

3 Teoria de Cascas Conoidais Abatidas

A formulação para cascas conoidais pode ser obtida a partir da teoria de placas, considerando uma imperfeição geométrica inicial na forma da superfície regradada que define a superfície média da casca, seguindo um procedimento similar a aquele desenvolvido por Marguerre para cascas abatidas (Marguerre, K (1938); Ciarlet, P.G. and Paumier, J. C (1986); Vorovich, I.I (1999)).

Segundo A.K. Das e J.N. Bandyopadhyay, em seu artigo *Theoretical and experimental studies on conoidal shells* (1992), a carga vertical por unidade de área horizontal da superfície da casca é dada por:

$$\bar{q} = q \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.1)$$

onde q é a carga vertical por unidade de área da superfície da placa, $z(x,y)$ é a função que descreve a forma da superfície curva.

A coordenada w do campo de deslocamentos em qualquer ponto da casca abatida, medida em relação a uma superfície horizontal de referência, pode ser descrita por:

$$\bar{w} = w + z(x, y) \quad (3.2)$$

3.1. Teoria de Flexão de Placas Curvas e Imperfeitas

Introduzindo a nova expressão para \bar{w} , equação (3.2), nas relações (2.3), (2.4) e (2.5), tem-se as seguintes expressões para as deformações específicas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x}^2 + 2 w_{,x} z_{,x}) \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + 2 w_{,y} z_{,y}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} + w_{,x} z_{,y} + z_{,x} w_{,y}$$

Substituindo as equações (3.3) nas expressões das equações (2.7) para N_x , N_y e N_{xy} , e substituindo nas três equações de equilíbrio (2.14), obtêm-se as seguintes equações não lineares de equilíbrio para cascas abatidas:

$$u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx} + w_{,x} z_{,xx} + w_{,xx} z_{,x} + \nu (v_{,yx} + w_{,y} w_{,yx} + w_{,y} z_{,yx} + w_{,yx} z_{,y}) + \frac{1-\nu}{2} (u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,xy} w_{,y} + w_{,x} w_{,yy} + w_{,xy} z_{,y} + w_{,x} z_{,yy} + z_{,xy} w_{,y} + z_{,x} w_{,yy}) = 0 \quad (3.4)$$

$$v_{,yy} + w_{,y} w_{,yy} + w_{,y} z_{,yy} + w_{,yy} z_{,y} + \nu (u_{,xy} + w_{,x} w_{,xy} + w_{,x} z_{,xy} + w_{,xy} z_{,x}) + \frac{1-\nu}{2} (u_{,yx} + v_{,xx} + w_{,xx} w_{,y} + w_{,x} w_{,yx} + w_{,xx} z_{,y} + w_{,x} z_{,yx} + z_{,xx} w_{,y} + z_{,x} w_{,yx}) = 0 \quad (3.5)$$

$$D \nabla^4 w - C \left[u_{,x} w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,xx} (w_{,x}^2 + 2 w_{,x} z_{,x}) + \nu w_{,xx} \left(v_{,y} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + 2 w_{,y} z_{,y}) \right) \right] - C \left[u_{,x} z_{,xx} + \frac{1}{2} z_{,xx} (w_{,x}^2 + 2 w_{,x} z_{,x}) + \nu z_{,xx} \left(v_{,y} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + 2 w_{,y} z_{,y}) \right) \right] - (1 - \nu) C [u_{,y} w_{,xy} + v_{,x} w_{,xy} + w_{,x} w_{,y} w_{,xy} + w_{,x} z_{,y} w_{,xy} + z_{,x} w_{,y} w_{,xy}] - (1 - \nu) C [u_{,y} z_{,xy} + v_{,x} z_{,xy} + w_{,x} w_{,y} z_{,xy} + w_{,x} z_{,y} z_{,xy} + z_{,x} w_{,y} z_{,xy}] - C \left[v_{,y} w_{,yy} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 w_{,yy} + 2 w_{,y} z_{,y} w_{,yy}) \right] + \nu \left(u_{,x} w_{,yy} + \frac{1}{2} (w_{,x}^2 w_{,yy} + 2 w_{,x} z_{,x} w_{,yy}) \right) - C \left[v_{,y} z_{,yy} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 z_{,yy} + 2 w_{,y} z_{,y} z_{,yy}) \right] + \nu \left(u_{,x} z_{,yy} + \frac{1}{2} (w_{,x}^2 z_{,yy} + 2 w_{,x} z_{,x} z_{,yy}) \right) = \bar{q} \quad (3.6)$$

Verifica-se nestas equações a presença de não linearidades cúbicas e quadráticas e que a função $z(x, y)$ e suas derivadas aparecem como coeficientes de termos lineares e quadráticos, influenciando de forma significativa o comportamento da estrutura. Assim, obtêm-se um sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes variáveis. Geralmente estas equações não têm solução analítica, mesmo para o caso linear. Desta forma a análise desta

classe de estruturas é geralmente conduzida através do uso de métodos numéricos, em particular o método dos elementos finitos.

3.2. Casos Particulares de Cascas Abatidas

3.2.1. Casca Conoidal

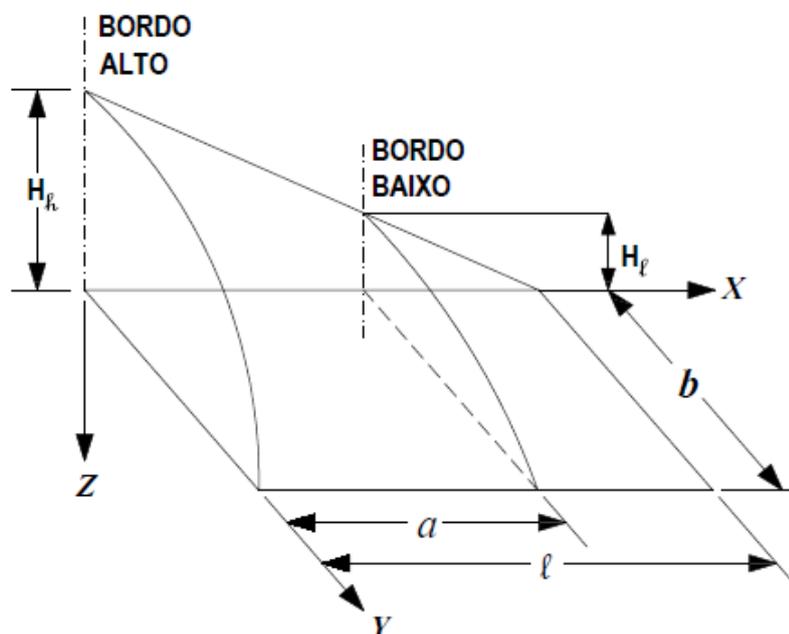


Figura 3.1 - Geometria da Casca Conoidal (ref. A.K. Das e J.N. Bandyopadhyay - *Theoretical and experimental studies on conoidal shells*)

Considera-se no presente estudo uma superfície conoidal parabólica, mostrado na Figura 3.1, que é descrita pela equação:

$$z = -H_h \left(1 - g \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (3.7)$$

onde

$$g = 1 - \frac{H_l}{H_h}$$

Substituindo os termos que contém derivadas em z nas três equações de equilíbrio, para este caso particular de superfície de placa, tem-se:

$$\begin{aligned}
& u_{,xx} + w_{,x}w_{,xx} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,xx} + v \left(v_{,yx} + w_{,y} w_{,yx} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,y} + \right. \\
& 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,yx} \left. \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,xy} w_{,y} + w_{,x} w_{,yy} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - \right. \right. \\
& \left. \left. g \frac{x}{a}\right) w_{,xy} + 2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,x} + 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,y} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,yy} \right) = \\
& 0 \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{,yy} + w_{,y}w_{,yy} + 2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,y} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,yy} + v \left(u_{,xy} + \right. \\
& w_{,x} w_{,xy} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,x} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,xy} \left. \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(u_{,yx} + v_{,xx} + w_{,xx} w_{,y} + \right. \\
& w_{,x} w_{,yx} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,xx} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,x} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,yx} \left. \right) = 0 \\
& \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D \nabla^4 w - C \left[u_{,x} w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,xx} \left(w_{,x}^2 + 2 H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,x} \right) + v w_{,xx} \left(v_{,y} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2} \left(w_{,y}^2 + 4 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,y} \right) \right) \right] - (1 - \nu) C \left[u_{,y} w_{,xy} + v_{,x} w_{,xy} + \right. \\
& w_{,x} w_{,y} w_{,xy} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,x} w_{,xy} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,y} w_{,xy} \left. \right] - \\
& (1 - \nu) C \left[-2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} u_{,y} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} v_{,x} - \right. \\
& 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,x} w_{,y} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} \left(2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,x} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} \left(H_h \frac{g}{a} \left(1 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{y^2}{b^2} \right) w_{,y} \right) \left. \right] - C \left[v_{,y} w_{,yy} + \frac{1}{2} \left(w_{,y}^2 w_{,yy} + 4 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,y} w_{,yy} \right) + \right. \\
& v \left(u_{,x} w_{,yy} + \frac{1}{2} \left(w_{,x}^2 w_{,yy} + 2 H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,x} w_{,yy} \right) \right) \left. \right] - C \left[2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - \right. \right. \\
& \left. \left. g \frac{x}{a}\right) v_{,y} + H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,y}^2 + 4 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,y} + \right. \\
& v \left(2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) u_{,x} + H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{x}{a}\right) w_{,x}^2 + 2 H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - \right. \right. \\
& \left. \left. g \frac{x}{a}\right) w_{,x} \right) \left. \right] = q \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Linearizando as equações de equilíbrio (3.8), (3.9), e (3.10), ou seja, omitindo os termos quadráticos e cúbicos em u , v e w , e transladando o eixo y da Figura 3.1 para $x=a/2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & u_{,xx} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,xx} \\
 & + v \left(v_{,yx} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,y} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,yx} \right) + \\
 & \frac{1-v}{2} \left(u_{,yy} + v_{,xy} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,xy} + 2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,x} + \right. \\
 & \left. 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,y} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,yy} \right) = 0 \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v_{,yy} + 2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,y} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,yy} \\
 & + v \left(u_{,xy} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,x} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,xy} \right) + \\
 & \frac{1-v}{2} (u_{,yx} + v_{,xx} + 2 H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,xx} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,x} \\
 & + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,yx}) = 0 \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D \nabla^4 w - (1-v) C \left[-2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} u_{,y} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} v_{,x} - 4 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) w_{,x} - 2 H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,y} \right] - C \left[2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{(x + \frac{a}{2})}{a}\right) v_{,y} + \right.
 \end{aligned}$$

$$4 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{\left(\frac{x+a}{2} \right)}{a} \right) H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{\left(\frac{x+a}{2} \right)}{a} \right) w_{,y} + \nu \left(2 H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{\left(\frac{x+a}{2} \right)}{a} \right) u_{,x} + 2 H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{\left(\frac{x+a}{2} \right)}{a} \right) w_{,x} \right) = q \quad (3.13)$$

Para proceder à análise dinâmica no caso particular da casca conoidal, devemos incluir na equação (3.13) de equilíbrio, a parcela referente à força de inércia, que pode ser expressa como:

$$F_I = \rho h \ddot{w}$$

onde ρ é a massa da casca por unidade de volume; h é a espessura; e \ddot{w} é a aceleração da placa na direção do eixo z , ou na direção do campo de deslocamentos w .