

2. Pesquisa Bibliográfica

2.1. Considerações Gerais Sobre Lajes

A hierarquia de transmissão dos carregamentos em um sistema estrutural tem como primeiro elemento a laje, responsável pela resistência direta às cargas provenientes de ações permanentes como revestimento, tubulações entre outros elementos fixos, e ações variáveis como pessoas, móveis e etc.

As lajes podem ser classificadas a partir de diferentes critérios.

- Quanto à forma: retangulares, quadradas, poligonais, circulares ou elípticas;
- Quanto à natureza:
 - Maciças: placas monolíticas de concreto armado ou protendido;
 - Nervuradas: compostas por nervuras na sua zona tracionada e por uma mesa, também chamada de capa, na zona comprimida;
 - Mistas: semelhantes às nervuradas, a diferença está na adição de tijolos cerâmicos que colaboram na resistência aos esforços de compressão oriundos da flexão;
 - Em grelhas: semelhantes às lajes nervuradas, o espaçamento entre nervuras não obedece às limitações das lajes nervuradas previstas na NBR 6118:2007 [1];
 - Duplas: apresentam capa tanto na parte superior quanto inferior;
 - Pré-moldadas: são fabricadas como elementos isolados, apenas a montagem é feita no local, proporcionando, portanto uma execução mais rápida;

- Cogumelos: lajes que não apresentam sistema de vigas, desta forma as cargas são transmitidas diretamente aos pilares, os quais podem ou não ter capitéis sobre eles,
 - Lisas: caso particular da laje cogumelo, os capitéis não existem.
- Quanto ao tipo de apoio: contínuo ou discreto;
 - Quanto ao tipo de armação: armadas em uma ou duas direções.

A NBR 6120 [2] estabelece os valores que devem ser adotados para as cargas variáveis em diferentes situações, e os valores de cargas permanentes para diversos materiais. As cargas variáveis são analisadas em várias situações probabilísticas, prevalecendo a mais desfavorável por questão de segurança. A NBR 6118:2007 [1] indica os coeficientes de ponderação das ações para diversas situações.

Quanto aos estágios de carregamento de uma laje de concreto armado, em um primeiro nível de deformação não surgem fissuras. À medida que a intensidade da carga aumenta, ocorre a formação de fissuras até o ponto onde a placa não resistirá mais e entrará em colapso. O estado-limite de serviço está relacionado à aparência, conforto do usuário e a boa utilização funcional da construção e estado-limite último relacionado ao colapso da estrutura.

Essa alteração nos estágios de deformações é estudada através dos estádios: O estágio I corresponde ao regime elástico, o II ao de fissuração e o III ao de ruína. Os dois primeiros são utilizados para verificação das situações de serviço e o terceiro ao Estado Limite Último.

2.2.

Lajes Maciças

2.2.1.

Considerações Gerais

As lajes maciças são elementos estruturais bidimensionais planos com cargas preponderantemente normais ao seu plano médio que devem se apresentar dúcteis às solicitações, e também transmitir o carregamento nela aplicado às vigas ou diretamente aos pilares. A escolha é feita a partir da magnitude das cargas de projeto e dos vãos adotados.

O modelo de laje que não apresenta viga é denominado laje lisa, como mostrado na Figura 2.1. Esse tipo de laje traz diversas vantagens práticas como a diminuição das formas e do cimbramento, o tempo de concretagem e montagem das armaduras.

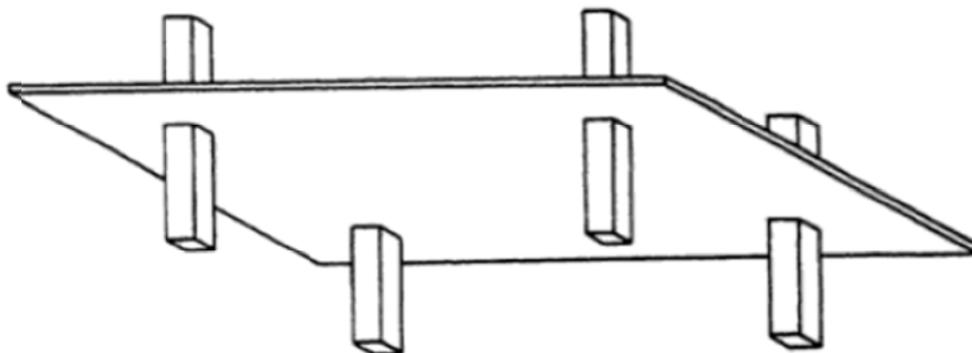


Figura 2.1 – Laje lisa, *Reinforced Concrete Slabs* [10].

No entanto, nos casos com cargas elevadas, se a espessura da laje não for suficiente para combater os esforços cisalhantes no entorno do pilar, é necessário aumentar a seção da laje nesta região, ocasionando o chamado ábaco ou pastilha (figura 2.2). Outras soluções são o aumento da seção na cabeça do pilar, tendo como resultado o chamado capitel, ou a utilização de armaduras para combater esses esforços. Este esforço é denominado punção.

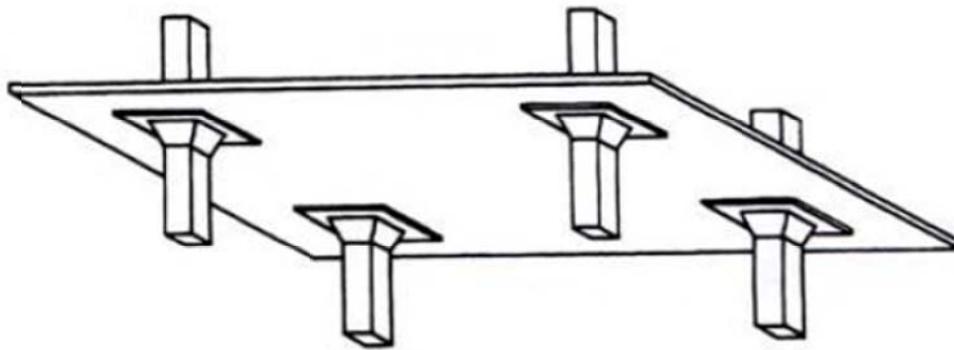


Figura 2.2 – Laje cogumelo, *Reinforced Concrete Slabs* [10].

2.2.2. Prescrições Normativas (NBR 6118:2007)

As lajes maciças podem ser analisadas pela teoria da placa de Kirchhoff ou de Mindlin com solicitações principalmente normais ao seu plano, como apresentado em maiores detalhes na seção 2.5.1 deste trabalho.

A NBR 6118:2007 [1] recomenda o cálculo de lajes maciças lisas utilizando um procedimento numérico adequado, como o método dos elementos finitos, método das diferenças finitas, método dos elementos de contorno, entre outros. Quando os pilares estiverem dispostos em filas ortogonais, o estudo pode ser realizado através do método dos pórticos equivalentes e, portanto fazer a distribuição dos momentos positivos e negativos com os valores percentuais mostrados na seção 14.7.8 dessa norma.

A necessidade de modelos mais práticos para a análise de lajes fez com que surgissem métodos simplificados como os de Marcus e Czerny. Esses métodos serão abordados na seção 2.6.3.

2.3.

Lajes Nervuradas

2.3.1.

Considerações Gerais

Uma seção de concreto armado com carregamentos aplicados perpendicularmente ao seu eixo longitudinal apresenta um binário de forças equilibradas atuantes nas fibras superior e inferior, sendo uma delas de compressão e outra de tração. Essa separação é feita a partir da linha neutra, que nos casos de vãos com grande dimensão, se encontra mais elevada do que quando se tem pequenos vãos. Como o concreto apresenta uma resistência à tração muito pequena, desenvolveu-se o conceito de diminuir a área de concreto da região tracionada das lajes e concentrar as armaduras nas nervuras.

Na laje nervurada, retira-se parte do concreto da zona tracionada, e colocam-se materiais inertes como formas de polipropileno, isopor, ou tijolos cerâmicos sem função estrutural, formando uma mesa de concreto apoiado em grelhas de vigas. Há uma maior economia de material, um menor peso próprio da laje, e conseqüentemente menor peso final da estrutura descarregado nas fundações. Esse modelo é usualmente adotado para lajes com grandes vãos ou elevados carregamentos, podendo ser armadas em duas direções, ou em uma direção, quando utilizado o tapa nervura em um dos sentidos.

As formas de polipropileno, também chamadas de *plasterits*, se tornaram comercialmente mais utilizadas por serem fabricadas com um material reciclável e com grande durabilidade, podendo ser reaproveitadas em diversas lajes diferentes. Empresas como a Impacto Protensão apresentam um catálogo com dimensões pré-estabelecidas que sugere ao arquiteto e ao engenheiro uma modulação para obras mais rotineiras.

Para modelar essa classe de laje, em se tratando das condições de contorno, Carvalho [4] indica a sua consideração como simplesmente apoiada em todo o seu bordo, já que a espessura da capa, geralmente esbelta, não é suficiente para resistir às tensões de tração. Esta é uma situação não real por não representar a continuidade dos painéis de lajes com os adjacentes.

A obtenção dos esforços em uma laje nervurada armada em uma só direção pode ser feita através da teoria das vigas, já para as armadas em duas direções, o sistema pode ser comparado a uma grelha de barras uniformemente espaçadas ou em alguns casos, é permitida a verificação da laje como uma placa maciça, como mostra a seção 14.7.7 da NBR 6118:2007 [1].

Com o intuito de aumentar a altura útil de cada pavimento, surgiu a ideia de se criar faixas maciças com altura igual a das lajes, fazendo com que o teto se torne plano (figura 2.3). A análise dessas faixas deve ser feita com atenção, pois somente nos casos que ela apresenta rigidez muito maior que as das nervuras é que se pode assumir que as lajes apoiam-se nelas, caso contrário toda a superfície se deforma como uma estrutura só. Com isso, é necessário observar a deformação da faixa, que pode ocasionar o aumento dos momentos positivos da laje e diminuir os negativos na proximidade das faixas.

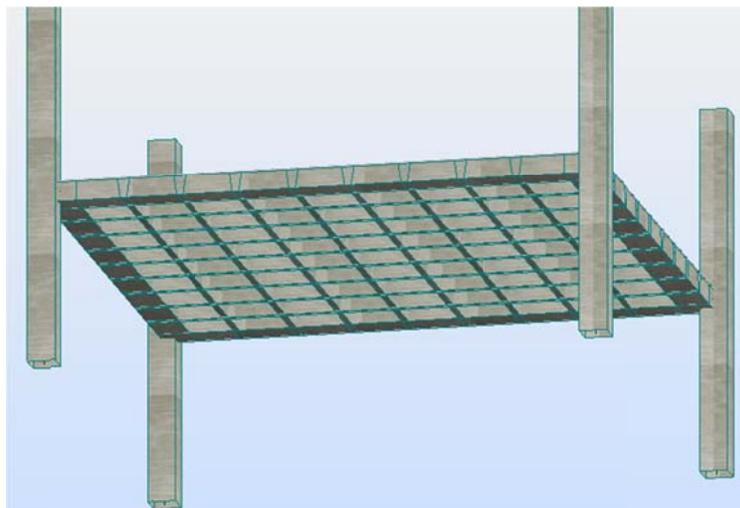


Figura 2.3 – Laje nervurada.

Portanto para as faixas rígidas, deve-se adotar o cálculo como viga com a carga total transmitida pelos painéis vizinhos. Já para as semi-rígidas, o cálculo da carga total deve ser o produto de uma constante que relacione os momentos de inércia da faixa e da laje, pelas cargas dos painéis vizinhos, e somado a isto, um valor de carga como se a faixa não estivesse recebendo carregamento devido aos painéis.

2.3.2. Prescrições Normativas (NBR 6118:2007)

As lajes nervuradas podem ser consideradas como uma mesa ou capa de concreto apoiado em um sistema de vigotas ou nervuras. A norma restringe as espessuras de ambos os elementos da seguinte maneira:

- Capa sem tubulação horizontal embutida: $1/15$ da distância entre nervuras ou 3 cm, o que for mais restritivo;
- Capa com tubulação de até 12,5 mm embutida: valor absoluto mínimo de 4 cm;
- Espessura da nervura: valor não inferior a 5 cm, e para as que tiverem menos que 8 cm não conter armadura de compressão.

Quanto às hipóteses simplificadoras adotadas, a norma permite para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras inferior ou igual a 65 cm, que a verificação à flexão da mesa seja desconsiderada, e o cisalhamento das nervuras seja verificado considerando os critérios de laje. Para as que têm entre 65 e 110 cm, as mesas devem ser verificadas a flexão e as nervuras ao cisalhamento com a teoria das vigas, salvo para espaçamentos de até 90 cm e largura das nervuras maior que 12 cm, que devem ser consideradas como laje. Para aquelas com espaçamento maior que 110 cm, as mesas devem ser calculadas como laje maciça apoiadas em grelhas de viga.

2.4. Lajes Tridirecionais

2.4.1. Considerações Gerais

Ao estudar o caminho das cargas em lajes carregadas uniformemente, observa-se que as tensões oriundas desse carregamento se dissipam em um fluxo que segue em direção aos apoios de maior rigidez. Devido a esse fluxo, em sua maioria, não ser ortogonal aos bordos, a eficiência das lajes tradicionais é reduzida quando comparada com lajes rotacionadas.

Através dessa teoria surgem as lajes tridirecionais, ou seja, armadas em três direções, sendo uma delas transversal e as duas restantes com ângulo de 45° em relação aos eixos cartesianos. Rocha [11] menciona a possibilidade teórica de melhoria através deste método, no entanto, foi encontrada uma dificuldade construtiva. A empresa Impacto Protensão sediada em Fortaleza, Ceará, criou um produto que tornou possível a construção dessa laje em obras, fabricando uma forma constituída de material polipropileno com um rasgo central, como pode ser observado na Figura 2.4.

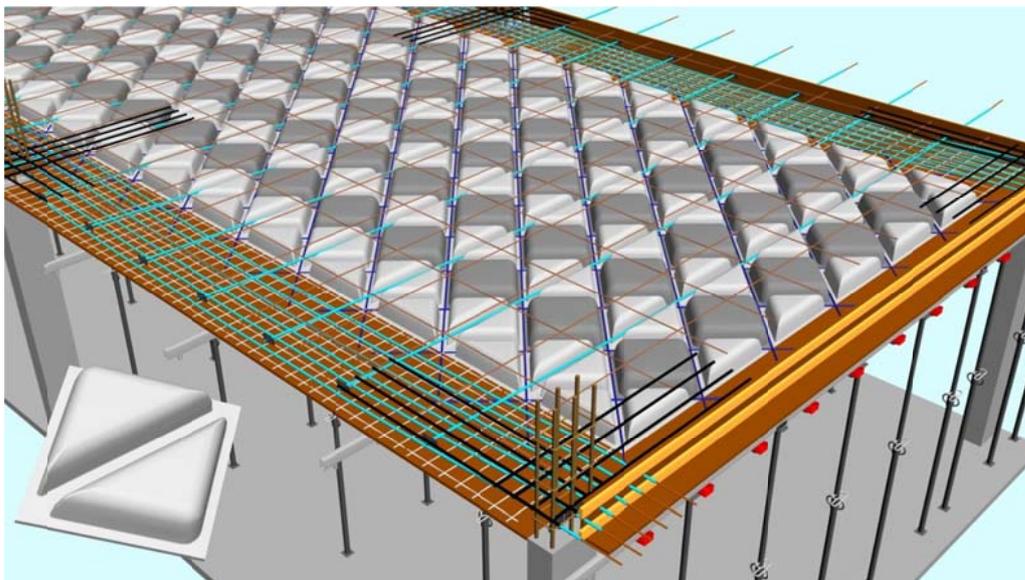


Figura 2.4 – Modulação da forma de uma laje tridirecional, Análise Tridirecional em Lajes Nervuradas Protendidas [12].

Para obedecer ao fluxo natural de tensões utiliza-se uma armadura com esse novo sentido a fim de redirecionar a distribuição de cargas e conseguir um melhor funcionamento estrutural do sistema. Rocha [11] fez a partir do método das grelhas equivalente (método melhor estudado na seção 2.6.2 deste trabalho) um estudo prático que propôs equações dos momentos em lajes armadas ortogonalmente às bordas, e em lajes inclinadas a um ângulo de 45° do seu eixo cartesiano. Para obtenção dos momentos em uma direção, basta multiplicar os valores encontrados através das equações pelo espaçamento das nervuras na outra direção.

Primeiramente são apresentados valores para o caso de lajes com a dimensão longitudinal igual a transversal, sendo seus bordos simplesmente apoiados.

Em uma laje bidirecional sem levar em consideração a torção:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{13} \quad (2.1)$$

Em uma laje bidirecional levando em consideração a torção:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{16} \quad (2.2)$$

Em uma laje Maciça:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{27,4} \quad (2.3)$$

Para o caso de lajes com nervuras inclinadas a 45° do eixo cartesiano temos:

Sem levar em consideração a torção:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{25} \quad (2.4)$$

Levando em consideração a torção:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{27} \quad (2.5)$$

Onde:

M_{max} : Momento máximo;

q : Carregamento distribuído;

l : Comprimento da laje.

Este estudo concluiu que as lajes com armadura inclinada apresentam valores para momentos máximos próximos aos das lajes maciças, ou seja, possuem um melhor comportamento estrutural com uma grande economia de concreto devido à criação de espaços vazios na borda tracionada. A justificativa é a existência de maior entrelaçamento das vigas com a disposição inclinada.

Para o caso das lajes engastadas no contorno, o método tridirecional apresenta ainda maior diferença em relação ao tradicional, pois as nervuras próximas aos vértices apresentam um momento positivo pequeno já que estas terão comprimentos menores que as centrais. A formulação para estes casos (equações 2.6, 2.7 e 2.8) apresentados por Rocha [11] são denominadas pelo

próprio autor como grosseiras e por isso obtêm resultados com alto coeficiente de segurança.

Momento positivo:

$$M_{max} = \frac{ql_x^2}{32} \quad (2.6)$$

Momento negativo das nervuras centrais:

$$M_{max} = -\frac{ql_x^2}{32} \quad (2.7)$$

Momento negativo das nervuras no canto:

$$M_{max} = -\frac{ql_x^2}{18} \quad (2.8)$$

Onde:

l_x : Dimensão em relação ao eixo da laje.

Por fim, Rocha [11] sugere os coeficientes para momentos em lajes com a relação λ (sendo este igual a l_y/l_x) entre dois e três, apresentados através das equações 2.9, 2.10 e 2.11.

Momento positivo:

$$M_{max} = \frac{ql_x^2}{36} \quad (2.9)$$

Momento negativo das nervuras centrais:

$$M_{max} = -\frac{ql^2}{12} \quad (2.10)$$

Momento negativo das nervuras no canto:

$$M_{max} = -\frac{ql^2}{24} \quad (2.11)$$

No caso de lajes com nervuras próximas e numerosas é indicada a multiplicação por um fator igual a 1,20 com objetivo de corrigir o erro causado pela não consideração da rigidez à torção, como mostrado na Equação 2.12.

$$M_{max} = 1,2 \frac{M_x + M_y}{2} \quad (2.12)$$

À medida que o coeficiente λ tende a infinito, o uso dessa metodologia se torna desvantajoso, pois o método clássico apresenta momentos menos expressivos devido às nervuras terem comprimentos menores. Já no caso de lajes com formatos irregulares, deve-se fazer um estudo mais detalhado, podendo ou não apresentar vantagem.

2.4.2. Método Construtivo e Detalhamento

A inexistência de processos construtivos adequados para execução da laje tridirecional tornou desse sistema, durante muito tempo, um objeto de estudo não cobiçado. No entanto, com a forma feita de polipropileno, que é um material flexível para fabricação de diversos moldes, foi possível a confecção de caixas com formatos adequados. Para que o método tridirecional se torne competitivo, essas formas devem seguir os mesmos padrões de dimensões das lajes convencionais, dando ao engenheiro a mesma flexibilidade para escolha mais adequada para o projeto em questão.

A empresa Impacto Protensão além de fabricar a nova caixa que permite a utilização da laje tridirecional, fez com que a montagem da forma para concretagem no local fosse realizada da mesma maneira que a tradicional, sem necessidade de mão de obra especializada ou mesmo um sistema de escoras diferentes, como é apresentado na Figura 2.5.

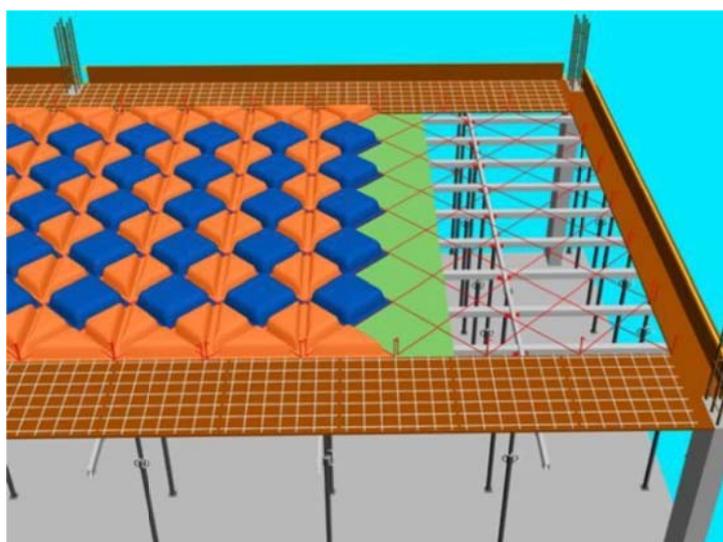


Figura 2.5 – Sistema de escoramento de uma laje tridirecional.

Observa-se a partir da Figura 2.5 que as formas são montadas com a mesma facilidade que na laje convencional, existindo caixas triangulares a fim de tornar os espaços que seriam preenchidos por concreto em espaços vazios. Com o rasgo central nas caixas, uma direção de armadura pode ser disposta ortogonalmente ao eixo x ou y da laje, podendo também ser protendida em uma das direções.

Programas computacionais de dimensionamento e detalhamento conseguem representar esse tipo de laje adequadamente, não tornando mais oneroso ao projetista a utilização desse novo sistema.

2.4.3. Lajes Contínuas Ligadas por Vigas Faixas Nervuradas

A partir da nova configuração rotacionada das formas, é possível devido à continuidade da modulação das caixas (figura 2.6) a utilização de faixas nervuradas entre lajes, ou seja, as faixas que separam e recebem o carregamento das lajes, antes maciças, se tornam um conjunto de vigas (nervuras) atribuindo uma maior economia para este método, não só de concreto, mas de armadura devido a não utilização de estribos nas faixas.

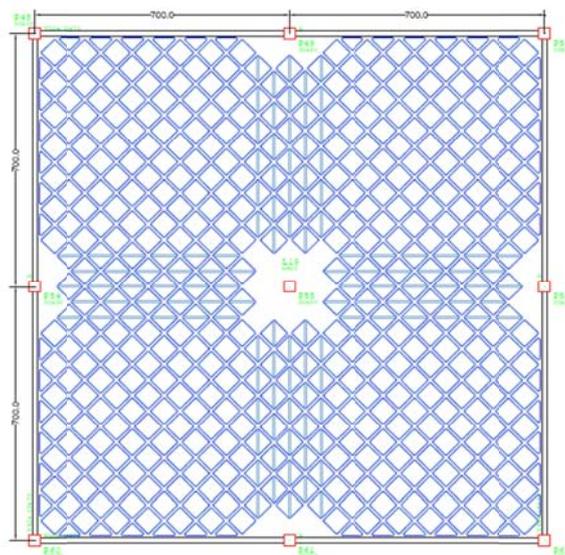


Figura 2.6 – Laje nervurada tridirecional, Sistema Construtivo Tridirecional para Construção de Lajes Nervuradas [3].

Deve-se garantir que as faixas apresentem rigidez significativamente maior do que a rigidez das lajes, não permitindo, portanto, que estas estruturas trabalhem como uma peça unificada, como já discutido na seção 2.3.1.



Figura 2.7 – Laje nervurada tridirecional.

2.5.

Métodos de Análise

Na análise de qualquer problema de engenharia deve ser escolhido um modelo físico que atenda às suas características reais, que será solucionado através de um modelo matemático.

Para calcular os esforços solicitantes utilizando a Teoria da Elasticidade, são adotadas algumas hipóteses simplificadoras:

- Não há deformação no plano médio da placa, permanecendo este neutro durante a flexão;
- Qualquer seção transversal da peça permanece plana após a deformação, ou seja, as deformações são distribuídas linearmente;
- As tensões normais na direção transversal da placa podem ser desprezadas, logo não há a necessidade do cálculo do esforço cortante.

No estudo com o material trabalhando no regime elástico, pode ser utilizada a lei de Hooke. Junto com essa suposição, diz-se que a laje é constituída de um material homogêneo, ou seja, o concreto e o aço trabalham como um só, apresentando deformações iguais. Por fim, é considerado o material como isotrópico, ou seja, o material apresenta as mesmas propriedades físicas independente da direção.

Para o caso de lajes de concreto armado, o dimensionamento da seção analisada é feito no estágio III, para o Estado Limite Último.

2.5.1 Teoria das Placas

De acordo com a NBR 6118:2007 [1], quando a laje de concreto apresenta ações normais ao seu plano e uma superfície plana, esta deve ser estudada como placa. Este elemento apresenta uma classificação quanto a sua espessura para fins da escolha de um método adequado para análise. Placas podem ser classificadas como espessas e delgadas.

Para o caso da placa espessa, i.e., espessura maior que $1/3$ do vão, a teoria que melhor descreve o comportamento da estrutura é a de Reissner-Mindlin, a qual pode ser analogamente comparada com a teoria de Timoshenko para vigas, pois ambas consideram o efeito das tensões de cisalhamento tangenciais ao plano da placa. Para as placadas delgadas, caso este usualmente encontrado em problemas práticos de engenharia, pode-se adotar a teoria de Kirchhoff-Love, também chamada de teoria elástica linear das lajes delgadas, que por sua vez pode ser analogamente comparada com a de Euler-Bernoulli, em que as tensões cisalhantes são desprezadas e são consideradas as simplificações expostas no início dessa seção. Esta consideração é viável, porque na grande maioria das lajes o esforço predominante é a flexão.

2.5.1.1.

Teoria Clássica das Placas Delgadas

No presente trabalho é necessária a determinação das solicitações em ângulos arbitrários da placa, principalmente a 45° dos eixos (figura 2.8). Esses dados podem ser facilmente encontrados pelo círculo de Mohr ou através da formulação apresentada por Park Gamble [10] mostrada a seguir.

$$m_n = m_x \text{sen}^2 \alpha + m_y \text{cos}^2 \alpha + 2m_{xy} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha$$

$$m_n = m_x \text{sen}^2 \alpha + m_y \text{cos}^2 \alpha + m_{xy} \text{sen} 2\alpha \quad (2.13)$$

$$m_t = (m_x - m_y) \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha + m_{xy} (\text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha)$$

$$m_t = \frac{m_x - m_y}{2} \text{sen} 2\alpha - m_{xy} \text{cos} 2\alpha \quad (2.14)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \quad (2.15)$$

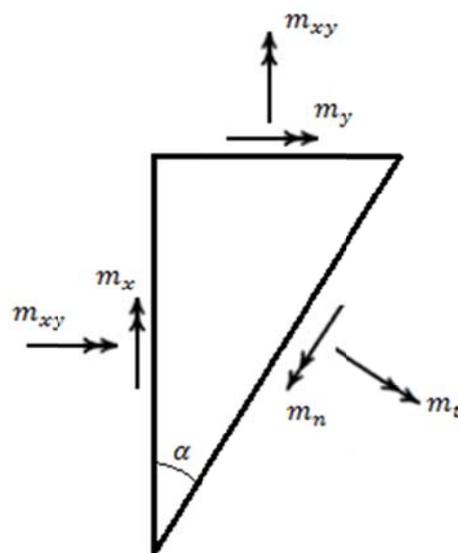


Figura 2.8 – Corpo livre a um ângulo α .

2.5.1.2.

Momento em uma Placa Anisotrópica

Em projetos estruturais, faz-se o dimensionamento da laje nervurada através dos momentos encontrados em cada nervura (figura 2.9). A partir da formulação apresentada por Timoshenko [13] para placas anisotrópicas, e reproduzida abaixo, é possível obter as expressões para o momento torsor e fletor em cada uma delas.

$$M_x = -\frac{B_1}{24} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 22 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] \quad (2.16)$$

$$M_{xy} = -\frac{C_1}{24} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{m-1} + 22 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{m+1} \right] \quad (2.17)$$

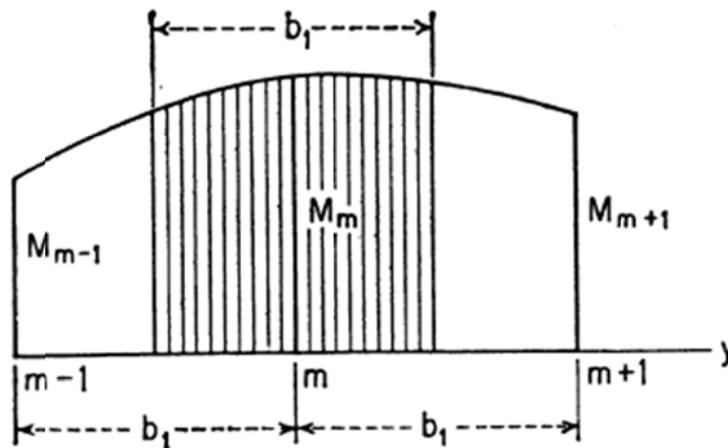


Figura 2.9 – Cálculo do momento por nervura através do momento por unidade de comprimento, *Theory of plates and shells* [13].

2.6.

Procedimentos Numéricos e Analíticos

2.6.1.

Método dos Elementos Finitos

2.6.1.1.

Fundamentos Teóricos

Na maioria dos problemas de engenharia, especialmente quando sistemas estruturais são considerados, não é possível a obtenção de uma solução analítica. Nesses casos é adotada uma metodologia numérica que produza uma solução aproximada. Um procedimento idealizado para tal fim é o método dos elementos finitos. Nesse método um meio contínuo é discretizado em elementos finitos, compondo para cada elemento um conjunto de equações que sejam solucionadas numericamente. O método dos elementos finitos (MEF) é a metodologia mais utilizada na solução de problemas de engenharia estrutural.

Uma estrutura pode ser modelada de diversas maneiras, a escolha do melhor modelo depende das hipóteses simplificadoras adotadas pelo engenheiro e do grau de precisão desejado. Este passo consiste na idealização do modelo, quando é escolhido, em primeiro lugar, qual a dimensionalidade do modelo, i.e., 1D, 2D ou 3D. Uma vez decidido isso, seleciona-se o melhor elemento para discretização do contínuo quando este for discretizado em elementos. Subsequentemente são selecionadas as propriedades dos materiais que melhor caracterizam aquele problema. Finalmente decide-se as condições de contorno e de carregamento que melhor representam o problema considerado.

O processo de discretização consiste na subdivisão do contínuo (ou estrutura) a ser analisado em elementos simples. Os elementos são conectados entre si através de nós que possuem graus de liberdade (GDL) associados. Estes representam a liberdade que cada nó tem em transladar ou rotacionar e também apresentam a solução numérica. Os resultados são encontrados nos graus de liberdade dos nós. A obtenção dos deslocamentos e rotações em qualquer outro

ponto do elemento são obtidos através de interpolação usando funções de forma ou de interpolação.

Podemos então resumir os passos para solução de um problema através do método dos elementos finitos a partir das etapas expostas:

- Divisão da estrutura ou do contínuo em elementos finitos;
- Formulação das propriedades de cada elemento;
- Montagem dos elementos antes desfragmentados;
- Aplicação das forças nodais;
- Aplicação das condições de contorno;
- Solução simultânea das equações algébricas para determinação dos deslocamentos e rotações nos graus de liberdade;
- Interpolação do campo dos deslocamentos para a obtenção das tensões..

2.6.1.2.

Elementos e Convergência

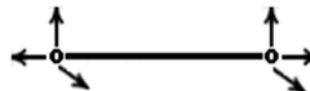
As soluções encontradas nos problemas de engenharia são sempre aproximadas, devido às inúmeras simplificações feitas durante o procedimento de cálculo. No MEF, deve-se ter conhecimento dos graus de liberdade de cada elemento, e o que as simplificações representam na solução da estrutura global, a fim de gerar a menor quantidade de erros possíveis de modelagem.

- Elementos 1D (lineares ou curvilíneos)

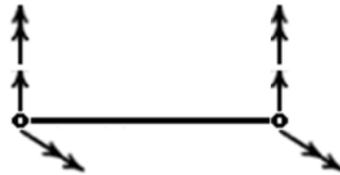
Treliça: GDL somente a translação nos eixos x e y .



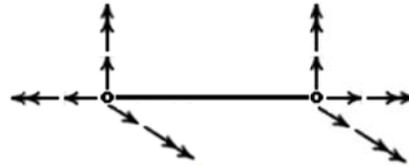
Barra: GDL somente a translação nos eixos x , y e z .



Viga: GDL a translação e rotação nos eixos x e y .

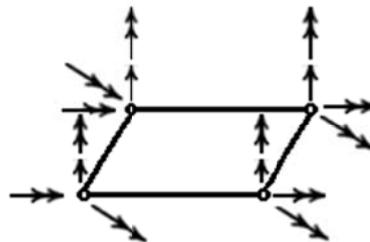


Pórtico: GDL a translação e rotação em todos os eixos.

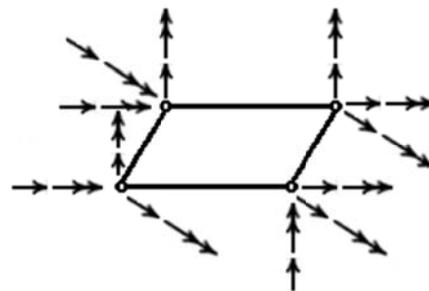


- Elementos 2D (elementos triangulares ou quadrangulares)

Placa: GDL a translação no eixo z e rotação nos eixos x e y .

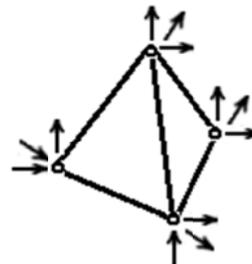


Casca: GDL a translação e rotação em todos os eixos.

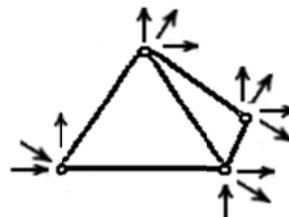


- Elementos 3D (elementos sólidos)

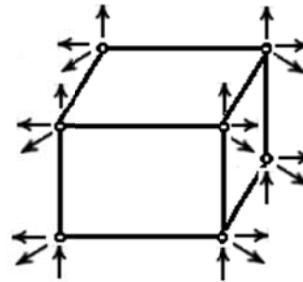
Tetraedros: GDL a translação em todos os eixos.



Pentaedros: GDL a translação em todos os eixos.



Hexa: GDL a translação em todos os eixos.



Nos elementos sólidos, os nós apresentam somente GDL relativos aos três deslocamentos. Estes elementos são capazes de representar a geometria do modelo físico mais precisamente, no entanto, o seu custo computacional tende a ser muito mais alto quando comparado a outros tipos de elementos.

Para problemas envolvendo vigas e colunas, com exceção daquelas onde não se aplica a teoria de Euler-Bernoulli como as vigas paredes, um elemento que apresenta uma rápida convergência com pouco número de elementos é o de pórtico, sendo este geralmente adotado em programas comerciais. Para o caso de lajes, os elementos planos como a placa e casca representam bem o modelo físico.

Para adotar os resultados obtidos, deve-se garantir que o modelo apresentou convergência, ou seja, a medida que a malha de elementos finitos é refinada os resultados tendem a convergir para uma solução única.

Para a maioria das aplicações de engenharia estrutural, elementos com formulação baseadas em polinômios lineares e quadráticos são tipicamente suficientes para representar o seu comportamento. Malhas de elementos baseados em funções quadráticas com o mesmo nível de refinamento tendem a convergir mais rapidamente.

2.6.1.3.

Método dos Elementos Finitos Baseado em Deslocamentos

Nessa seção serão apresentadas as equações necessárias para o MEF baseado em deslocamentos, assim como a formulação das matrizes de rigidez e o vetor de forças nodais, a fim de se ter equacionado qualquer elemento necessário para representar uma estrutura real. Esse procedimento será feito de forma gradativa, começando com um elemento de barra, seguido por um elemento de

viga, concluindo nos elementos isoparamétricos utilizados no estado plano de tensão. A formulação das equações será realizada através da formulação variacional baseado no princípio da energia potencial total.

Um sistema é dito conservativo quando o trabalho das forças internas e o trabalho dos carregamentos externos não são dependentes da deformada da estrutura, ou seja, o corpo pode se deformar de diversas maneiras e os valores dos trabalhos não mudarão. Cook [5] cita que todas as configurações que satisfazem as equações de equilíbrio de um sistema conservativo, compõem o princípio da Energia Potencial Estacionária (EPE) em respeito a pequenos deslocamentos admissíveis. Portanto, quando o valor da energia potencial corresponder a um mínimo, o equilíbrio é estável.

$$\Pi = U + \Omega \quad (2.18)$$

$$U = \frac{1}{2} K D^2 \quad (2.19)$$

$$\Omega = -P D \quad (2.20)$$

$$\Pi = U + \Omega = \frac{1}{2} K D^2 - P D \quad (2.21)$$

A configuração de equilíbrio D_{eq} é obtida minimizando a energia potencial do sistema, resultando em:

$$d\Pi = (kD_{eq} - P)dD = 0 \Rightarrow D_{eq} = \frac{P}{k} \Rightarrow P = k D_{eq} \quad (2.22)$$

A formulação anterior é aplicada para um único grau de liberdade, no entanto uma análise em elementos finitos usualmente utiliza centenas de GDL. Portanto, podemos obter a energia potencial mínima através do cálculo diferencial da Equação 2.23.

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial d_i} = 0 \quad (2.23)$$

Onde o índice i é usado para se referir ao grau de liberdade d_i .

Para sistemas elásticos o trabalho das forças internas é igual à variação na energia de deformação, logo temos que a energia potencial total nestes sistemas é igual à soma da energia de deformação integrada no volume e o potencial de

trabalho externo exercido pelas forças de corpo ou de superfície, sendo esta função dos deslocamentos desconhecidos em x .

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{F}{A} \varepsilon A dx = \frac{1}{2} \int_0^L F \varepsilon dx$$

Onde:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = u'$$

$$F = E A \varepsilon$$

Logo;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (E A u') u' dx = \frac{1}{2} \int_0^L u' E A u' dx \quad (2.24)$$

$$W^e = \int_{x_1}^{x_2} q u dx \quad (2.25)$$

Ainda no pré-processamento é necessário informar dados sobre a geometria do modelo. Internamente, o programa de elementos finitos relaciona as coordenadas fornecidas no sistema cartesiano com as coordenadas do sistema natural através das funções de forma. Cada elemento em específico contém suas funções de forma implementadas. Para elementos isoparamétricos essas mesmas funções são também utilizadas para interpolar os deslocamentos e rotações dos nós (Equação 2.26).

$$\{u\} = [N] \{u^e\} \quad (2.26)$$

Outro conceito importante é a matriz de transformação cinemática $[B]$, que relaciona os deslocamentos às deformações a nível do elemento através das equações de compatibilidade (Equação 2.27).

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \{u\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] [N] \{d^e\} = [B] \{d^e\} \quad (2.27)$$

Por fim, com a matriz de transformação cinemática e as funções de forma para um elemento em função do sistema de coordenadas naturais, pode-se formular a matriz de rigidez e o vetor de força nodal global utilizando o conceito de energia de deformação através da formulação forte.

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^e)^T B^T E A B u^e l d\xi$$

$$U^e = \frac{1}{2} (u^e)^T \int_0^1 E A B^T B l d\xi u^e \quad (2.28)$$

$$K = \int_0^1 E A B^T B l d\xi \quad (2.29)$$

$$W^e = \int_{x_1}^{x_2} q u dx = \int_0^1 q N^T u^e l d\xi \quad (2.30)$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_V d^T B^T \cdot E \cdot B \cdot d \cdot dV - \int_S d^T N^T \cdot \varphi \cdot dS - \int_V d^T N^T \cdot F_b \cdot dV \quad (2.31)$$

2.6.1.4.

Integração Numérica por Pontos de Gauss

A integração da matriz de rigidez para elementos genéricos não pode ser obtida analiticamente, sendo então utilizada a integração numérica para executar tal tarefa. Esta pode ser realizada através das fórmulas de Newton-Cotes, da regra dos retângulos, ou através da regra da quadratura de Gauss, sendo esta a qual se obtém melhores resultados para o MEF.

A quadratura de Gauss consiste em uma aproximação numérica da função desejada através de um somatório de funções pesos, avaliadas em um número mínimo de pontos necessários para obter um resultado satisfatoriamente próximo. A integração clássica de Gauss em uma dimensão dá-se no intervalo de $[-1,1]$, e é definida como:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^p w_i F(\xi_i) \quad (2.32)$$

Onde:

w : Peso da integração;

p : Número de pontos de Gauss;

$F(\xi)$: Função a ser integrada em ξ .

Pra o caso de elementos planos, i.e., em duas dimensões, o cálculo da integração numérica em função de duas variáveis deve obedecer à formulação abaixo.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi$$

$$= \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$
(2.33)

Onde:

w : Peso da integração;

p : Número de pontos de Gauss;

$F(\xi, \eta)$: Função a ser integrada nas direções ξ e η .

Para obter a quantidade mínima de pontos necessários a serem utilizados para integrar uma determinada função, faz-se uso da Equação 2.34, sendo esta utilizada para elementos unidimensionais e bidimensionais.

$$n = 2p - 1$$
(2.34)

Onde:

n : grau do polinômio a ser integrado;

p : Número de pontos de Gauss.

2.6.2. Grelha Equivalente

O método da grelha equivalente ou analogia de grelha consiste na discretização da laje em um conjunto de elementos de viga interconectados formando uma malha. É possível simplificar o conceito físico da teoria das placas de Kirchhoff alegando que as cargas externas aplicadas na laje são equilibradas pela combinação dos momentos fletores e torsores nas duas direções ortogonais.

O processo de definição da malha para as lajes nervuradas é ditado pela posição das nervuras. Cada elemento de viga é situado em seus eixos e as características geométricas da seção transversal são adotadas em função da inércia

à flexão e à torção. Com isso é possível a obtenção da solução para qualquer geometria, assim como para elementos com rigidez ou não a torção, e para a possível flexibilidade dos apoios, não somente para os indeslocáveis transversalmente.

O carregamento neste método é distribuído entre os elementos da grelha de acordo com as faixas de laje que representam cada barra, ou seja, a área de influência de cada uma. Esse carregamento é então distribuído linearmente entre os elementos, que por sua vez é repassado aos nós.

Sabemos que a laje é um elemento bidimensional, podendo ser analisada pela teoria das placas de Kirchhoff, portanto, os momentos fletores em um elemento dependem tanto da curvatura em uma direção, quanto da curvatura na direção ortogonal. Já para as vigas, elementos unidimensionais, os momentos fletores nas barras só dependem da sua curvatura axial. Essa simplificação gera erros nos deslocamentos, esforços e deformações que são aceitáveis em obras de engenharia, pois os resultados encontrados apresentam valores a favor da segurança.

Para medir os deslocamentos, com o elemento de viga apresenta dois GDL à rotação e dois GDL à translação, que no caso estudado é suficiente para descrever satisfatoriamente seu comportamento. Na consideração de faixas isoladas, o coeficiente de Poisson não influencia na rigidez (Equação 2.35), diferentemente da placa (Equação 2.36).

$$D_{viga} = E \frac{bh^3}{12} \quad (2.35)$$

$$D_{placa} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.36)$$

Onde:

D_{viga} : Rigidez da viga;

No entanto o coeficiente de Poisson influencia no módulo de elasticidade transversal usado no estudo pelas grelhas, gerando uma diferença nos resultados entre os métodos. A partir das equações 2.37 e 2.38, observamos que para a teoria de Kirchhoff, com o aumento do coeficiente de Poisson há um aumento na

rigidez, o que diminui o deslocamento. Por outro lado, para a grelha, com o aumento de ν a rigidez diminui, e conseqüentemente os deslocamentos aumentam.

$$G_{placa} = \frac{1}{1 - \nu^2} \geq 1 \quad (2.37)$$

$$G_{viga} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \leq 1 \quad (2.38)$$

Onde:

G : Módulo de elasticidade transversal.

Para as deformações, a diferença entre os métodos se dá devido ao confinamento lateral existente no modelo de placa para cada elemento infinitesimal, o que não ocorre nas vigas da grelha, pois estas são peças lineares com comportamento em uma única direção. Essas diferenças são abordadas pela NBR 6118:2007 [1] e absorvidas através de um aumento de aproximadamente 15% da rigidez elástica devido à ausência da rigidez a torção.

O processo simplificado para o cálculo através do método da grelha equivalente consiste na utilização de equações da estática. Para o caso de lajes contínuas é feita a simplificação considerando a laje isolada com os bordos de contato analisados como engastados.

2.6.3. Métodos Empíricos

O grande volume de projetos fez com que os engenheiros buscassem métodos mais práticos e rápidos para o cálculo de lajes, resultando em coeficientes e Tabelas para o auxílio desta tarefa. Dentre os mais adotados estão as Tabelas de Marcus e de Czerny.

Marcus primeiramente utilizou a teoria matemática da elasticidade para desenvolver sua hipótese, partindo da integração das equações derivadas parciais fornecidas pela elasticidade e empregando o método das diferenças finitas. Notoriamente esse processo ainda seria demorado e trabalhoso para engenheiros que desejassem fazer o dimensionamento das lajes de maneira mais prática, por isso, Marcus desenvolveu de forma teórica e experimental coeficientes por meio

semi-empírico, comparando-os com os resultados obtidos pela sua primeira hipótese.

Supondo as lajes estaticamente isoladas com um tecido de malhas retangulares, foi sugerido um coeficiente que é adicionado às equações do método das grelhas a fim de corrigir a ausência do momento torsor. Como o coeficiente é menor que um, os momentos positivos terão valores menores para a laje.

No entanto, o processo simplificado de Marcus apresenta erros significativos quando as placas contínuas possuem vãos muito diferentes. As Tabelas apresentadas por Czerny são mais precisas e também são baseadas na teoria da elasticidade com a suposição que o coeficiente de Poisson é nulo, podendo ser incorporado posteriormente.

2.7.

Programas Computacionais para Análise de Estruturas

A grande quantidade de equações geradas pelo método dos elementos finitos torna por diversas vezes difícil e trabalhoso a busca por suas soluções. Por esse motivo, o MEF era pouco utilizado antes do surgimento de computadores capazes de resolver os sistemas criados por este método. No entanto, com a evolução dos computadores tornou-se possível o uso da mecânica computacional, que de acordo com Felippa [7], resolve problemas por um modelo baseado na simulação através de métodos numéricos implementados.

Os projetistas estruturais no Brasil comumente utilizam o programa TQS, que para o cálculo de lajes utiliza o método das grelhas na obtenção dos esforços. Este programa é bastante difundido no país, pois os dimensionamentos das peças de concreto armado e protendido são baseados na NBR 6118:2007 [1], além de apresentar boas ferramentas de detalhamento. Programas como o SAP 2000, ADAPT, Ansys, Autodesk Robot, entre outros, são bastante utilizados para a análise em elementos finitos, o que os torna mais preciso.

2.7.1. Autodesk Robot

O Robot é um programa comercial da empresa Autodesk que vem se tornando popular por apresentar uma boa interoperabilidade com o Revit Structure, IFC, CIS2 entre outras interfaces que são aplicáveis pra o processo BIM (*Building Information Modeling*). Ele é utilizado na modelagem e análise por elementos finitos, assim como no dimensionamento através de diversas normas internacionais de estruturas de concreto armado, concreto protendido, aço, entre outros materiais.

Seu poder na análise estrutural, sua facilidade de desenho e modelagem (apresenta características para estas finalidades que outros programas da plataforma Autodesk contem), e o GUI (*Graphical User Interface*), tornaram o Robot uma ferramenta desejada pelas empresas de projeto estrutural, pois com ele é possível confeccionar a documentação solicitada pelas construtoras.

Diversos tipos de análises são possíveis com esse programa, dentre elas a análise linear, não linear e dinâmica (modal, espectral, sísmica), sendo as peças estudadas isoladas, acopladas, ou até mesmo no modo de multi-level (para o caso de edifícios com diversos níveis). Todas elas podem ser realizadas através de módulos que contem elementos de placa, casca, barra, treliça, pórtico, sólido, cálculo pelo método das grelas, ou que contemplem o estado plano de tensão ou o estado plano de deformação.

O Robot permite ao usuário a liberdade de escolha no tipo de elemento, como por exemplo quadriláteros ou triângulos, e no tipo de discretização (*Coons, Delaunay*). Em contrapartida ele disponibiliza apenas elementos baseados em interpolação linear, ocasionando a necessidade de maior discretização para obtenção de um resultado satisfatório.

Para comodidade do projetista, o programa apresenta diferentes ferramentas como diversas combinações de cargas, carregamentos (pontual, distribuída linearmente ou não linear, momentos, cargas devidas à temperatura, cargas proveniente da protensão, peso próprio, etc), condições de apoios, seções em estruturas de aço, *offsets*, dentre outras, sendo possível a adição de novos elementos ou edição dos existentes para utilização em projetos específicos.