Comparação entre as frequências naturais em Hz para os diversos comprimentos da casca conoidal

<i>Casca</i>	<i>Modelo EEEE</i>			<i>Modelo SASALL</i>		
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>
$a=3\text{m}$	38,21	39,18	44,93	3,64	7,58	12,35
$a=6\text{m}$	20,42	21,57	29,41	3,11	6,11	7,77
$a=9\text{m}$	15,40	16,99	21,39	6,41	8,01	10,83
$a=12\text{m}$	11,91	14,51	15,05	5,58	8,12	8,64

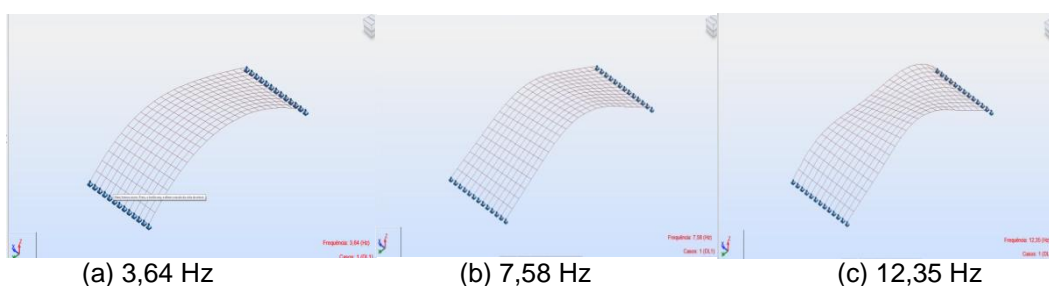


Figura 5.16 - Frequências naturais do modelo SASALL para $a = 3\text{ m}$

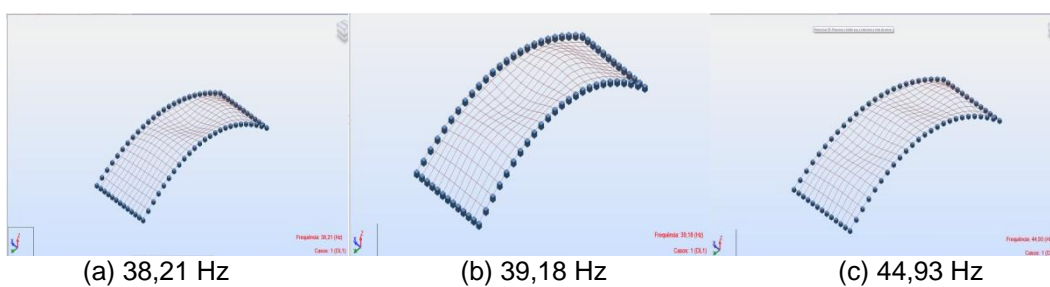


Figura 5.17 - Frequências naturais do modelo EEEE para $a = 3$ m

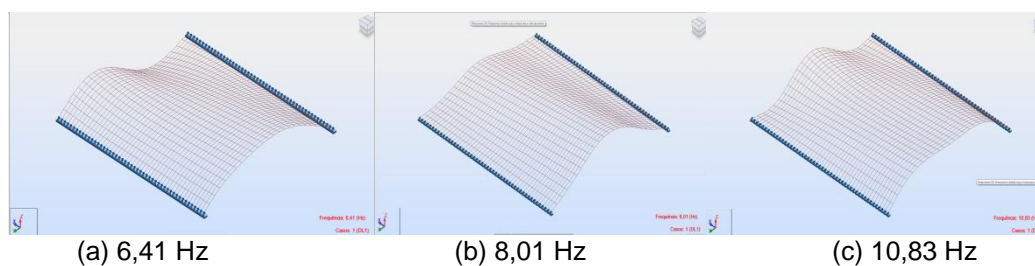


Figura 5.18 - Frequências naturais do modelo SASALL para $a = 9$ m

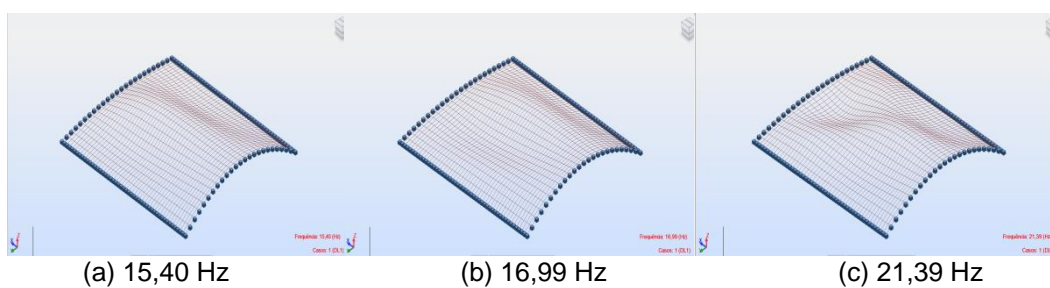


Figura 5.19 - Frequências naturais do modelo EEEE para $a = 9$ m

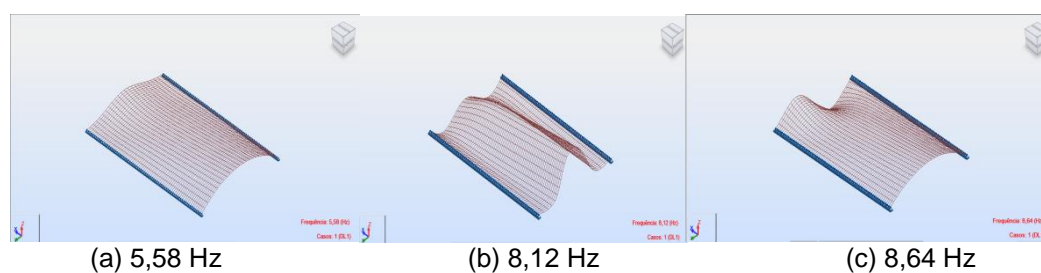


Figura 5.20 - Frequências naturais do modelo SASALL para $a = 12$ m

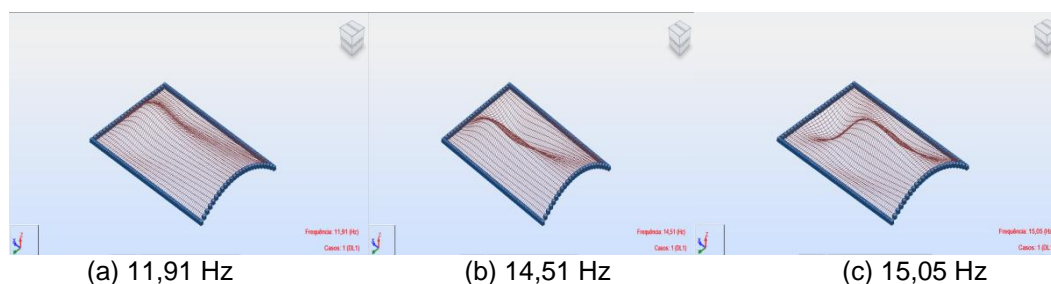


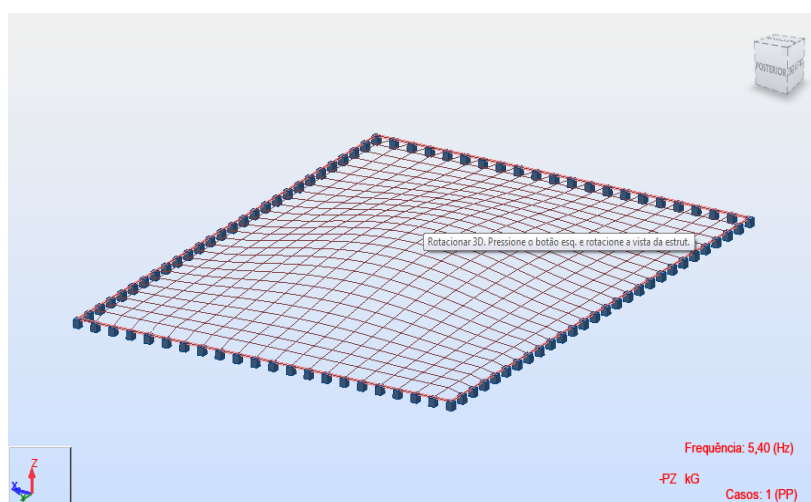
Figura 5.21 - Frequências naturais do modelo EEEE para $a=12\text{m}$

Pode-se observar que para as condições de contorno mais rígidas, ou seja, para o modelo *EEEE*, há um decréscimo significativo nas frequências naturais para os três primeiros modos de vibração, conforme a casca fica mais longa.

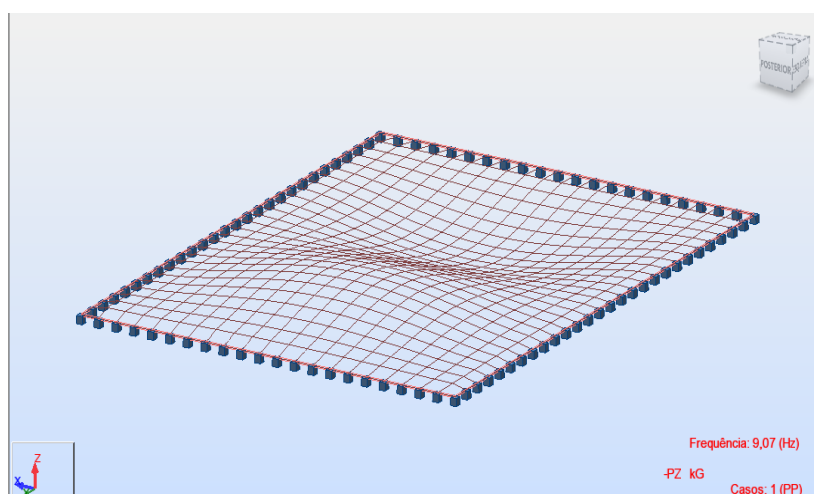
O mesmo não se observa para o modelo *SASALL*, onde as frequências para todos os valores de a têm a mesma ordem de grandeza. Nota-se para este modelo frequências de vibração muito próximas, o que pode levar a um comportamento dinâmico não linear complexo inclusive com ressonâncias internas 1:1 (dois modos com mesma frequência natural). Neste caso, observa-se uma primeira leve queda nos valores das frequências naturais, quando comparamos os resultados de $a=3\text{m}$ com os da casca com $a=6\text{m}$. Porém, elas voltam a aumentar para cascas mais longas ($a=9\text{m}$ e $a=12\text{m}$).

5.5. Comparação com os Resultados para a Placa Plana

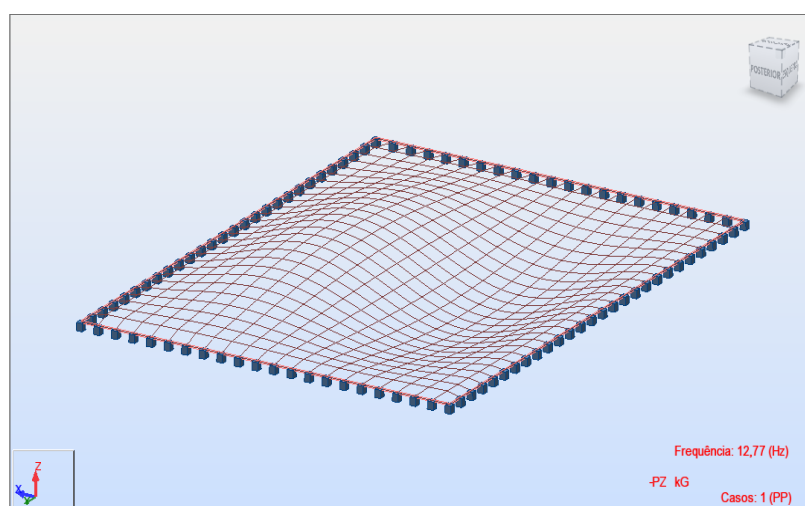
Considerando uma placa plana, com as mesmas dimensões no plano XY que a casca conoidal, $6\text{m} \times 8\text{m}$, mesma espessura, $h=6\text{ cm}$, e mesmas propriedades do material. Como no caso da casca conoidal, obtêm-se os resultados para os dois casos extremos, mais rígido (modelo *EEEE*) e mais flexível (modelo *SASALL*).



$f_1 = 5,40 \text{ Hz}$ – frequência natural para o primeiro modo de vibração

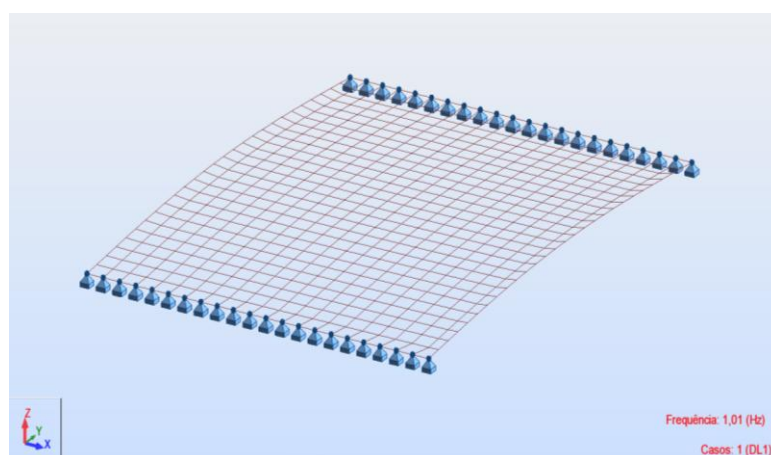


$f_2 = 9,07 \text{ Hz}$ – frequência natural para o segundo modo de vibração

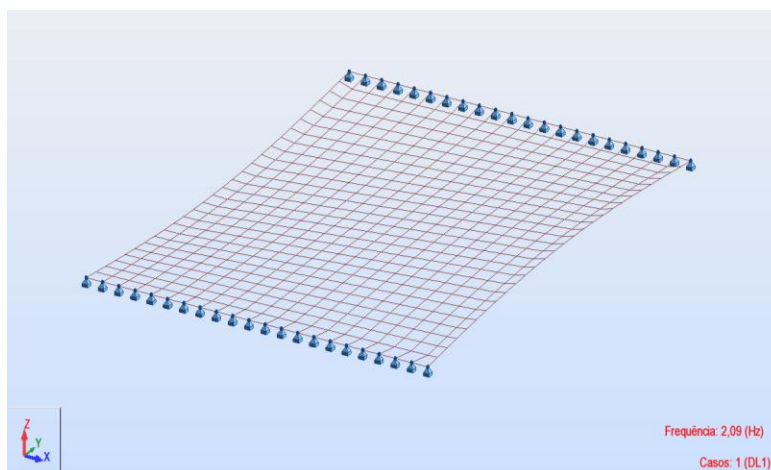


$f_3 = 12,77 \text{ Hz}$ – frequência natural para o terceiro modo de vibração

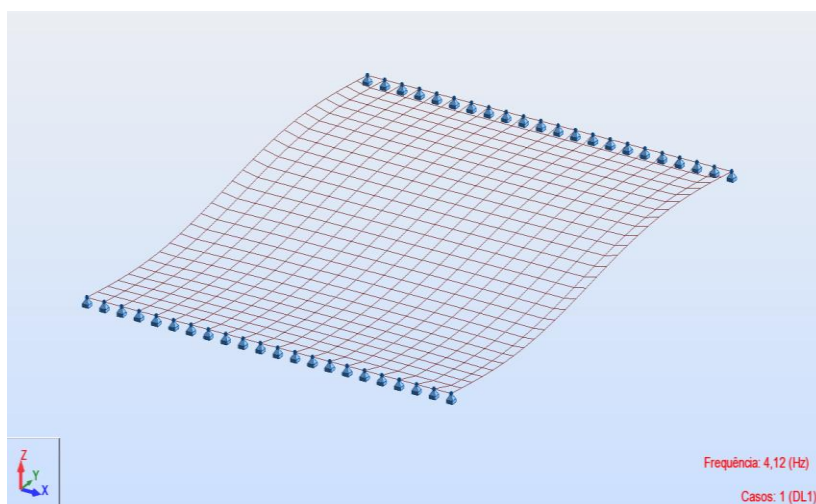
Figura 5.22 - Frequências naturais e modos de vibração para a placa plana modelo EEEE



$f_1 = 1,01 \text{ Hz}$ – frequência natural para o primeiro modo de vibração



$f_2 = 2,09 \text{ Hz}$ – frequência natural para o segundo modo de vibração



$f_3 = 4,12 \text{ Hz}$ – frequência natural para o terceiro modo de vibração

Figura 5.23 - Frequências naturais e modos de vibração para a placa plana modelo SASALL.

Uma comparação entre as frequências naturais da casca com $H_h=1,50\text{m}$ e da placa plana é apresentada na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 - Comparação entre as frequências naturais em Hz para a placa e para a casca.

	<i>Modelo EEEE</i>			<i>Modelo SASALL</i>		
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>
<i>Placa Plana</i>	5,40	9,07	12,77	1,01	2,09	4,12
<i>Casca Conoidal</i>	20,42	21,57	29,41	3,11	6,11	7,77

Nota-se, no caso da casca conoidal, que as frequências naturais são bastante superiores, tanto para o modelo mais rígido, quanto para o modelo mais flexível. Sendo assim, podemos concluir que, para qualquer condição de contorno apresentada, a curvatura da casca oferece à estrutura um significativo aumento na rigidez, sendo estas estruturas curvas mais apropriadas a coberturas que vençam grandes vãos, diminuindo a probabilidade de amplitudes de vibração significativas por cargas ambientais.

Percebe-se, também, que as cascas são estruturas sensíveis, pois suas características e comportamento estrutural variam bastante com as condições de contorno e a relação entre as suas próprias dimensões.