

### **3. Modelagem por Elementos Finitos**

Para que a modelagem de uma estrutura através do método dos elementos finitos seja válida e precisa, é necessário, respectivamente, que o modelo esteja bem representado fisicamente e que este apresente convergência de valores em sua solução, como já comentado na seção 2.6.1.2 deste trabalho. Estas variantes devem ser aferidas antes de qualquer estudo, pois as aproximações em sua geometria, nas propriedades dos materiais, nas condições de carregamento e apoio, assim como o método de discretização, e o tipo de elemento utilizado podem afetar de maneira substancial os resultados finais obtidos.

Essa seção apresenta os estudos realizados para obtenção do modelo utilizado no presente trabalho. A partir de uma análise analítica e numérica, é realizado um estudo para ciência de qual modelo e malha melhor se adequam na representação de uma laje nervurada.

#### **3.1.**

##### **Validade do Modelo**

Durante o processo de modelagem, algumas decisões devem ser tomadas para garantir que o modelo físico seja bem representado através de um modelo computacional. Em primeiro lugar, decide-se a dimensionalidade a nível global que deve ser utilizada no modelo computacional, i.e., opta-se por modelar em uma, duas ou três dimensões. A seguir escolhem-se os tipos de elementos, e o nível de discretização a serem adotados. Os tipos de elementos estão associados com as funções de forma usadas na interpolação de seus campos de deslocamentos, bem como de sua geometria. O nível de discretização é obtido a partir de um estudo de convergência.

Neste trabalho, são considerados três modelos tridimensionais a nível de aproximação global. O primeiro modelo usa elementos de casca para representar a capa da laje, e elementos de viga para representar os pilares, nervuras e vigas do projeto. O segundo contém a mesma concepção do primeiro, diferindo apenas na localização relativa entre seus componentes. Especificamente, neste segundo modelo, a localização dos elementos de viga não estão no mesmo plano da superfície média da casca, apresentando, portanto, uma excentricidade (*offset*). Por fim, o terceiro modelo é construído integralmente usando elementos sólidos hexaédricos, com exceção dos pilares, que ainda são modelados com elementos de viga. Quanto à aproximação a nível local, o programa computacional adotado fornece elementos lineares. Portanto, o estudo de convergência considerou apenas o refinamento da malha até conseguirem-se resultados satisfatórios.

As dimensões em centímetros dos elementos estruturais da laje para estudo de convergência são apresentadas na Figura 3.1.

Após a definição da geometria da laje, são estabelecidas as propriedades dos materiais empregados. São adotados os valores do módulo de elasticidade longitudinal do concreto de 33,13 GPa, e a resistência característica à compressão de 35 MPa. O coeficiente de Poisson empregado é 0,2, e para o módulo de elasticidade transversal do concreto utiliza-se o valor relativo a 40% do módulo de elasticidade longitudinal, como estabelecido pela NBR 6118:2007 [1].

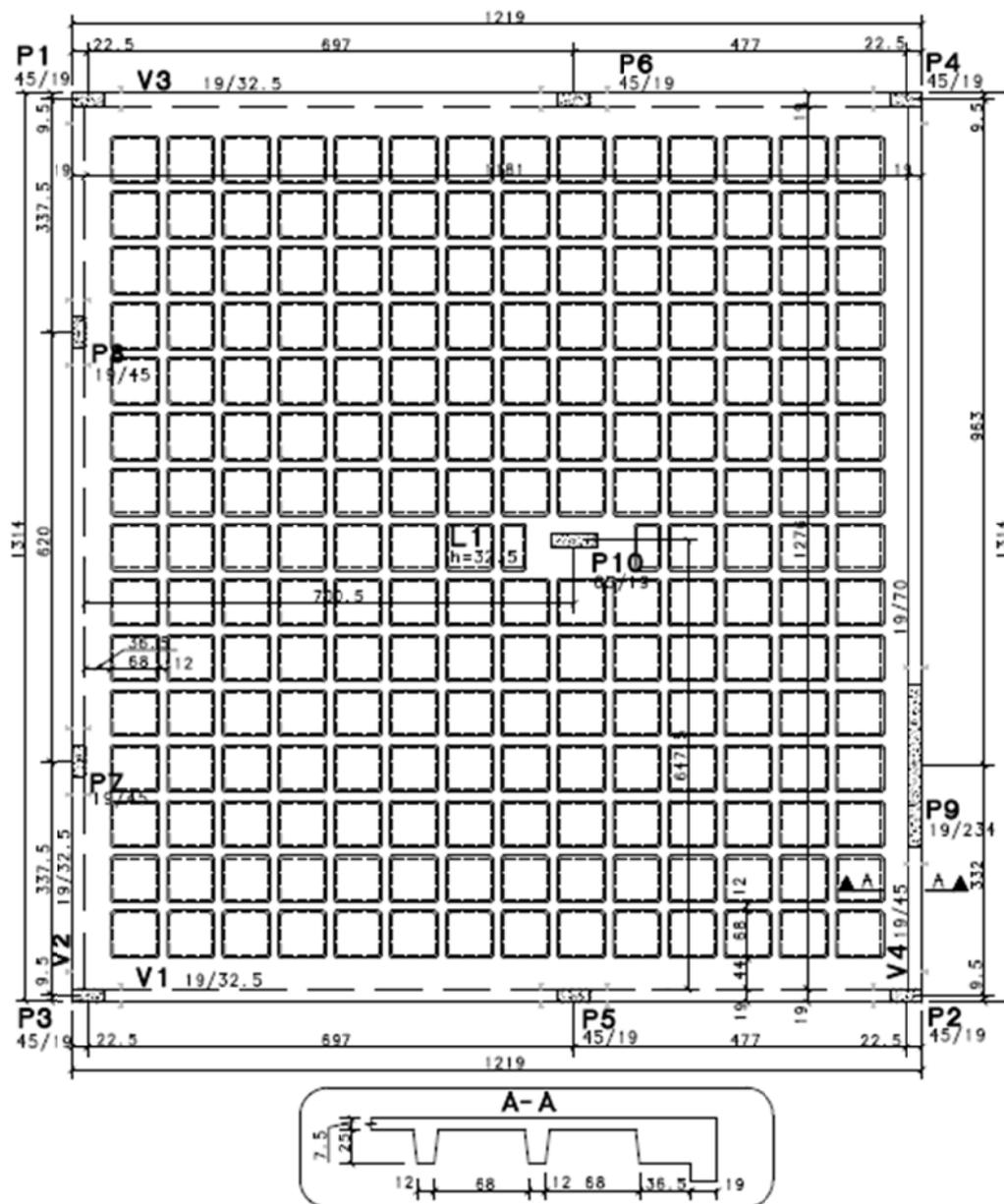
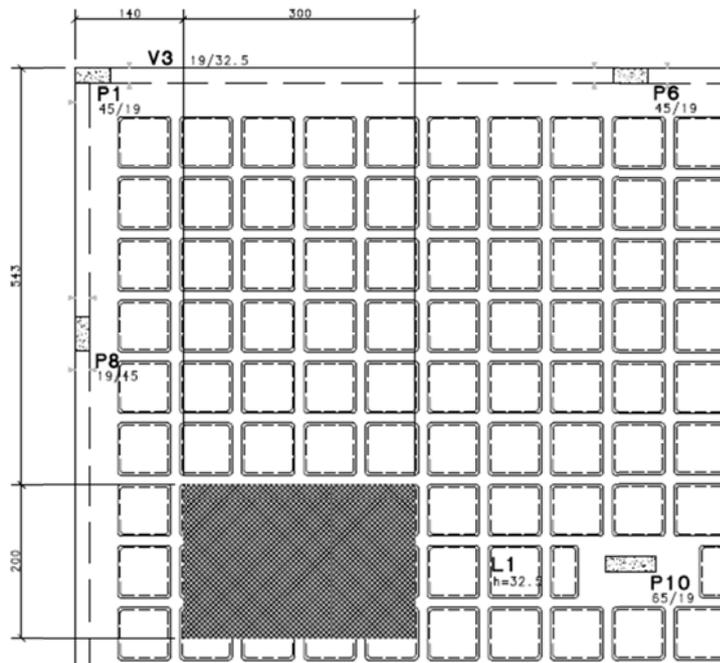


Figura 3.1 – Forma da Laje nervurada.

O terceiro aspecto a ser considerado são as condições de carregamento empregadas, com valores de  $4,1 \text{ kN/m}^2$  de carga permanente correspondente ao peso próprio da estrutura, e  $6,6 \text{ kN/m}^2$  de carga acidental na área indicada pela figura 3.2.



**Figura 3.2 – Planta de localização da área de carregamento.**

No método dos elementos finitos, todos os carregamentos devem ser reduzidos aos graus de liberdade. Este processo pode ser realizado através de métodos como *Node by node lumping (tributary region)* ou *Element by element lumping*. No entanto, o programa *Robot* realiza esta tarefa automaticamente, não sendo necessária qualquer intervenção pelo usuário.

Por fim as condições de apoio devem ser avaliadas cuidadosamente para que haja uma melhor correlação entre os resultados analíticos e os numéricos. Uma má escolha destas condições pode gerar uma diferença na rigidez geral da peça, forças concentradas artificiais, entre outros erros.

São usualmente adotados, na modelagem de lajes, apoios concentrados em nós, podendo estes ser do 1º, 2º ou 3º gênero. No entanto, ao representar os pilares por estes apoios nodais, é imposto um deslocamento nulo na vertical para os casos do 1º e 2º gênero, além de rotação nula para o apoio do 3º gênero. Contudo, sabe-se que, na realidade, essas regiões não apresentam deslocamento ou rotação nula, dando uma falsa rigidez total à estrutura. Logo, neste trabalho opta-se por modelar o pilar como elemento de barra, engastado em suas extremidades. Isso proporciona uma maior flexibilidade e deslocabilidade à estrutura, e, conseqüentemente, ameniza a concentração de tensões e elimina a rigidez artificial presente nas regiões de apoio.

### 3.2.

#### Precisão do Modelo

Anteriormente ao estudo da validade dos modelos escolhidos, faz-se um estudo da convergência de cada malha a ser adotada. Para isto, é necessário refinar a malha gradativamente até o ponto em que a variação nos resultados possa ser considerada desprezível de acordo com o nível de tolerância que é considerado aceitável. No presente trabalho foi utilizada a comparação dos deslocamentos entre modelos, sendo a tolerância de até 2,5% entre resultados para considerar-se que houve convergência.

O refinamento da malha pode ser realizado de duas maneiras, sendo a primeira o chamado *h-refinement*, onde a geometria é refinada em elementos cada vez menores, que é o caso no presente trabalho. A segunda metodologia é a *p-refinement*, em que o grau das funções de forma do elemento é elevado. No entanto, como já apresentado na seção 2.7.1 deste estudo, o software utilizado apenas trabalha com elementos lineares, não sendo possível o segundo método de refinamento.

No processo adotado para a obtenção de um modelo válido e preciso, são feitos vários protótipos de mesma concepção, com vários níveis de refinamento. O trabalho de La Torre Cubas [9] é utilizado como base para o presente estudo de convergência. Este considera a análise numérica do comportamento de pavimentos constituídos de lajes lisas de concreto protendido. Neste estudo o sistema foi modelado utilizando elementos de placa para representar a laje, localizada excentricamente em relação aos apoios. Foram analisadas malhas com elementos quadrados com dimensões de: 100x100 cm<sup>2</sup>, 50x50 cm<sup>2</sup>, 25x25 cm<sup>2</sup>, 16,37x16,37 cm<sup>2</sup>, 12,50x12,50 cm<sup>2</sup>, 10x10 cm<sup>2</sup> e 8,33x8,33 cm<sup>2</sup>. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 3.1.

Malha (cm)	Deslocamento (cm)	
	Com excentricidade	% diferença
100.00	-6.85	14.95%
50.00	-7.31	9.25%
25.00	-7.65	5.00%
16.67	-7.82	2.95%
12.50	-7.92	1.65%
10.00	-8.00	0.72%
8.33	-8.05	0.00%

**Tabela 3.1 – Quadro comparativo da convergência dos deslocamentos, Análise numérica do comportamento de pavimentos constituídos de lajes lisas de concreto protendido [9].**

Observa-se que a convergência foi obtida com elementos de 8,33x8,33 cm<sup>2</sup>, no entanto a própria autora afirma em sua dissertação que a malha com 25x25 cm<sup>2</sup> é suficiente para representar a laje nervurada, visto que sua diferença foi de apenas 5%, divergência esta admissível para problemas de engenharia estrutural. Outro fator favorável para a adesão da malha 25x25 cm<sup>2</sup>, é o fato de ela apresentar menor esforço computacional para o processamento da estrutura, otimizando a utilização da memória e do tempo.

### 3.3.

#### Ligação Rígida

Todo sistema estrutural consiste de componentes tridimensionais, no entanto, para tornar viável e prático o dimensionamento destes, é muitas vezes aconselhável à utilização de elementos com geometria mais simples, representados por um plano (como elementos de placa) ou por uma única dimensão (elementos de barras e vigas). Apesar de serem bem mais simples, estes elementos são, geralmente, capazes de capturar com precisão o comportamento do sistema estrutural. A modelagem dos sistemas estruturais usando elementos sólidos ou tridimensionais é mais complexa e exige um maior esforço computacional. No entanto, os modelos sólidos conseguem capturar detalhes das conexões entre componentes mais precisamente, bem como reproduzir

realisticamente a geometria do sistema. Portanto, quando refinados satisfatoriamente, eles produzem resultados confiáveis e precisos.

Um elemento plano, como o elemento de casca (ou placa) que é utilizado neste trabalho, é representado pela sua superfície média. Já um elemento unidimensional como o de viga é apresentado pela sua linha neutra. Para o sistema estrutural considerado no presente trabalho, o posicionamento desses elementos em um mesmo nível não estaria de acordo com a realidade espacial. Por isso, torna-se importante a representação desta excentricidade, ou *offset*, que gera um momento adicional causado pelos esforços normais neste braço de alavanca. Isto torna o sistema mais realístico.

Mesmo estando em planos diferentes, sabe-se que a laje e a viga na realidade estão conectadas e, portanto, apresentam comportamentos relacionados um com o outro. Para representar esta conexão, é necessário inserir um elemento que expresse matematicamente esta ligação. Isto é feito através de ligações rígidas conectando os dois tipos de elementos. Essas ligações relacionam os graus de liberdade dos dois elementos garantindo que seções planas (do conjunto) permaneçam planas após a deformação. Matematicamente, isto é feito relacionando os graus de liberdade dos dois tipos de elementos, i.e:

$$A \cdot u = g \quad (3.1)$$

Onde:

$A$ : matriz de restrição que representa a relação entre os graus de liberdade;

$u$ : graus de liberdade da estrutura;

$g$ : deslocamento ou rotação prescrita, sendo usualmente adotado valor nulo.

No caso da ligação de vigas e laje, sendo estas solidarizadas estruturalmente, sabemos que a conectividade entre elas devem apresentar deslocamentos e rotações iguais. Para cada dupla de nó neste caso, sendo um deles da viga e outro da casca (como mostrado através da Figura 3.3, extraída da dissertação de Christian Donin [6]), resulta na matriz de restrição (definida na equação 3.2) abaixo:

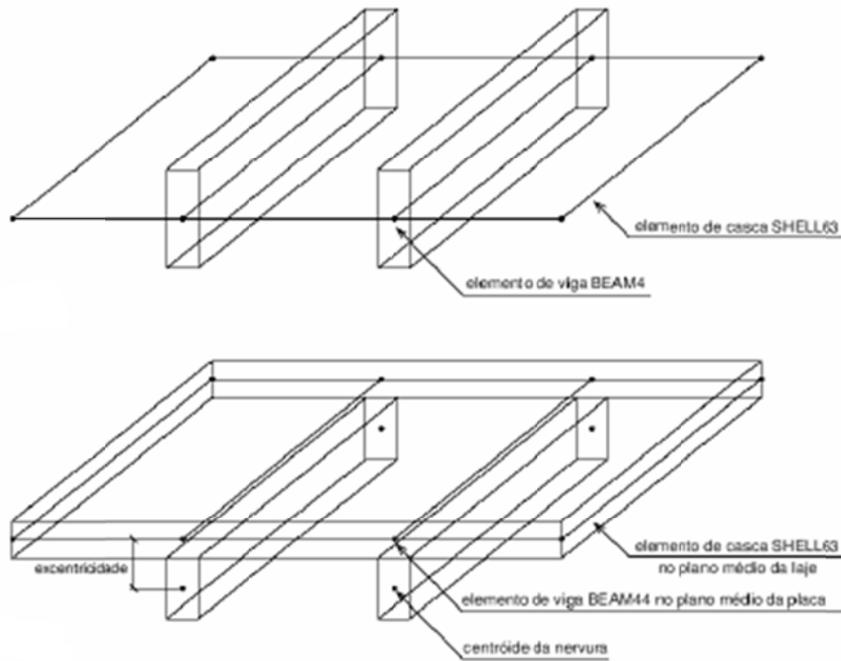


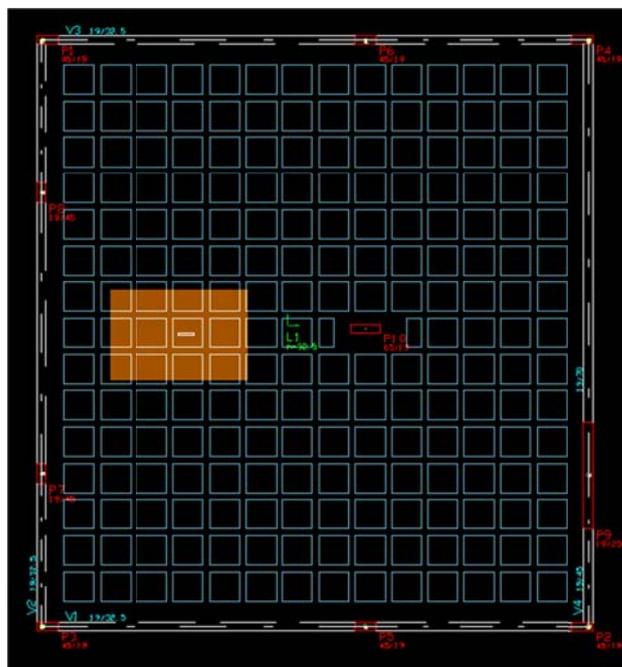
Figura 3.3 – Modelos de viga com e sem excentricidade, Análise numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos [6].

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_{x_1} \\
 u_{y_1} \\
 u_{z_1} \\
 \theta_{x_1} \\
 \theta_{y_1} \\
 \theta_{z_1} \\
 u_{x_2} \\
 u_{y_2} \\
 u_{z_2} \\
 \theta_{x_2} \\
 \theta_{y_2} \\
 \theta_{z_2}
 \end{Bmatrix}
 = \{0\} \quad (3.2)$$

### 3.4.

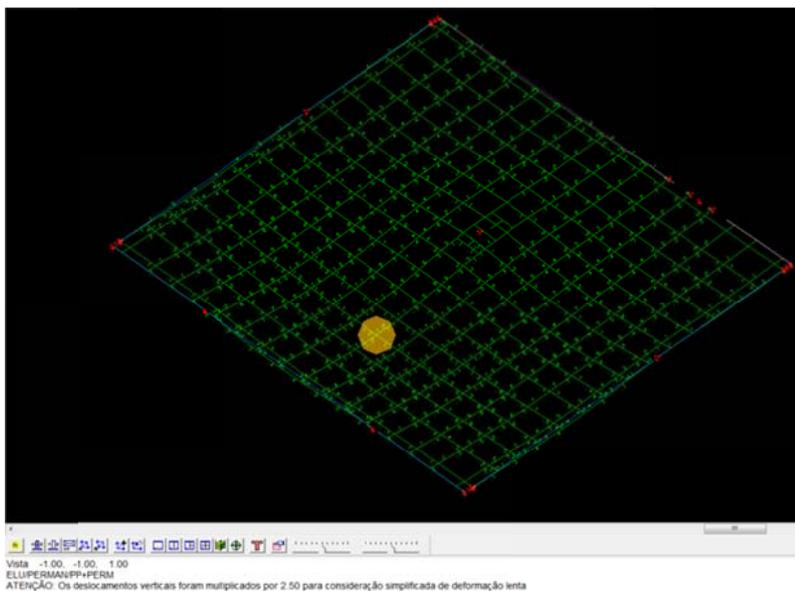
#### Resultados do Estudo de Convergência

Usualmente, no Brasil, adota-se o método da grelha equivalente para o cálculo de lajes maciças e nervuradas em concreto armado (seção 2.6.2). O programa computacional brasileiro *TQS* utiliza este método implementado para o cálculo dos esforços internos da estrutura, além de realizar o dimensionamento e detalhamento das peças de concreto armado e protendido. A laje de estudo é também modelada usando este programa. A Figura 3.4 mostra o modelo reproduzido no *TQS*.



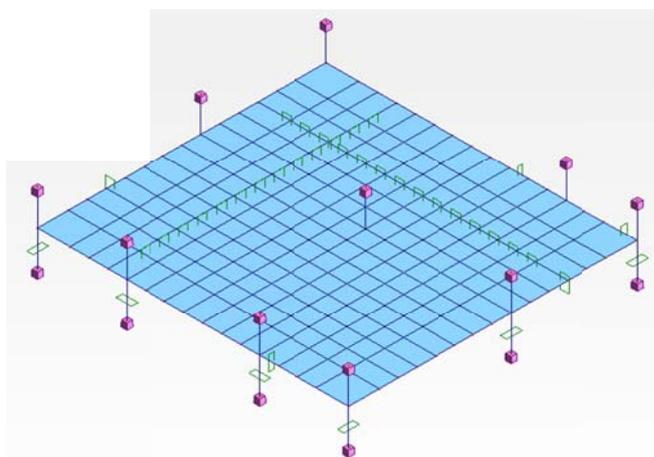
**Figura 3.4 – Laje nervurada gerada pelo Modelador TQS.**

O deslocamento obtido através da grelha coplanar do TQS é 12 mm, e a forma deformada é mostrada na Figura 3.5. Porém, este programa faz a consideração da deformação lenta do concreto através da multiplicação do deslocamento imediato por um coeficiente no valor de 2,5. Logo, o deslocamento imediato da estrutura é de 4,8 mm.

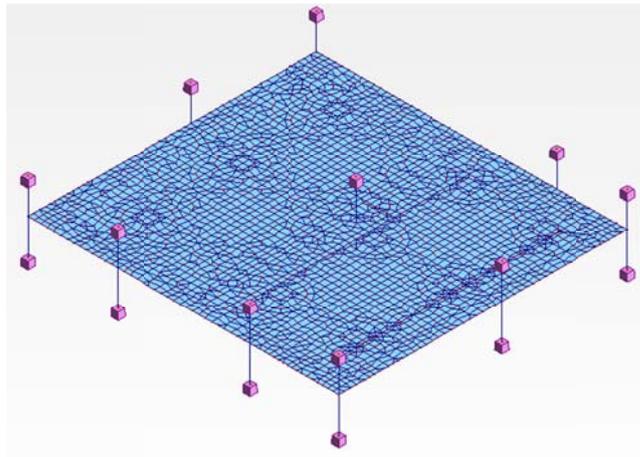


**Figura 3.5 – Deslocamento obtido pelo Modelador TQS.**

O primeiro modelo em elementos finitos a ser analisado é aquele que representa as nervuras como elemento de viga e a capa como elemento de casca, todos em um mesmo plano (Figura 3.6). Este protótipo é o que mais se assemelha ao método da grelha equivalente, adotado pelo *TQS*. Neste caso, seis níveis de discretização são consideradas, i.e., malhas com dimensões máximas de 100x100 cm<sup>2</sup>, 80x80 cm<sup>2</sup>, 50x50 cm<sup>2</sup>, 25x25 cm<sup>2</sup> (Figura 3.7), 12,5x12,5 cm<sup>2</sup> e 8,33x8,33 cm<sup>2</sup>. Nas regiões maciças, próximas aos pilares e vigas de bordo, foram empregados elementos com maior área de seção transversal. Estas regiões são feitas para complementar a forma nas áreas em que não é possível ser colocado as caixas de polipropileno.

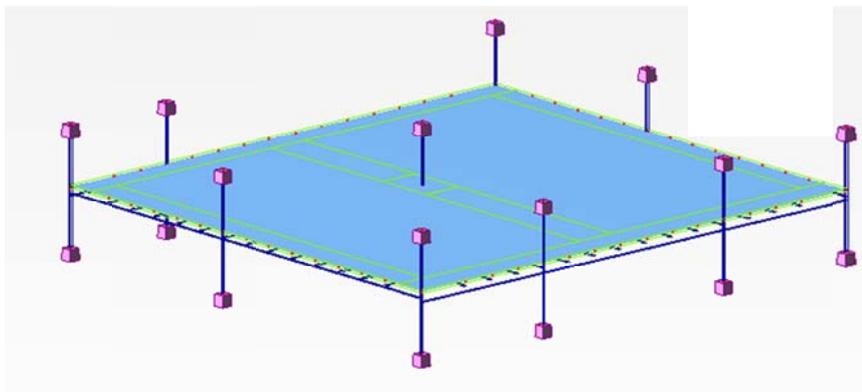


**Figura 3.6 – Modelo de casca e viga sem ligações rígidas.**



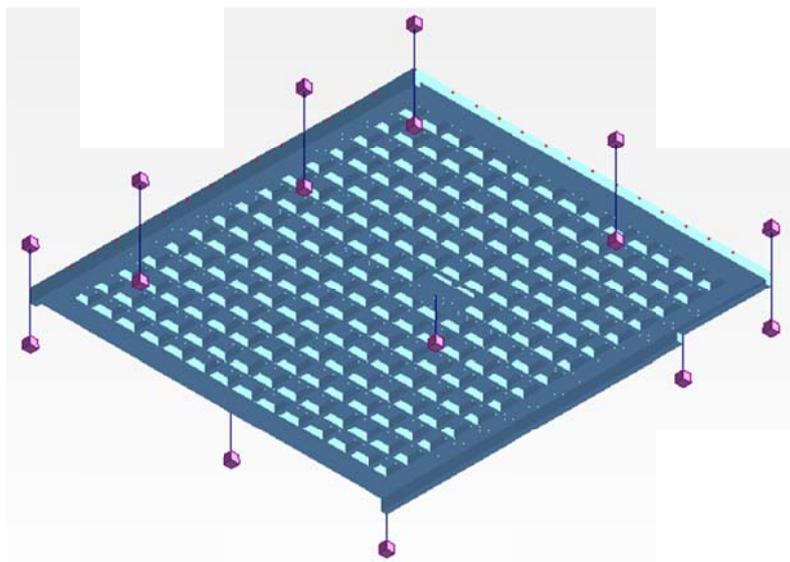
**Figura 3.7 – Malha de 25x25 cm<sup>2</sup> para o modelo de casca e viga sem ligações rígidas.**

O segundo modelo adotado é semelhante ao primeiro, diferindo apenas na posição relativa entre os elementos de casca e os de viga (Figura 3.8). Como o centro de gravidade das nervuras, laje, e vigas de bordo são diferentes, é necessária a criação de diversos níveis distintos, sendo acrescentada uma ligação rígida em cada nó para fazer a ligação entre os diferentes componentes estruturais. Os níveis de refinamento das malhas utilizadas são os mesmos apresentados para o primeiro modelo.



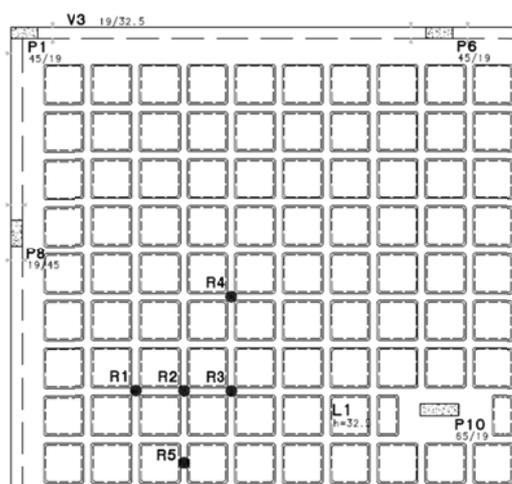
**Figura 3.8 – Modelo de casca e viga com ligações rígidas.**

Por último, é analisado o modelo constituído de elementos sólidos (Figura 3.9). A complexidade deste modelo em relação aos outros dois é muito maior, não só na criação do modelo físico como na leitura de resultados, visto que trabalhar em três dimensões se torna mais complicado e demorado.



**Figura 3.9 – Modelo de elementos sólidos.**

Para o estudo de convergência e comparação entre os modelos, é realizada a leitura dos deslocamentos, tendo em vista que esta é a resposta que apresenta menor quantidade de aproximações matemáticas, pois é a partir dela que outros resultados como tensão e deformação são encontrados (pós-processamento). Os pontos escolhidos para a leitura dos deslocamentos são os apresentados na Figura 3.10.



**Figura 3.10 – Planta de locação dos pontos de instrumentação.**

Os resultados para o deslocamento máximo e nos cinco pontos pré-determinados são apresentados nas Figuras 3.11, 3.12 e 3.13, e resumidos na Tabela 3.2. Para o modelo que utiliza o método das grelhas, é apresentada uma malha com seus limites coincidentes com cada nervura, ou seja, uma malha de aproximadamente 80x80 cm<sup>2</sup>. Portanto, todos os cinco pontos analisados estão

contidos em uma região onde só é possível obter-se um único valor de deslocamento.

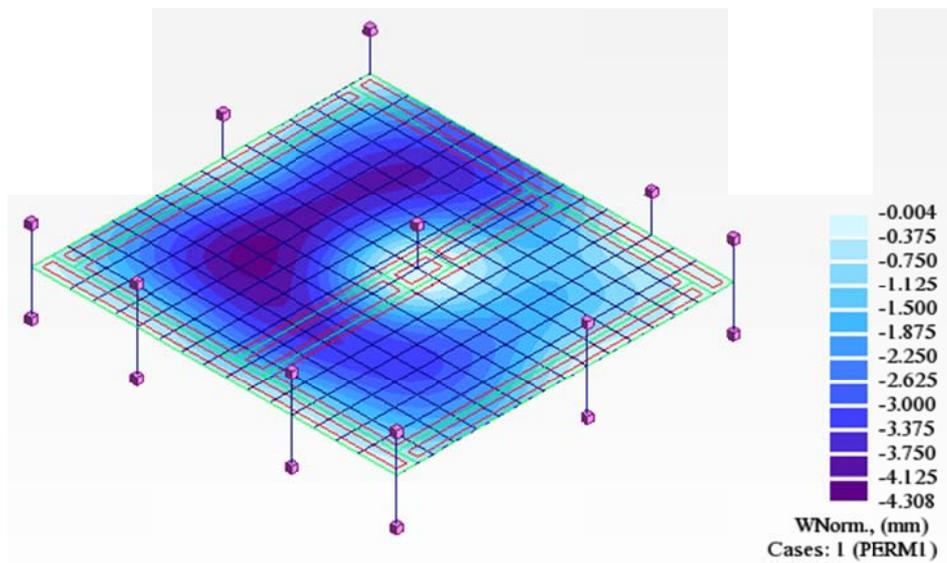


Figura 3.11 – Deslocamentos obtidos através do modelo com elementos de casca e viga sem consideração do *offset*.

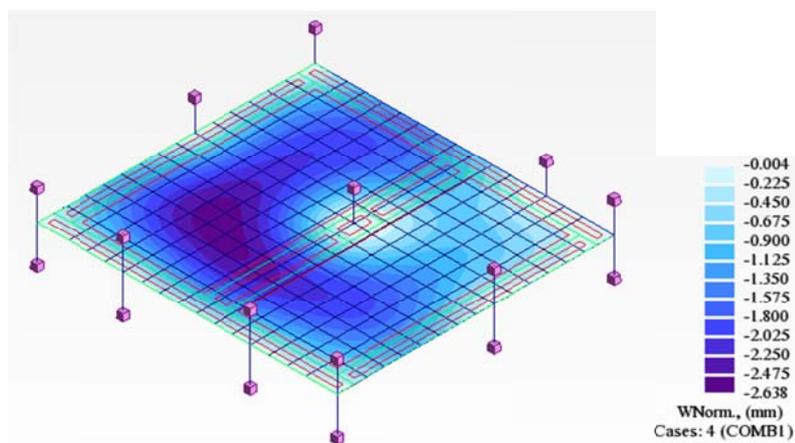


Figura 3.12 – Deslocamentos obtidos através do modelo com elementos de casca e viga com consideração do *offset*.

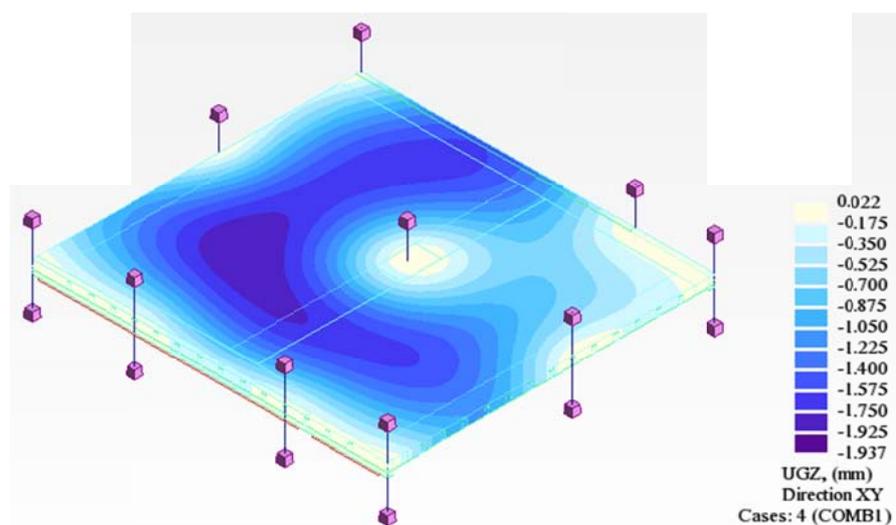


Figura 3.13 – Deslocamentos obtidos através do modelo com elementos sólidos.

Modelo	Malha (mm <sup>2</sup> )	Deslocamento (mm)					
		R1	R2	R3	R4	R5	Max
Método da grelha (TQS)	800x800	4.8					
Casca/Viga sem offset	1000x1000	3.62	4.25	4.13	4.58	3.88	4.58
	800x800	3.57	4.18	4.06	4.54	3.78	4.56
	500x500	3.62	4.25	4.13	4.56	3.91	4.62
	250x250	3.71	4.35	4.24	4.68	3.89	4.76
	125x125	3.73	4.38	4.27	4.72	4.03	4.80
	83.3x83.3	3.74	4.39	4.28	4.73	4.03	4.76
Casca/Viga com offset	1000x1000	2.13	2.43	2.35	2.58	2.26	2.59
	800x800	2.12	2.41	2.34	2.57	2.23	2.59
	500x500	2.12	2.41	2.33	2.56	2.23	2.58
	250x250	2.14	2.44	2.37	2.59	2.26	2.64
	125x125	2.16	2.46	2.39	2.62	2.28	2.64
	83.3x83.3	2.17	2.47	2.40	2.63	2.29	2.64
Sólido	1000x1000	1.64	1.81	1.71	1.89	1.75	1.94
	800x800	1.69	1.81	1.73	1.88	1.74	1.92
	500x500	1.63	1.80	1.71	1.88	1.73	1.93
	250x250	1.66	1.85	1.75	1.95	1.77	2.01
	125x125	1.94	2.06	1.95	2.13	1.97	2.15
	83.3x83.3	1.86	1.99	1.89	2.14	1.86	2.20

Tabela 3.2 – Quadro comparativo dos deslocamentos nos diversos modelos estudados.

Os resultados da Tabela 3.2 para deslocamentos máximos podem ser plotados e o resultado é apresentado através da figura 3.14. As Tabelas 3.3 e 3.4

apresentam respectivamente: a comparação em porcentagem dos deslocamentos obtidos entre modelos estudados, a comparação em porcentagem dos deslocamentos obtidos em um modelo com variação da malha.

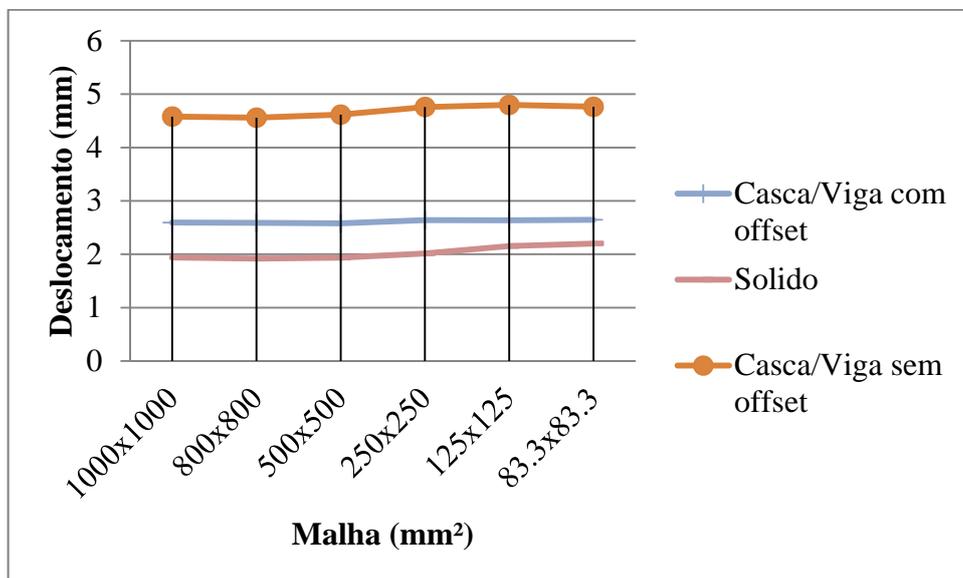


Figura 3.14 – Gráfico comparativo dos deslocamentos.

Modelo	Malha (mm <sup>2</sup> )	Diferença (%)					
		R1	R2	R3	R4	R5	Max
<u>Sem offset</u> Sólido	1000x1000	54.55	57.42	58.62	58.71	54.89	57.71
	800x800	52.75	56.60	57.37	58.55	54.08	57.95
	500x500	54.87	57.73	58.63	58.75	55.64	58.10
	250x250	55.15	57.49	58.57	58.30	54.42	57.68
	125x125	48.00	52.95	54.38	54.83	51.15	55.13
	83.3x83.3	50.31	54.68	55.98	54.87	53.87	53.84
<u>Com offset</u> Sólido	1000x1000	22.81	25.60	27.35	26.69	22.68	25.27
	800x800	20.43	24.89	25.92	26.75	22.13	25.93
	500x500	22.85	25.57	26.74	26.56	22.32	24.95
	250x250	22.29	24.32	25.82	24.74	21.50	23.65
	125x125	10.14	16.39	18.35	18.53	13.73	18.32
	83.3x83.3	14.29	19.56	21.32	18.65	18.74	16.86
<u>Met. Grelha</u> Sólido	1000x1000	65.73	62.33	64.42	60.63	63.56	59.65
	800x800	64.88	62.21	63.92	60.75	63.79	60.06
	500x500	65.96	62.58	64.38	60.77	63.90	59.71
	250x250	65.35	61.50	63.44	59.31	63.04	58.04
	125x125	59.56	57.06	59.40	55.56	59.02	55.15
	83.3x83.3	50.17	58.54	60.71	55.48	61.25	54.19

Tabela 3.3 – Quadro comparativo dos deslocamentos entre modelos estudados.

Modelo	Malha (mm <sup>2</sup> )	Diferença (%)					
		R1	R2	R3	R4	R5	Max
Casca/Viga sem offset	<u>1000x1000</u> 800x800	-1.43	-1.58	-1.60	-0.70	-2.43	-0.46
	<u>800x800</u> 500x500	1.46	1.62	1.69	0.44	3.12	1.23
	<u>500x500</u> 250x250	2.35	2.25	2.43	2.52	-0.39	3.00
	<u>250x250</u> 125x125	0.67	0.75	0.84	0.83	3.35	0.81
	<u>125x125</u> 83.3x83.3	0.27	0.25	0.28	0.27	0.12	-0.71
Casca/Viga com offset	<u>1000x1000</u> 800x800	-0.57	-0.62	-0.56	-0.23	-1.34	-0.15
	<u>800x800</u> 500x500	-0.05	-0.08	-0.17	-0.31	-0.04	-0.43
	<u>500x500</u> 250x250	1.03	1.19	1.35	1.19	1.28	2.31
	<u>250x250</u> 125x125	0.93	0.93	0.88	0.88	0.88	-0.08
	<u>125x125</u> 83.3x83.3	0.46	0.36	0.42	0.34	0.39	0.34
Sólido	<u>1000x1000</u> 800x800	2.43	0.33	1.39	-0.32	-0.63	-1.04
	<u>800x800</u> 500x500	-3.18	-1.00	-1.29	-0.05	-0.29	0.88
	<u>500x500</u> 250x250	1.74	2.81	2.56	3.58	2.31	3.97
	<u>250x250</u> 125x125	14.32	10.33	9.95	8.44	9.81	6.46
	<u>125x125</u> 83.3x83.3	-4.35	-3.57	-3.34	0.19	-5.75	2.09

**Tabela 3.4 – Quadro comparativo dos deslocamentos obtidos em um modelo com variação da malha.**

O tempo para que sejam efetuados os cálculos necessários para a obtenção dos resultados está diretamente ligado a quantidade de memória computacional utilizada para armazenamento, i.e, o tamanho da matriz de rigidez apresentada em cada modelo. Esta memória é maior pra modelos mais discretizados, ou seja, com maior quantidade de nós. A quantidade de nós de cada modelo está apresentada na Tabela 3.5.

<b>Modelo</b>	<b>Malha (mm<sup>2</sup>)</b>	<b>Quantidade de Nós</b>
Método da grelha (TQS)	800x800	310
Casca/Viga sem offset	1000x1000	920
	800x800	901
	500x500	1119
	250x250	2855
	125x125	10738
	83.3x83.3	23760
Casca/Viga com offset	1000x1000	920
	800x800	901
	500x500	1119
	250x250	2855
	125x125	10738
	83.3x83.3	23760
Sólido	1000x1000	233875
	800x800	233923
	500x500	238854
	250x250	244104
	125x125	281692
	83.3x83.3	397790

**Tabela 3.5 – Quadro apresentando a quantidade de nós nos diversos modelos estudados.**

A partir dos resultados apresentados, podemos concluir que o modelo calculado através do método das grelhas tem uma diferença de deslocamento de até 66% maior se comparado ao modelo com elementos sólidos. Este processo, usualmente utilizado para cálculo de lajes, mostrou-se extremamente conservador, acarretando em peças mais robustas e com uma maior taxa de aço. No entanto, para o calculista, este processo oferece alto grau de confiabilidade e rapidez.

A modelagem feita com os elementos de casca e nervuras em um mesmo plano é análoga ao processo da grelha equivalente, bem como pode ser confirmado através dos deslocamentos (Tabela 3.3). Portanto, mesmo sendo de rápido processamento, este método apresenta um alto grau de conservadorismo, aproximadamente 58,6% maior que o modelo com elementos sólidos.

Com a utilização das ligações rígidas, observa-se que o efeito da excentricidade auxilia para uma maior aproximação dos modelos sólidos, com

deslocamentos maiores de 10% a 27%. Este método se torna eficiente devido ao menor conservadorismo diante dos métodos clássicos, assim como a facilidade de modelagem e velocidade de processamento. Quanto ao refinamento de sua malha, verificou-se que a diferença de deslocamento entre elas é pequena, aproximadamente 2,5%, no entanto, ao refinar bastante a malha, o esforço computacional é consideravelmente maior.

Conclui-se que, o modelo com elementos de viga e casca com ligações rígidas tem um resultado satisfatório quando comparado com os métodos adotados analiticamente, além de apresentar relativamente um tempo menor de processamento, demonstrando ser mais indicado para este trabalho.