

2 Teoria de Placas

A solução mais antiga que se tem conhecimento para o problema de estabilidade de placas planas foi dada por Bryan em 1891, em seu estudo “On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in Its Own Plane, with Applications to the Buckling of the Sides of a Ship”. Desde então, um grande número de publicações sobre o mesmo tema foram desenvolvidas, inclusive abordando a análise da estabilidade de placas planas de uma forma mais extensa, como em Bleich (1952) e Bulson (1969).

Por causa da relativa simplicidade das equações governantes, a placa plana retangular é um excelente modelo para ilustrar a similaridade entre os critérios de somatório de forças e energia potencial estacionária, para o equilíbrio; e o critério de equilíbrio adjacente de forças e energia potencial mínima, para a perda de estabilidade.

2.1. Elementos da Teoria de Flexão de Placas

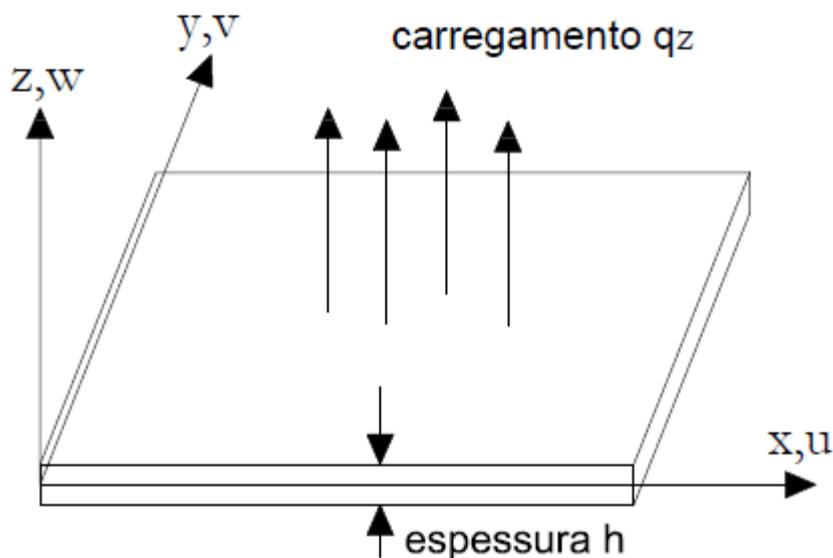


Figura 2.1 - Placa plana retangular submetida a uma carga de superfície q_z . Ref. Brush e Almroth (1975)

Com base em Brush e Almroth (1975), considere-se inicialmente uma placa plana retangular fina de comprimento a , largura b , espessura h , submetida a carregamentos ao longo das bordas, por unidade de comprimento; e a um carregamento de superfície q_z , distribuído por unidade de área da placa, normal ao plano da mesma. A placa é referida a um sistema retangular cartesiano de coordenadas x, y, z , onde x e y estão localizadas no plano médio da placa e z é medido a partir do plano médio, como indicado na Figura 2.1.

O objetivo da teoria de placas finas é reduzir um problema tridimensional a um problema bidimensional aproximado. As forças e momentos internos atuantes nas bordas de um elemento de placa dx vs. dy , como mostrado na Figura 2.2, estão expressos em termos de forças e momentos por unidade de comprimento ao longo da borda da placa.

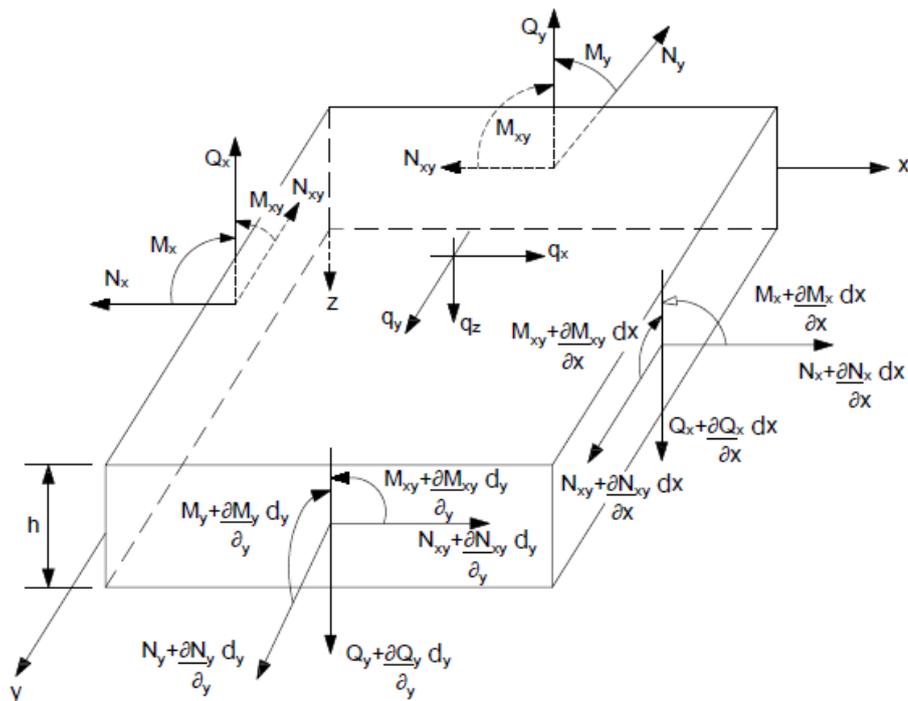


Figura 2.2 - Forças e momentos atuantes em um elemento infinitesimal de placa. Ref. Brush e Almroth (1975)

As intensidades das forças e momentos são calculadas a partir das tensões internas, através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yz} dz
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y z dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} z dz & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} z dz
 \end{aligned}$$

onde

N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} = forças normais e cortantes no plano da placa, por unidade de comprimento da borda;

Q_x, Q_y = forças cortantes transversais ao plano da placa, por unidade de comprimento da borda;

M_x, M_y = momentos fletores, por unidade de comprimento da borda;

M_{xy}, M_{yx} = momentos torsores, por unidade de comprimento da borda;

Os símbolos $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}$, etc., denotam as componentes de tensão em qualquer ponto ao longo da espessura h da placa, e diferem das componentes σ_x, τ_{xy} , etc., que se referem às quantidades correspondentes apenas ao plano médio da placa ($z = 0$). Considerando que $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$, pode-se concluir das equações (2.1) que $N_{xy} = N_{yx}$ e $M_{xy} = M_{yx}$.

A teoria de placas finas pode ser desenvolvida, considerando as seguintes aproximações simplificadoras:

- 1) Os planos normais ao plano médio indeformado da placa permanecem retos, normais e mantêm o comprimento inicial, durante a deformação da mesma. Assim, as deformações transversais normais e cortantes podem ser desprezadas nas relações cinemáticas da placa; e
- 2) As tensões normais transversais são consideradas muito pequenas em relação às outras componentes de tensões normais. Assim, podem ser desprezadas nas relações de tensão-deformação da placa.

Estas aproximações são conhecidas como considerações de *Kirchhoff* (Novozhilov, 1953)). Como uma consequência da primeira aproximação, as componentes de deslocamento em qualquer ponto da placa, \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , podem ser expressas em termos das componentes correspondentes ao plano médio da placa u , v , w , através das relações:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u + z\theta_x \\ \bar{v} &= v + z\theta_y \\ \bar{w} &= w\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde θ_x e θ_y são as rotações da seção em relação aos eixos y e x , respectivamente, u e v são, respectivamente, os deslocamentos nas direções de x e y e w é a componente de deslocamento transversal ao plano médio da placa.

Considerando pequenas deformações e rotações moderadas em relação aos eixos x e y , as relações deformação-deslocamento podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \bar{u}_{,x} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,x}^2 \\ \bar{\varepsilon}_y &= \bar{v}_{,y} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,y}^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} + \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,y}\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$ são as componentes de deformação de extensão e distorção em qualquer ponto ao longo da espessura da placa.

Em virtude das hipóteses de Kirchhoff, tem-se que $\theta_x = -w_{,x}$ e $\theta_y = -w_{,y}$.

Substituindo as relações (2.2) e (2.3), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\kappa_x \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + z\kappa_y \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + 2z\kappa_{xy}\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ correspondem às componentes de deformação no plano médio da placa e $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ correspondem às mudanças de curvatura, sendo

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} \theta_x^2 & \theta_x &= -w_{,x} & \kappa_x &= \theta_{x,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} \theta_y^2 & \theta_y &= -w_{,y} & \kappa_y &= \theta_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + \theta_x \theta_y & \kappa_{xy} &= \frac{1}{2} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x})\end{aligned}\tag{2.5}$$

As equações (2.5) são as relações cinemáticas para a placa. Todas as variáveis nestas relações são componentes referentes ao plano médio e são funções apenas de x e y .

Considerando um material elástico, isotrópico e linear, tem-se, segundo a lei de Hooke, que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_y) \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu\bar{\varepsilon}_x) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy}\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E , o módulo de elasticidade do material.

Introduzindo as equações (2.6) e (2.4) em (2.1) e integrando ao longo da espessura da placa, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 N_x &= C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) & N_y &= C(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\
 M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y) & M_y &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\
 N_{xy} &= C\frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy} & M_{xy} &= D(1-\nu)\kappa_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{e} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

As equações (2.7) são as relações constitutivas para a placa. Os coeficientes C e D são denominados parâmetros de rigidez de membrana e rigidez a flexão, respectivamente.

2.2. Equações de Equilíbrio Não Lineares

2.2.1. Somatório de Forças e Momentos

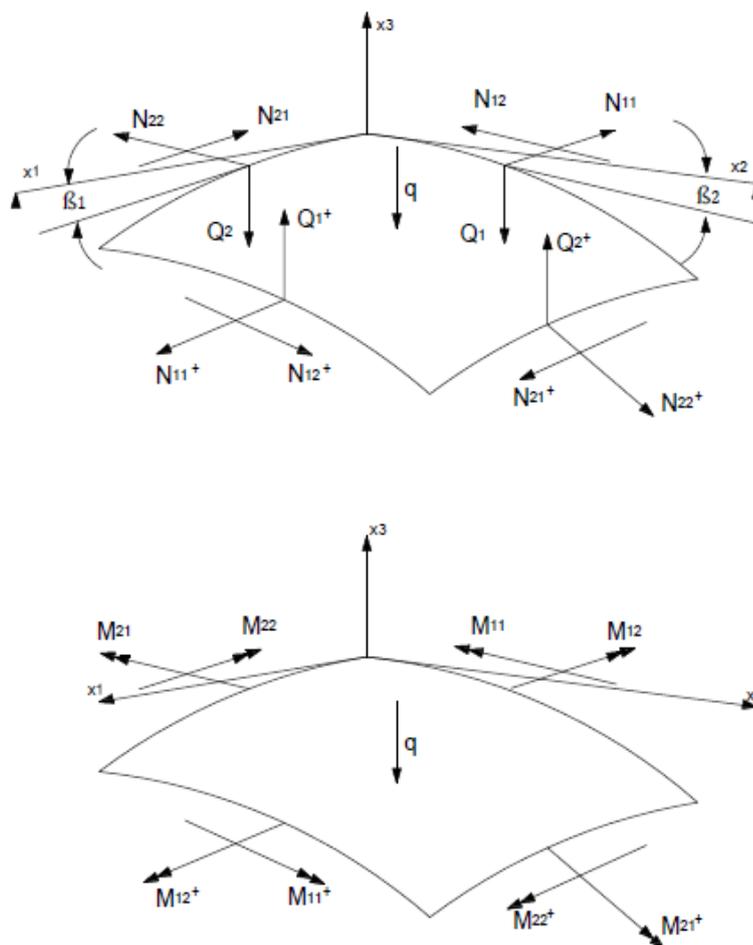


Figura 2.3 - Elemento de placa em uma configuração deformada. Ref. Brush e Almroth (1975)

Os eixos x , y e z estão representados na Figura 2.3 como x_1 , x_2 e x_3 e sendo assim, M_{12} e N_{11} correspondem a M_{xy} e N_x , etc. As forças e momentos variam ao longo do elemento, e o superescrito $+$ é usado para representar um incremento infinitesimal de cada esforço, por exemplo, N_{11}^+ representa $N_x + N_{x,x} dx$, etc.

O somatório das forças na direção x fornece:

$$N_{x,x} + N_{yx,y} = 0 \quad (2.8)$$

Do somatório de forças na direção y , tem-se:

$$N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \quad (2.9)$$

Do somatório de forças na direção z (Figura 2.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} & - (N_{x,x} + N_{yx,y})\theta_x - (N_{xy,x} + N_{y,y})\theta_y - N_x \theta_{x,x} - N_{xy} \theta_{y,x} - N_{yx} \theta_{x,y} - N_y \theta_{y,y} + Q_{x,x} + Q_{y,y} \\ & = -q \end{aligned} \quad (2.10)$$

Do somatório de momentos em relação aos eixos x e y , respectivamente, chega-se às seguintes equações:

$$\begin{aligned} & - M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y = 0 \\ & M_{yx,y} + M_{x,x} - Q_x = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Levando em consideração que $N_{xy} = N_{yx}$ e $M_{xy} = M_{yx}$, substituindo as expressões para Q_x e Q_y , das equações (2.11), na equação (2.10) e considerando-se as equações (2.8) e (2.9), obtém-se a equação:

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - N_x \theta_{x,x} - N_{xy} (\theta_{y,x} + \theta_{x,y}) - N_y \theta_{y,y} = -q \quad (2.12)$$

Introduzindo as relações constitutivas e cinemáticas para os momentos e rotações, simplifica-se a equação (2.12) para a forma:

$$D \nabla^4 w - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = q \quad (2.13)$$

onde $\nabla^4 w = w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}$

Com estas simplificações, podemos escrever as equações de equilíbrio da seguinte forma relativamente compacta:

$$\begin{aligned} & N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ & N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$D \nabla^4 w - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = q$$

As equações (2.14) são as conhecidas equações de placa de Von Kármán e representam as equações não lineares de equilíbrio para qualquer configuração da placa dentro do escopo de classes intermediárias de deformações.

2.2.2. Energia Potencial Estacionária

Uma placa carregada encontra-se em equilíbrio se sua energia potencial total V for estacionária, e V é estacionária se o integrando na expressão para V satisfaz as equações de Euler-Lagrange do cálculo variacional.

A energia potencial total de uma placa sujeita a uma pressão lateral $q(x,y)$ e carregamento de borda é a soma da energia de deformação, U , e da energia potencial gravitacional das cargas aplicadas, Ω :

$$V = U + \Omega \quad (2.15)$$

A energia de deformação para um meio isotrópico tridimensional, referido a um sistema de coordenadas ortogonal $x y z$, pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\bar{\sigma}_x \bar{\epsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\epsilon}_y + \bar{\sigma}_z \bar{\epsilon}_z + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\tau}_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \bar{\tau}_{zx} \bar{\gamma}_{zx}) dx dy dz \quad (2.16)$$

A omissão dos termos $\bar{\gamma}_{yz}$, $\bar{\gamma}_{zx}$, e $\bar{\sigma}_z$, de acordo com as aproximações básicas da teoria de placas finas, e introdução das equações (2.6), leva a:

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint (\bar{\epsilon}_x^2 + \bar{\epsilon}_y^2 + 2\nu \bar{\epsilon}_x \bar{\epsilon}_y + \frac{1-\nu}{2} \bar{\gamma}_{xy}^2) dx dy dz \quad (2.17)$$

Introduzindo as equações (2.4) e integrando com respeito a z , tem-se:

$$U = U_m + U_b \quad (2.18)$$

onde

$$U_m = \frac{C}{2} \iint (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2) dx dy \quad (2.19)$$

$$U_f = \frac{D}{2} \iint [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] dx dy \quad (2.20)$$

As expressões nas equações (2.19) e (2.20) são chamadas, respectivamente, de energia de deformação de membrana, U_m , e de flexão, U_f .

A energia potencial das cargas aplicadas para um sistema conservativo é o oposto do trabalho realizado pelas cargas, conforme a estrutura se deforma. Consequentemente, para uma pressão lateral q , tem-se:

$$\Omega = - \iint qw dx dy \quad (2.21)$$

A expressão para a energia potencial das cargas de bordo depende da natureza das cargas. Considerando uma carga de compressão P_x , aplicada no plano médio da placa, e uniformemente distribuída nos bordos $x=0$ e $x=a$, sendo a a dimensão da placa no eixo x , e b a dimensão da placa no eixo y , tem-se para a energia potencial:

$$\Omega = P_x [u(a) - u(0)] = P_x \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^a u_{,x} dx dy \quad (2.22)$$

Sendo assim, para a carga lateral e de bordo juntas, a expressão para Ω é:

$$\Omega = \iint \left(\frac{1}{b} P_x u_{,x} - qw \right) dx dy \quad (2.23)$$

Tem-se assim para a energia potencial total:

$$V = U + \Omega = \iint F dx dy \quad (2.24)$$

onde

$$F = \frac{C}{2} \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) + \frac{D}{2} [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] + \left(\frac{1}{b} P_x u_{,x} - qw \right) \quad (2.25)$$

Para que o equilíbrio seja satisfeito, a energia potencial V deve ser estacionária, ou seja, sua primeira variação, δV , deve ser igual a zero. Desta forma, o integrando F deve satisfazer a equação de Euler do cálculo variacional. Para um integrando da forma da equação (2.25), as equações de Euler são dadas por:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = 0$$

Estas equações de equilíbrio para o elemento de placa são as mesmas das equações (2.14).

Introduzimos as relações constitutivas e cinemáticas nas três equações, obtém-se um sistema de três equações não lineares em termos dos deslocamentos u , v e w , a saber:

$$[(u_x + \frac{1}{2} w_x^2) + \nu(v_y + \frac{1}{2} w_y^2)]_x + \frac{1-\nu}{2}(u_y + v_x + w_x w_y)_y = 0$$

$$\frac{1-\nu}{2}(u_y + v_x + w_x w_y)_x + [(v_y + \frac{1}{2} w_y^2) + \nu(u_x + \frac{1}{2} w_x^2)]_y = 0 \quad (2.27)$$

$$D\nabla^4 w - C[(u_x + \frac{1}{2} w_x^2) + \nu(v_y + \frac{1}{2} w_y^2)]w_{xx}$$

$$-(1-\nu)C[u_y + v_x + w_x w_y]w_{xy} - C[(v_y + \frac{1}{2} w_y^2) + \nu(u_x + \frac{1}{2} w_x^2)]w_{yy}$$

$$= q$$

Para se obter as equações de equilíbrio lineares da placa, é necessário apenas omitir os termos cúbicos e quadráticos nas componentes de deslocamento. As equações lineares correspondentes às equações (2.14) são:

$$\begin{aligned}N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0 \\D \nabla^4 w &= q\end{aligned}\tag{2.28}$$

Percebe-se que a terceira das equações (2.28) é desacoplada do restante. Esta equação se refere à carga e deslocamento transversal ao plano da placa; as demais se referem à carga e deslocamento no plano da mesma. Muito da relativa simplicidade da teoria clássica de placas finas é uma consequência deste desacoplamento.