4 Esforços em Cascas Conoidais

Uma das principais vantagens do emprego de cascas esbeltas em engenharia e arquitetura é a sua capacidade de resistir às cargas aplicadas principalmente através de esforços de membrana, o que leva a estruturas com grande rigidez, mas bastante esbeltas. Para se obter um comportamento puramente de membrana, condições de contorno tipo diafragma devem ser consideradas. Estes apoios são, entretanto, de difícil execução. A presença de outros tipos de apoio leva ao surgimento de esforços de flexão. Em geral, dependendo da geometria e do carregamento, estes esforços de flexão ficam restritos à região próxima às bordas da casca (*boundary layer*) (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959; Novozhilov, 1964; Kraus, 1967). Assim o primeiro passo na análise da casca conoidal é estudar a distribuição de esforços na casca quando submetida a um carregamento gravitacional.

Neste capítulo, procede-se à análise dos principais esforços solicitantes da casca conoidal através dos resultados obtidos com o programa *Autodesk ROBOT Structural Analysis Professional 2014*, comparando:

 modelos com diferentes condições de contorno, ou seja, cascas mais ou menos rígidas;

 modelos com diferentes curvaturas, ou seja, cascas mais ou menos abatidas; e

iii) modelos com diferentes dimensões.

Consideram-se como principais esforços solicitantes os momentos fletores (M_{xx}, M_{yy}) ; o momento torsor (M_{xy}) ; as forças cortantes (Q_{xx}, Q_{yy}, N_{xy}) ; e as forças normais (N_{xx}, N_{yy}) . Através da observação dos resultados, pode-se verificar como os esforços se distribuem e onde se concentram os maiores esforços neste

tipo de estrutura. Esta análise é relevante para os projetistas de cálculo estrutural, principalmente quando consideramos grandes vãos a vencer.

Adota-se, como referência, uma casca de concreto com 6,0 cm de espessura, módulo de elasticidade E=14.000 MPa, coeficiente de Poisson v= 0,30 e peso específico ρ = 25 kN/m³. As dimensões da casca (projeção no plano XY) são a= 6 m e 2b= 8 m (ver Figura 4.1 abaixo). A altura do arco de parábola maior é H_h= 1,50 m, enquanto a altura do arco de parábola menor é H_l= 0,75 m.



Figura 4.1- Geometria da casca conoidal.

Para esta geometria a superfície média da casca é descrita pela equação:

$$z = 0.75 \left(1 - 0.5 \frac{x}{6}\right) \left(1 - \frac{y^2}{4^2}\right) \tag{4.1}$$

Para a geração dos resultados realiza-se uma análise estática, onde a única carga considerada é o peso próprio da casca conoidal.

Para a análise modal da casca conoidal, foram utilizados os seguintes programas:

- 1) Maple 14 para geração da geometria 3D da casca conoidal;
- Microsoft Excel para geração dos gráficos referentes aos esforços; e

 Autodesk ROBOT Structural Analysis Professional 2014 - para análise da casca por elementos finitos.

A geometria da casca conoidal foi primeiramente obtida em 3D no *Maple* 14, conforme mostra a Figura 4.2 abaixo. Esta figura foi salva em formato de arquivo *DXF* e, posteriormente, importada pelo programa ROBOT, onde serviu de base para geração da malha do modelo da casca em elementos finitos. O módulo utilizado do programa foi o *Shell Design*, onde, a partir do desenho de base, foram definidas as bordas da casca (duas parábolas e duas retas) e, depois, foram fornecidas as propriedades do material concreto, conforme indicado na Figura 4.3.



Figura 4.2- Geometria da casca conoidal plotada em 3D no Maple 14.



Figura 4.3 - Propriedades da casca conoidal no ROBOT.

Fez-se inicialmente uma análise de convergência e a malha escolhida para discretização da casca conoidal foi a de 24 x 48 elementos isoparamétricos do tipo Q4.

A Figura 4.4 abaixo mostra o sistema de eixos globais do programa e uma vista superior esquemática da casca, para a qual os resultados são obtidos. Os quatro bordos estão numerados para facilitar a análise paramétrica. Os bordos 1 e 2 correspondem ao bordos retos e os bordos 3 e 4 aos bordos curvos. Usa-se a seguinte nomenclatura para identificar a condição de contorno:

SA – bordo simplesmente apoiado.

E – bordo engastado.

L – bordo livre.



Figura 4.4 - Identificação dos quatro bordos.

4.1. Placa Engastada nos Bordos

Com a finalidade de destacar o comportamento típico de casca, faz-se uma comparação destes resultados com o caso extremo da placa de concreto com as mesmas dimensões da projeção horizontal da casca conoidal e engastada em todos os bordos. A distribuição de esforços obtida é mostrada nas Figuras 4.5 a 4.9. Os resultados são apresentados na forma de mapa de tensões, para melhor visualização da distribuição dos esforços ao longo da superfície da estrutura. Neste caso os esforços de membrana são nulos, sendo os esforços dominantes os momentos fletores M_{xx} e M_{yy} . Os momentos torsores são menores e concentrados nos cantos, como esperado. Os momentos são dados em kN.m/m e os cortantes em kN/m. Mostra-se na legenda de cada figura a faixa de variação do esforço. Considera-se o momento como positivo quando a tração ocorre na face superior da placa.

30					9 70					0.00		10	MXX (k Direçã máx: 3 mín: -1	Nm/m) o X ,79 ,81	
0,19	0,56	1,01 1,4	13 1,74	1,93	1,99	1,91	1,70	1,37	0,94	0,92	0,15			L	
	0,20	0,33 0,4	19 0,64	0,73	0,75	0,72	0,61	0,47	0,31	0,18	0.	28		L	
0,10	-0,20	-0.40	-0.51	-0.55	-0,38	-0.55	-0,50	-0,38	в -0.	16	0,	15		L	
0,09	-0,36	-0,74	-0,98	-1,11	-1,02	-1,10	-0,96	-0,70	0 -0,	29	0,	51		L	
0,10	-0,46	-0,96	-1,30	-1,48	-1,45	-1,46	-1,26	-0,90	D -0,	37	0.	74		F	
	-0,41	-1,01	-1,42	-1,67	-1,71	-1,67	-1,42	-1,0	1 -0,	41	0.	32		L	
	-0,42	-1,04	-1,47	-1,72	-1,81	-1,72	-1,47	-1.04	4 -0,	42	o	92		L	
0,11	-0,50	-1,06	-1,44	-1,65	-1,71	-1,63	-1,39	-0,9	9 -0,	41	0,	32		L	
0,10	-0,44	-0,92	-1,23	-1,40	-1,45	-1,39	-1,20	-0,86	6 -0,	36	0.00	24		L	0
	-0,27	-0,29	-0,86	-0,98	-1,02	-0,99	-0,88	-0,87	-0,3. 8 -0,	11	0,09 0.	45		L	
0,10	0.20	0.33 04	19 0.64	0.73	0.75	0.72	0.61	0.47	0.31	0.18	о,	28		F	-
0,15	0,49	0,94 1,37	1.70	1,91	1,99	1,93	1,74	1,43 1	1,01 0	0,56	0,19			F	
10	0,92	1,82 2,58	1 3,12	3,45	3,79	3,45	3,12	2,58	1,82	0,92	-0	10		F	

Figura 4.5 - Momento Fletor *M*_{xx}[-1,81 ; +3,79] kN.m/m.

_																	MYY (k Direçã máx: 3 mín: -1	Nm/m) o X ,05 I,18	
-0 <mark>,0</mark> 0		0,19-(0 <mark>,37 0,5</mark> 4	0,70	0,83-0,	93 1,0	1 1,05	1,14	1,05	1,01 0	,93 0,8	3 0,70	0,54 0) ,37 0,	9	-0,0 0			
0.36	0.24		0,23 0,32	0,41	0,50 0,	57 0,6	3 0,66	0,67 (0,67 0	,64 0,5	9 0,52	0,44	0,34 0,1	25 0,17	0.24	0.36		-	3,05
0,77	0,42	0,17	0,12 0,1	3 0,16	0,21	0,25 0, ~	,28 0,30	0,31	0,30	0,27 0	,24 0,20	0 0,15	0,12	0,18	0,42	0,77			0.70
1,22	0,62	0,19	0,03 -0,0	0.07	0,0- 8		-0,24	-0,23	-0	0,04 -0	,25	0,08	-0,13	0,23	0,62	1,22			2,70
1,66	0,84	0,25	-0,13	-0,27	-0,32	-0,34	-0,	51	-0,33	-0,50	-0,48	-0,29	-0,19	0,29	0,84	1,66		-	2,35
2, <mark>06</mark>	1,05	0,31	-0,21	-0,43	-0,54	-0,50	-0,73	-0,74	-0,59	-0,71	-0,66	-0,43	-0,26	0,36	1,05	2,06			1 99
2, <mark>38</mark>	1,22	0,00	-0.40	-0.71	-0.86	-0,89	-0,92	-0,92	-0.96	-0,88	-0,80	-0.66	-0,31	0,42	1,22	2,38			.,
2,6 <mark>3</mark>	1,36	0,49	-0,35	-0,73	-0,93	-1,02	-1,05	-1,06		-1,05	-0,93	-0,78	-0,34	0,48	1,36	2,63		-	1,64
2, <mark>78</mark>	1,45	0,52	-0,36	-0,77	-0,99	-1,08	-1,13	-1,15	-1,14	-1,11	-1,00	-0,82	-0,46	0,51	1,45	2,78		F	1,29
3 <mark>,05</mark>	1,49	0,53	-0,47	-0,83	-1,03	-1,13	-1,17	-1,18	-1,17	-1,13	-1,03	-0,83	-0,47	0,53	1,49	<mark>3,0</mark> 5			
2,7 <mark>8</mark>	1,47	0 <mark>,</mark> 51	-0,36	-0,76	-0,97	-1,11	-1,15		-1,15	-1,10	-1,02	-0,81	-0,46	0,52	1,47	2,78		-	0,93
2, <mark>63</mark>	1,40	0,48	-0,34	-0,71	-0,91	-1,04	-1,08	-1,09	-1,09	-1,02	-0,96	-0,76	-0,44	0,49	1,40	2,63		-	0,58
2,3 <mark>8</mark>	1,27	0,42	-0,31	-0,63	-0,80	-0,93	-0,96	-0,98	-0,97	-0,89	-0,86	-0,67	-0,40	0,44	1,27	<mark>2,</mark> 38			
2,0 <mark>6</mark>	1,11	0,36	-0,32	-0,56	-0,67	-0,78	-0,80	-0,81	-0,73		-0,73	-0,56	-0,35	0,38	1,11	2,06			0,23
1,6 <mark>6</mark>	0,91	0,29	-0,24	-0,41	-0,48	-0,58	-0,59	-0,59	-0,51	-0,58	-0,47	-0,38	-0,21	0,31	0,91	1,66		-	-0,12
1,22	0,70	0,23	-0,13	-0,22	-0,25	-0,34	-0,33	-0,55	-0,24	-0,34	-0,25	-0,21	-0,13	0,25	0,70	1,22			-0.48
0.77	0,40	0,18	0 12 0 1	-0,00 3 0.16	0.21	-0,05	28 0.30	-0,03	0.30	-0,00	24 0.2	-0,00	0.12	0,18	0,40	0,77			-0,40
0,3 <mark>6</mark>	0.15	0 17	0.25 0.3	4 0 44	0.52	0.59 0	64 0.67	7 0 67	0,50	0.63 0	57 0.5	0,15	0.32 (23 01	6	0,36		-	-0,83
-0,00	0,10	0.19	0.37 0.54	0.70	0.83 0.	93 1.0	1 1.05	1 1 1	1.05	1.01 0	.93 0.8	3 0.70	0.54	.37 0.1	9	-0,00			-1,18
								1,14											

Figura 4.6 - Momento Fletor M_{yy} . [-1,18 ; +3,05] kN.m/m.



	MXY (kNm/m) Direção X máx: 0,55 mín: -0,55
00 <u>05_004_003_002_001_000_001_002_003_004_005_005_</u> 0D	0
	- 0,
0,19 -0,38 -0,42 -0,42 -0,34 -0,25 -0,15 -0,05 0,07 0,15 0,23 0,30 0,38 0,44 0,42 0,40 0,29	
-0,23 -0,46 -0,52 -0,50 -0,41 -0,30 -0,18 -0,06 0,06 0,15 0,25 0,34 0,43 0,50 0,52 0,48 0,35 0,00	— o ,
-0,31 -0,51 -0,55 -0.52 -0.43 -0.31 -0.19 -0.06 0.06 0.16 0.26 0.36 0.45 0.52 0,55 0.51 0.36	
-0,29 -0,49 -0.52 -0.48 -0.39 -0.28 -0.16 -0.04 0.05 0.16 0.25 0.35 0.43 0.49 0.52 0.49 0.39 0.14	– o,
-0.20 -0.35 -0.2 -0.37 -0.23 -0.14 -0.03 0.14 0.22 0.30 0.37 0.43 0.42 0.28 0.10	
-0,35 -0,33 -0,27 -0,20 -0,11 -0,03 0,04 0,11 0,18 0,24 0,30 0,34 0,35 0,33 -0.14 -0.25 0,20 -0,11 -0,03 0,04 0,11 0,18 0,24 0,30 0,34 0,35 0,33	- o,
0.08 0.14 0.02 -0.22 -0.18 -0.13 -0.08 -0.02 0.03 0.08 0.12 0.16 0.20 0.23 0.24 0.22 0.11 0.04	
-0,00 0,14 -0,11 -0,10 -0,09 -0,06 -0,04 -0,01 0,01 0,04 0,06 0,08 0,09 0,11 0,11 0,10 0,11 0,04	• •.
0 0,01 ^{-0,02} -0,02 ^{0,01} -0,00	
04 0,11 0,11 0,11 0,09 0,08 0,06 0,04 0,01 -0,01 -0,04 -0,06 -0,09 -0,10 -0,11 -0,14 -0,08	
07 0,20 0,22 0,24 0,23 0,20 0,16 0,12 0,08 0,03 -0,02 -0,08 -0,13 -0,18 -0,22 -0,24 -0,25 -0,14	-0,
10 028 0.33 0.35 0.34 0.30 0.24 0.18 0.11 0.04 -0.03 -0.11 -0.20 -0.27 -0.33 -0.35 -0.35 -0.20	
12 034 042 045 043 037 030 022 014 0.05 -0.03 -0.14 -0.25 -0.34 -0.42 -0.45 -0.43 -0.25	
4 0.20 0.49 0.52 0.49 0.43 0.35 0.25 0.16 0.06 -0.04 -0.16 -0.28 -0.39 -0.48 -0.52	
-0,49 -0,29 -0,29 -0,49 -0,29 -0,49 -0,29 -	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
6 0,56 0,51 0,55 0,51 -0,51 -0,51 -0,31 -0,50 -0,51 -0,31 -0,50 -0,51 -0,31 -0,50 -0,51 -0,31 -0,50	-0,
4 0.29 0.40 0.42 0.44 0.36 0.30 0.25 0.15 0.07 -0.05 -0.15 -0.25 -0.34 -0.42 -0.42 -0.38 -0.19	-0,
0,22 0,24 0,19 0,14 0,09 0,04 -0,03 -0,09 -0,16 -0,22 -0,28 -0,24 -0,21	
0,0	0

Figura 4.7 - Momento Torsor *M*_{xy}[-0,55 ; +0,55] kN.m/m.



Figura 4.8 - Esforço Cortante Q_{xx} [-4,41 ; +4,41] kN/m.



0 37	0,64	0,97	0,75	0,65 (),53 0,4	0 0,27	0,14 0,0	2 -0,14	4 -0,30	-0,46	-0,62	-0,7	5 -0 ,	97 _{-0,}	64	-0.37	QYY (Direçâ máx: 4 mín: -	kN/m) áo X 4,02	
-0,20	-0.28	0,3	4 0,38	0,36	0,31 0),24 0,1	6 0,07	-0,07	-0,18	0,27	-0,35	-0,38	-0,3	1 -0,	, ¹⁰ 0,	24			
-1,02	-0.77	-0.37	-0.10	0,15 (0,17 0,1	15 0,11	0,06	-0,02 -0),09 -0,1	4 -0,1	7 -0	.14	0.24	0,37	0,69	1,02		F	4,02
-1,81	-1,26	-0,72	-0,36	-0,15	0,04 -0,04	0,05 0,	,04 0,02	.0,0	0,05	-0,03	0,09	0,23	0,55	0,78	1,22	1,81		F	3,50
- <mark>2,4</mark> 8	-1,70	-1,03	-0,59	-0,30	-0,14	-0,06	-0,02	0.01	0,02 0,0	8 0,13	0,25	0,45	0,83	1,16	1,72	2,48			
-3,03	-2,07	-1,30	-0,78	-0,44	-0,23	-0,11	-0,04	0,03	^{0,06} 0,1	5 ^{0,23}	0,40	0,64	1,07	1,48	2,14	3.03			2,80
-3,45	-2,36	-1,51	-0,93	-0,55	-0,30	-0,15	-0,06	0,04	0,10 0,2	0,32	0,51	0,80	1,25	1,74	2,48	3,45		╞	2,10
-3,76	-2,57	-1,67	-1,04	-0,62	-0,35	-0,18	-0,07	0,06	0,13 0,2	4 0,38	0,60	0,91	1,39	1,94	2,73	3,76		F	1,40
-3,94	- <mark>2</mark> ,69	-1,76	-1,11	-0,67	-0,38	-0,20	-0,08	0,06	0,14 0,2	6 0,42	0,66	0,99	1 <mark>,</mark> 47	2,06	2,88	3,94			0.70
-4,02	-2,95	-1,94	1,23	-0,75	-0,44	-0,23	-0,10 -0,0	01 0,06	0,15 0,2	7 0,44	0,68	1,02	1,49	2,11	2,95	4,02		Γ	0,70
-3,94	<mark>-2</mark> ,66	-1,73	-1,09	-0,66	-0,37	-0,19	-0,08	0,06	0,15 0,2	6 0,43	0,67	1,00	1,45	2,09	2,91	<mark>3,</mark> 94		F	0,0
-3,76	-2,51	-1,62	-1,01	-0,60	-0,34	-0,17	-0,07	0,05	0,13 0,2	3 0,40	0,62	0,94	1,35	1,99	2,79	3,76		F	-0,70
-3,45	-2,28	-1,45	-0,89	-0,51	-0,28	-0,14	-0,05	0,04	0,11 0,1	9 0,34	0,55	0,04	1,20	1,02	2,57	3,45			
-3,03	-1,96	-1,22	-0,72	-0,40	-0,20	-0,09	-0,03	0,02	0,00 0,1	3 0,20	0,44	0.52	0,99	1.30	1.87	3,03			-1,40
-2,48	-1,56	-0,93	-0,51	-0,25	-0,11	-0,04	-0,01 0,0	0,01	0,01 0,0	6 0.05	0.15	0.31	0,74	0.91	1.39	2,48		F	-2,10
-1.81	-1,10	-0,61	-0,28	-0,09	0,04	0,05 0,	,04 0,02	-0,0	04 -0,05	-0,03		-,	0,45	0.51	0.87	1,81		F	-2,80
-1.02	-0,61	-0,24	0,08	0,15 (0,17 0,1	15 0,11	0,06	-0,02 -0),09 -0,1	4 -0,1	7 -0	,14	0,13	·	0,34	1,02			0.50
-0	.24 0	,20 0,3	4 0,38	0,36	0,31 0),24 0,1	6 0,07	-0,07	-0,18	0,27	-0,35	-0,38	-0,3	1		0,20			-3,50
0,37	0,64	0,97	0,75	0,65 (0,53 0,4	0 0,27	0,14 0,0	20,14	-0,30	-0,46	-0,62	-0,7	⁵ -0,	97 ⁻⁰	64	-0,37		F	-4,02
_																			

Figura 4.9 - Esforço Cortante Q_{yy} [-4,02 ; +4,02] kN.m/m.

4.2. Casca Conoidal com Diferentes Condições de Contorno

4.2.1. Modelo mais rígido – caso EEEE – engaste nos quatro bordos

A distribuição dos esforços na casca conoidal é mostrada na Figura 4.10. O bordo de cima do mapa corresponde ao bordo curvo de menor curvatura e o bordo inferior, ao de maior curvatura. Para visualizar a variação dos esforços ao longo dos eixos x e y adotam-se dois cortes, A-A1 e A-A2, como ilustrado na Figura 4.11. Os diagramas relativos a estes cortes são apresentados na Figura 4.12.



(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,08 ; +0,23] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,05 ; +0,13] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-3,20 ; +2,45] kN/m.

(d) Esforço Cortante $\mathsf{Q}_{yy}[\text{-}2,39\ ;\ \text{+}2,39]\ \text{kN/m}.$

(e) Esforço Normal N_{xx} [-4,87 ; +1,55] kN/m.

(f) Esforço Normal *N*_{yy}[-13,42 ; +0,34] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-2,84 ; +2,84] kN/m.

Figura 4.10 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Caso EEEE.

Figura 4.11 - Definição dos cortes A-A1 e A-A2.

(d) Esforço Cortante Q_{yy}

⁽f) Esforço Normal Nyy

(g) Esforço Cisalhante N_{xy}

(h) Momento Torsor M_{xy}

Figura 4.12 - Cortes A-A1 e A-A2, mostrando a variação dos esforços na casca – Caso EEEE.

Analisando os momentos fletores M_{xx} e M_{yy} para este modelo, onde os bordos são todos engastados, percebe-se que os momentos no centro da casca são praticamente nulos, concentrando-se na faixa próxima ao apoio, em particular próximo aos dois apoios curvos, onde se observa um crescimento bem acentuado dos esforços (ver corte A-A2), havendo uma ligeira tendência de esforços maiores no bordo onde a curvatura do arco é menor. Os esforços cortantes Q_{xx} e Q_{yy} , como mostram as equações (2.11), são obtidos a partir das derivadas dos momentos, estando, portanto, os esforços máximos concentrados nos bordos. Os esforços de torção são bem pequenos, variando de forma suave ao longo da casca. No meio da casca praticamente não há esforços de flexão e torção. Pode-se perceber também, tomando o eixo A-A2, a perfeita simetria na distribuição dos momentos fletores; e assimetria na distribuição dos esforços de momento torsor e cortante.

Analisando os esforços de membrana, N_{xx} e N_{yy} , percebe-se que estes são predominantes em relação aos esforços de flexão e torção. Ambos os esforços sofrem pequena variação ao longo do eixo curvo, enquanto que ao longo da geratriz o esforço N_{xx} apresenta uma concentração no meio do vão, decrescendo junto aos bordos. O esforço N_{yy} tem uma variação quase linear, atingindo um máximo no bordo de menor curvatura, e sofre uma inversão de valor no bordo de maior curvatura. Com relação ao esforço N_{xy} , a concentração se dá próxima aos cantos e é ligeiramente maior do lado mais alto da casca. No meio do vão, este esforço é bastante reduzido.

O que podemos concluir até aqui é que a geometria curva e esbelta da casca conoidal apresenta um comportamento estrutural de membrana, onde há predominância de esforços normais. Também podemos observar que, quanto mais curvo o bordo da casca conoidal, menores são os esforços de flexão.

4.2.2. Caso SASALL – casca simplesmente apoiada nos bordos retos e livre nos bordos curvos – restrições assimétricas

Neste caso considera-se a casca simplesmente apoiada ao longo dos dois bordos retos, e livre ao longo dos dois bordos curvos. Quanto às restrições nos apoios retos, utiliza-se dois tipos de apoio, de primeiro gênero no bordo esquerdo e de segundo gênero para o bordo direito, criando assim uma pequena assimetria nesta direção. No próximo item obtêm-se os resultados para os dois bordos modelados como apoios de segundo gênero. O objetivo é analisar a influência das duas modelagens na distribuição de esforços.

(a) Momento Fletor M_{xx}[-0,02; +0,02] kN.m/m.

(a) Momento Fletor M_{yy} [-0,08 ; +0,07] kN.m/m.

	<mark>0,<u>15 0,02</u> </mark>	0,10	-0,02 04 0,11 0,05	0,32 0,10	QXX (kN/m) Direção automática máx: 0,36 mín: -0,62	
		0,08 0, <mark>0</mark> 8 9.	-0,02 0,04 0,06	-0,09	-	0,36
	-0,07	-0,0 <mark>9 0,0</mark> 7 -0,0 <mark>5</mark>	0,05 -0,0	08	-	0,28
	<mark>-0,10</mark>	-0,1 <mark>0 -0,08 -0,05</mark>	-0,08			0,20
	<mark>⊶0,</mark> 11	-0, <mark>11 -0,09 -0,05</mark>	-0,08	0.03	_	0,03
	<mark>⊶0,14</mark> -0,05	-0,10 -0,11 0, <mark>1</mark> 0 _{-0,0}	-0,09	0.03	-	-0,05
	⊶ <mark>0,</mark> 15 -0,06	-0,09 - <mark>0,12</mark> - <mark>0,08</mark> -0	0,00 -0,10 -0,06	-0.04	-	-0,13
	<mark>⊶0,</mark> 14 -0,06	-0,09 -0,12 0.10	- <mark>0,08 -0,11 -0,</mark> 06	-0,01		-0,21
	⊶ <mark>0,</mark> 14	-0,10 0,12 0.10	0,11 -0,05	-0,02 -0.03	-	-0,38
x	⊶0,09 ⊶	-0,05 -0,11	-0,12 -0,05	0 <mark>,10</mark>	-	-0,46
Z Y	─ 0,22 0,10	0, <mark>16 -0,18</mark> -0,19	^{,00} -0,19 0,16	0,07 -0,17		-0,54
			00			-0,62

(b) Esforço Cortante Q_{xx} [-0,62 ; +0,36] kN/m.

	0,79 0,58 075 0 58 -0,62 -0,63 -0,70 0	0,65 0,71 1,08 0,65 0,61 1,08	QYY (kN/m) Direção automática máx: 1,20 mín: -1,51
	-0,64 -0,63 0 -0,64 0,47 0,38 -0,63 -0,56	0,58 0,63 0,65 0,61 -0,69 0,64 -0,41 -0,67	- 1,21
	-0,59	-0,40 -0,66	- 0,75
	-0,58	-0,65 -0,35	- 0.25
	← 0,67 -0,59 -0,70 ← 0,68 -0,66 -0,72	0, <mark>69</mark> -0,51 0.71 0.64 -0.64	0,25
	0,700,67 -0,74	0,72 0,69 -0,45 -0,64	0,75
×	 ↔ 93 0,54 -0,67 -0,76 -0,73 ↔ 98 -0,58 -0,76 -0,80 -0,74 	0,68 0,75 0,70 0,52 -0,64 0,74 0,81 0,74 -0,51 -0,71	1,25
Z_Y	0,95 -0,78 -0,94 -0,88	0,76 0,95 0,87 -0,56 -0,91	1,50

(c) Esforço Cortante Q_{yy} [-1,51 ; +1,20] kN/m.

(d) Esforço Normal N_{xx} [-7,33 ; +2,55] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{yy} [-24,38 ; -7,18] kN/m.

(f) Esforço Cisalhante N_{xy} [-6,89 ; 6,84] kN/m.

(g) Momento Torsor *M*_{xy} [-0,02 ; 0,01] kN.m/m.

Figura 4.13 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Caso SASALL (Assimétrico).

(g) Esforço Cisalhante N_{xy}

(h) Momento Torsor M_{xy}

Figura 4.14 - Cortes A-A1 e A-A2, mostrando a variação dos esforços na casca – Caso SASALL (Assimétrico).

Neste modelo, os esforços de flexão M_{xx} e M_{yy} também são de baixa magnitude, sendo nulos ao longo dos quatro bordos. Ao longo do eixo curvo os momentos variam de forma suave, com tração na parte superior no meio da casca e tração na parte inferior nas faixas próximas aos apoios. Na direção da geratriz há pouca variação, ocorrendo o esforço máximo próximo ao bordo livre de maior curvatura. Os esforços de torção são praticamente nulos para estas condições de contorno da casca conoidal. Nota-se uma concentração no canto superior esquerdo da casca, ou seja, no encontro do bordo livre de menor curvatura com o bordo rotulado. Os esforços cortantes, em ambas as direções são de baixa magnitude para esta condição de contorno e possuem uma distribuição praticamente uniforme ao longo da placa, com sutil concentração nas faixas dos bordos retilíneos da casca conoidal.

Para esta condição de contorno, o esforço de membrana N_{xx} varia bastante ao longo do eixo curvo (ver corte A-A1) atingindo um valor máximo junto ao bordo rotulado. Isto mostra a influência da assimetria dos apoios nos esforços de membrana. O esforço de membrana N_{yy} varia muito pouco ao longo da superfície da casca. A variação de N_{xy} e M_{xy} também mostram a influência da assimetria nas condições de contorno, sendo ambos de pequena magnitude.

4.2.3. Caso SASALL – simplesmente apoiada nos bordos retos e livre nos bordos curvos – apoios simétricos

Este modelo foi gerado para comparação com o modelo do item 4.2.2, mostrando a influência da simetria das restrições dos apoios na distribuição dos esforços, quando utilizamos o apoio rotulado para ambos os bordos. Nota-se a perfeita simetria nos esforços solicitantes quando se impõe a simetria nas condições de contorno. Comparando os modelos apresentados em 4.2.2 e 4.2.3, pode-se perceber que os valores extremos são praticamente idênticos.

(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,02 ; 0,02] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,06 ; 0,07] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-0,55 ; 0,26] kN/m.

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-1,43 ; 1,43] kN/m.

(e) Esforço Normal *N_{xx}*[-7,51 ; 2,58] kN/m.

(f) Esforço Normal *N*_{yy}[-25,01 ; -7,23] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-6,91 ; 6,91] kN/m.

(h) Momento Torsor M_{xy} [-0,01 ; 0,01] kN.m/m.

4.2.4. Caso SASASASA – casca simplesmente apoiada nos quatro bordos

Considera-se agora a casca conoidal com os quatro bordos simplesmente apoiados.

(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,10 ; 0,01] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,06 ; 0,01] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-2,07 ; 1,71] kN/m.

	-2 <mark>15 0.66</mark>	QYY (kt/im) Direção automática máx: 2,15 mín: -2,15
	0,58 -0,57 0,57	- 2,17
	-0,67 -0,57 -0,57 -0,55 0,55 0,57 0,57 -0,67 -0,54 -0,54	- 2,00
	-0.46 -0.53 0.48 -0.48 0.53 0.46	- 1,60
	0.52 0.48 0.52	- 1,20
		- 0,80
		- 0,40
	-0,56 0,45 0,51 -0,45 0,56	- 0,0
	-0,49 0,57 0,49 -0,49 0,57	0,40
	- 0.44 0.51 0.56 -0.56 -0.51 -0.44	0,80
	0,57 0,48 0,53 0,58 0,60 -0,58 -0,53 -0,48 -0,57	1,20
×	-0,81 0,55 0,48 0,49 -0,49 -0,48 -0,55 -0,81	-2.00
Z_Y	-0,15 0,15	2.17

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-2,15 ; 2,15] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx} [-7,65 ; 2,32] kN/m.

(f) Esforço Normal *N*_{yy}[-14,41 ; 6,37] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-5,97 ; 5,97] kN/m.

(h) Momento Torsor M_{xy} [-0,06 ; 0,06] kN.m/m.

Figura 4.16 - Distribuição dos esforços na casca conoidal - Caso SASASASA.

Comparando a distribuição dos esforços solicitantes de flexão e de membrana da casca conoidal com os quatro bordos simplesmente apoiados com o modelo com todos os bordos engastados, podemos verificar a estreita similaridade entre os mapas de esforços. As magnitudes de esforços de flexão no modelo engastado são, como esperados, superiores ao da casca simplesmente, onde os momentos são praticamente nulos. Por outro lado os esforços de membrana no modelo mais rígido são um pouco menores que no modelo onde o apoio é mais flexível.

(a) Momento Fletor *M_{xx}* [-0,01 ; 0,03] kN.m/m.

(b) Momento Fletor *M*_{yy} [-0,04 ; 0,10] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-0,19; 0,21] kN/m.

	1.04 0.71 1.72 -0.56 -0.57 -0.65 0.82 0.59	-0,71 -1,04 0,65 0,57 0,56 -1,72 -0,59 -0,82	QYY (kW/m) Direção automática máx: 1,72 mín: -1,72
	-0,55 -0,56 0,90 0,61 0,50	0,56 0,55 -0,50 -0,61 -0,90	- 1.74
	-0,51	0,51	- 1,50
	0,06 -0,51	0,51	- 1,20
	0,06 0,69 -0,52	0,52 -0,69	0.50
	0,68 -0,56	0,56 -0,68	_ 0,30
	0,68 -0,56	0,56 -0,68	- 0,0
	0,68 0,50 -0,60	0,60 -0,50 -0,68	-0,30
	0,69 -0,56 -0,63	0,63 0,56 -0,69	0,60
	0,79 0,63 -0,63 -0,67	0,67 0,63 -0,63 -0,79	0,90
×	0.85 0.68 -0.68 -0.72	0,72 0,68 -0,68 -0,85	1,20
Z-Y	0,97 0,75 -0,68 -0,84 -0,72	0,72 0,84 0,68 -0,75 -0,97	1.50

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-1,72 ; 1,72] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx} [-7,58 ; 2,60] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-6,92 ; 6,92] kN/m.

Figura 4.17 - Distribuição dos esforços na casca conoidal - caso EELL.

Comparando a distribuição dos esforços solicitantes de flexão e de membrana da casca conoidal para o modelo EELL com o modelo menos rígido SASALL simétrico, percebe-se que os resultados são praticamente idênticos, inclusive a magnitude dos esforços não sofre grande influência quando se muda a rigidez dos apoios ao longo dos bordos retos. Quanto aos esforços cortantes, percebemos a mesma distribuição que no modelo SASALL, a única diferença é uma maior magnitude no esforço cortante na direção y.

A Tabela 4.1 apresenta para cada conjunto de condições de contorno os esforços máximos em valor absoluto, sendo estes comparados com aqueles obtidos para a placa. Verifica-se, em todos os casos, que os esforços de flexão na casca são bem menores que aqueles obtidos para a placa, enfatizando a importância da curvatura inicial da casca na redução dos momentos, o que permite obter estruturas mais leves e esbeltas para grandes vãos. O esforço de membrana N_{xx} sofre pequena variação, atingindo o valor mínimo para a casca engastada. Observa-se que o esforço dominante nesta estrutura é o esforço normal N_{yy} , que atinge o maior valor para o caso EELL. Por exemplo, neste caso verifica-se que $N_{yy} / N_{xx} = 3,34$. O esforço N_{xy} é da mesma ordem de grandeza que N_{xx} .

Tabela 4.1 - Influência das condições de contorno da casca conoidal nos esforços solicitantes máximos.

СС	M_{xx}	M_{yy}	M_{xy}	N_{xx}	N_{yy}	N_{xy}	Q_{xx}	Q_{yy}
	(kNm/m)	(kNm/m)	(kNm/m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)
SASALL	0,02	0,07	0,01	7,51	25,01	6,91	0,26	1,43
EEEE	0,23	0,13	0,03	4,87	13,42	2,84	3,20	2,39
SASASASA	0,01	0,06	0,06	7,66	14,41	5,97	2,07	2,15
EELL	0,03	0,10	0,01	7,58	25,35	6,92	0,21	1,72
Placa	3,79	3,05	0,55	-	-	-	4,41	4,02
(EEEE)								

4.3. Modelos com diferentes curvaturas

Sendo a curvatura uma das principais características das cascas, estuda-se neste item a influência da curvatura na distribuição e magnitude dos esforços. Foram gerados modelos com a variação da curvatura (parâmetros H_h e H_l) da casca conoidal. De posse do modelo inicial da casca conoidal em EF, foram variados os parâmetros das alturas dos arcos de parábola, H_h (altura do arco da parábola maior) e H_l (altura do arco da parábola menor), para mais e para menos, e investigada a influência destas variações no comportamento dos esforços solicitantes da casca.

No modelo estudado no item anterior adotou-se $H_h = 1,50$ m e $H_l = 0,75$ m. São aqui gerando mais quatro modelos, dois com alturas menores e dois com alturas maiores, utilizando o incremento de 0,5 m, para mais e para menos no parâmetro H_h , mantendo $H_h/H_l = 2$, ou seja: $H_h = 2,50$ m; $H_h = 2,00$ m; $H_h = 1,00$ m; e $H_h = 0,50$ m. Considera-se em todos os casos os quatro bordos engastados (EEEE). Os resultados para as quatro geometrias adicionais são apresentados nas Figuras 4.18 a 4.21. Um resumo dos esforços máximos em valor absoluto é apresentado na Tabela 4.2.

(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,21 ; 0,79] kN.m/m.

(b) Momento Fletor *M*_{yy} [-0,12 ; 0,39] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-4,70 ; 6,44] kN/m.

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-4,14 ; 4,14] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx}[-10,53 ; 2,68] kN/m.

(f) Esforço Normal N_{yy} [-35,10 ; 1,07] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-6,05 ; 6,05] kN/m.

(h) Momento Torsor M_{xy} [-0,09 ; 0,09] kN.m/m.

(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,11 ; 0,37] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,07 ; 0,19] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-3,19 ; 3,96] kN/m.

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-2,91 ; 2,91] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx} [-6,32 ; 1,84] kN/m.

(f) Esforço Normal N_{yy} [-19,28 ; 0,62] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-3,62 ; 3,62] kN/m.

Figura 4.19 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Curvatura H_h = 1,00 m.

(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,06 ; 0,16] kN.m/m.

(b) Momento Fletor *M*_{yy}[-0,04 ; 0,10] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-0,01 ; 0,01] kN/m.

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-2,08 ; 2,08] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx} [-4,38 ; 1,40] kN/m.

(f) Esforço Normal N_{yy} [-10,32 ; 0,34] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-2,60 ; 2,60] kN/m.

(h) Momento Torsor M_{xy} [-0,02 ; 0,02] kN.m/m.

Figura 4.20 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Curvatura H_h= 2,00 m.

(a) Momento Fletor M_{xx} [-0,05 ; 0,12] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,04 ; 0,10] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-1,68 ; 2,50] kN/m.

0,26 -0,26	QYY (kN/m) Direção automática máx: 2,40 mín: -2,08
-2 <mark>.08</mark> 0,49 -0,48 2,4	- 2,43
0,57 0,55 0,52 0,13 0,13 0,52 -0,55 -0,57 -0,57 0,61	- 2,00
-0,44 0,47	- 1,00
-0,39 0,39	- 0,80
0,22	- 0,40
	- 0,0
-0,48 0,48 -0,16	0,40
-0,68 0,52 -0,47 -0,50 0,49 0,47 -0,52 -0,49 0,40 0,51 -0,17	
0,52 0,53 -0,53 -0,52 -0,19	1,60
0,25 -0,26	2.00
	2,08

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-2,08 ; 2,40] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx} [-4,14 ; 1,34] kN/m.

(f) Esforço Normal N_{yy} [-9,08 ; 0,36] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy}[-2,54 ; 2,55] kN/m.

(h) Momento Torsor *M*_{xy}[-0,02 ; 0,02] kN.m/m.

Figura 4.21 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Curvatura H_h = 2,50 m.

$H_{h}(m)$	M_{xx}	M _{yy}	M_{xy}	N_{xx}	N_{yy}	N_{xy}	Q_{xx}	Q_{yy}
	(kNm/m)	(kNm/m)	(kNm/m)	(<i>kN/m</i>)	(<i>kN/m</i>)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)
0,5	0,79	0,39	0,09	10,53	35,10	6,05	6,44	4,14
1,0	0,37	0,19	0,05	6,26	19,28	3,62	3,96	2,91
1,5	0,23	0,13	0,03	4,87	13,42	2,84	3,20	2,39
2,0	0,16	0,10	0,02	4,38	10,32	2,60	2,75	2,08
2,5	0,12	0,10	0,02	4,14	9,08	2,55	2,50	2,40
Placa	3,79	3,05	0,55	-	-	-	4,41	4,02

Tabela 4.2 - Influência da curvatura da casca nos valores máximos absolutos dos esforços - caso EEEE.

Analisando a distribuição dos esforços solicitantes na casca conoidal, conforme se varia H_h e, consequentemente, a curvatura, pode-se observar que há uma sensível redistribuição dos esforços solicitantes. Os momentos são em todos os casos bem inferiores que aqueles da placa com mesmas dimensões e material e decrescem à medida que a curvatura cresce, estando os valores máximos localizados nos apoios. Verifica-se também que os esforços de membrana decrescem de forma significativa à medida que a curvatura cresce. Por exemplo, o esforço dominante N_{yy} decresce de 35,10kN/m para uma casca com $H_h=0,5$ m, para 9,08kN/m para uma casca com $H_h=2,5$ m. Cabe ressaltar que, à medida que a curvatura cresce, cresce a área da superfície curva e, consequentemente, o peso próprio da estrutura (vide equação 4.1). Em todos os casos N_{xx} é inferior a N_{yy} decaindo esta diferença à medida que a curvatura aumenta.

4.4. Modelos com Diferentes Dimensões

Considera-se novamente como referência as condições de contorno *EEEE* e investiga-se a influência da variação no comprimento da casca conoidal no comportamento dos esforços solicitantes. O comprimento do modelo original, item 4.2, é a = 6m. Os comprimentos adicionais adotados são a = 3m; a = 9m; e a = 12m. Para a = 12m o parâmetro H_l se torna zero, e a casca passa a ter três bordos retilíneos (casca conoidal completa). Os resultados para as quatro geometrias adicionais são apresentados nas Figuras 4.22 a 4.24. Um resumo dos esforços máximos em valor absoluto é apresentado na Tabela 4.3.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,05 ; 0,08] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante $Q_{xx} \mbox{[-2,42]; 2,75] kN/m.}$

(d) Esforço Cortante $Q_{yy} \mbox{[-1,62]; 1,61]} \mbox{ kN/m}.$

(e) Esforço Normal *N*_{xx}[-3,29 ; 0,07] kN/m.

(f) Esforço Normal N_{yy} [-10,37 ; 0,04] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-2,59 ; 2,60] kN/m.

(h) Momento Torsor *M*_{xy}[-0,02 ; 0,02] kN.m/m.

Figura 4.22 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Dimensão a = 3 m.

(a) Momento Fletor *M*_{xx}[-0,06 ; 0,15] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,12 ; 0,46] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante ${\it Q}_{xx}[\mbox{-}2,58\ ; \mbox{2},59]\ kN/m.$

(d) Esforço Cortante Q_{yy} [-4,38 ; 2,45] kN/m.

(e) Esforço Normal N_{xx} [-20,07 ; 0,87] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy} [-3,02 ; 2,97] kN/m.

(h) Momento Torsor M_{xy} [-0,05 ; 0,05] kN.m/m.

Figura 4.23 - Distribuição dos esforços na casca conoidal – Dimensão a = 9 m.

(a) Momento Fletor M_{xx} [-0,25 ; 0,36] kN.m/m.

(b) Momento Fletor M_{yy} [-0,39 ; 1,19] kN.m/m.

(c) Esforço Cortante Q_{xx} [-4,04 ; 4,01] kN/m.

(d) Esforço Cortante ${\rm Q}_{yy}[\mbox{-}7,68\ ; 2,40]\ k\mbox{N/m}.$

(f) Esforço Normal N_{yy} [-19,33 ; 3,00] kN/m.

(g) Esforço Cisalhante N_{xy}[-4,78 ; 7,99] kN/m.

(h) Momento Torsor *M_{xy}*[-0,10 ; 0,10] kN.m/m.

Figura 4.24 - Distribuição dos esforços na casca conoidal - Dimensão a = 12 m

Aumentando-se o comprimento da casca conoidal, observa-se que os esforços solicitantes aumentam de magnitude e concentram-se na parte mais baixa da casca, ou seja, onde existe a menor curvatura. Verifica-se que, à medida que *a* cresce, muda o valor da relação entre os esforços de membrana N_{xx} e N_{yy} . Para a = 3, $N_{xx} = 3,25$ kN/m e $N_{yy} = 10,37$ kN/m ($N_{xx} / N_{yy} = 0,31$). Já para a = 12 m, tem-se que $N_{xx} = 34,64$ kN/m e $N_{yy} = 19,33$ kN/m ($N_{xx} / N_{yy} = 1,79$). Conclui-se assim que

o esforço de membrana dominante depende das dimensões da estrutura, sendo assim a rigidez da estrutura muda, conforme o seu comprimento aumenta e, consequentemente, há uma influência direta na carga crítica e nas frequências naturais e modos de vibração da casca conoidal, como será visto nos capítulos seguintes.

a (m)	M_{xx}	M_{yy}	M_{xy}	N_{xx}	N_{yy}	N_{xy}	Q_{xx}	Q_{yy}
	(kNm/m)	(kNm/m)	(kNm/m)	(kN/m)	(<i>kN/m</i>)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)
3	0,14	0,08	0,02	3,25	10,37	2,60	2,75	1,62
6	0,23	0,13	0,03	4,87	13,42	2,84	3,20	2,39
9	0,15	0,46	0,05	20,07	7,49	3,02	2,59	4,38
12	0,36	1,17	0,10	34,64	19,33	7,99	4,01	7,68

Tabela 4.3 - Influência da dimensão **a** da casca conoidal nos esforços solicitantes máximos – Caso de apoio EEEE.