



Ítalo Linhares Salomão

**Análise numérica da eficiência de lajes
nervuradas tridirecionais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Profa. Marta de Souza Lima Velasco
Co-Orientador: Profa. Elisa Dominguez Sotelino

Rio de Janeiro
Janeiro de 2014



Ítalo Linhares Salomão

**Análise numérica da eficiência de lajes
nervuradas tridirecionais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Marta de Souza Lima Velasco

Orientadora

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Profa. Elisa Dominguez Sotelino

Co-Orientadora

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Eduardo César Cordeiro Leite

Universidade de Fortaleza

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de janeiro de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ítalo Linhares Salomão

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade de Fortaleza (Ceará, Brasil) em 2011. Trabalhou na área de projetos de estruturas de concreto armado e protendido na empresa *Structurale*. Desenvolveu junto com os seus orientadores durante o Mestrado modelos representativos de lajes nervuradas.

Ficha Catalográfica

Salomão, Ítalo Linhares

Análise numérica da eficiência de lajes nervuradas tridirecionais / Ítalo Linhares Salomão ; orientadora: Marta de Souza Lima Velasco ; co-orientadora: Elisa Dominguez Sotelino. – 2014.

107 f. il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2014.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Elementos finitos. 3. Laje nervurada. 4. Laje nervurada rotacionada. 5. Laje nervurada tridirecional. I. Velasco, Marta de Souza Lima. II. Sotelino, Elisa Dominguez. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Dedico este trabalho a Edna Salomão, pelo apoio dado
através do amor incondicional de mãe.

Agradecimentos

Aos meus pais, irmã e cunhado que decidiram apoiar minhas decisões e me guiar através das incertezas.

Aos que inicialmente e continuamente cultivaram junto comigo a paixão pela engenharia civil, dentre elas cito Cássio, Georgiana e Anderson.

Aos amigos da Pós-Graduação que tão rapidamente se tornaram uma segunda família em uma cidade até então estranha, aos *Snakes* (Helvio, Graciele e Patrick), por uma irmandade jamais esperada, tendo posteriormente agregado mais pessoas como Carlos e Magno.

A todos aqueles que me acompanharam fora da faculdade, Wetter, Duan, Elida, Luiz, Tia Ana, Gisele e Leonardo, a quem tem me auxiliado de uma maneira singular, se mostrando uma pessoa que desejo ter ao meu lado sempre.

Às professoras Marta Velasco e Elisa Sotelino pela orientação de forma tão competente e afetuosa tornando esse processo mais fluido.

Aos que me transmitiram ética e profissionalismo, além de todo o conhecimento, agradeço a Eduardo Leite, Letícia Leite e Elaine Ponte.

A empresa Impacto Protensão, por manter as portas abertas para o desenvolvimento de novas pesquisas.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos durante o curso de mestrado.

Resumo

Salomão, Ítalo Linhares; Velasco, Marta de Souza Lima (Orientador); Sotelino, Elisa Dominguez (Co-Orientador). **Análise numérica da eficiência de lajes nervuradas tridirecionais**. Rio de Janeiro, 2013, 107pp. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As lajes nervuradas quando comparadas às lajes maciças apresentam redução do volume de concreto, não comprometem a eficiência da estrutura e permitem a construção de lajes mais econômicas e com maiores vãos. Este trabalho tem como objetivo verificar o comportamento de três tipos de lajes nervuradas: a laje nervurada tradicional, a laje nervurada rotacionada e a laje nervurada tridirecional. Na primeira fase deste trabalho foi realizado um estudo comparativo de vários modelos usando diferentes tipos de elementos, a fim de determinar aquele que melhor representa o comportamento das lajes nervuradas. O modelo selecionado utiliza elementos de casca para representar a capa de concreto e elementos de viga para representar as nervuras, ambos com seis graus de liberdade por nó. Elementos de ligação rígida foram usados para conectar os elementos de casca e os de viga a fim de capturar a posição relativa entre a capa e as nervuras. Uma vez selecionado o modelo, foi desenvolvido um estudo dos sistemas bidirecional, rotacionado e tridirecional, no regime elástico-linear. Os resultados encontrados através do programa de elementos finitos *Robot* permitiram comparar os três tipos de lajes em termos dos deslocamentos obtidos no Estado Limite de Serviço, da quantidade de aço determinada através do dimensionamento no Estado Limite Último, e do volume de concreto. As lajes nervuradas tradicionais apresentaram um comportamento estrutural melhor, com lajes mais rígidas e mais econômicas sob o ponto de vista da quantidade de materiais utilizados.

Palavras-chave

Elementos Finitos; Laje Nervurada; Laje Nervurada Rotacionada; Laje Nervurada Tridirecional.

Abstract

Salomão, Ítalo Linhares; Velasco, Marta de Souza Lima (Advisor); Sotelino, Elisa Rodrigues (Co-Advisor). **Numerical analysis of the efficiency of three-way slabs.** Rio de Janeiro, 2013, 107pp. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

When compared to flat slabs, the waffle slabs reduce the volume of concrete, do not compromise the efficiency of the structure and also allow the construction of more economical slabs with longer spans. This study intends to investigate the behavior of three types of waffle slabs: a traditional waffle slab, a rotated ribbed slab and three-way slab. In the first part of this study, it was carried out a comparative analysis of various models using different types of finite element techniques in order to determine which one best represents the behavior of waffle slabs. The selected model uses shell elements to represent the concrete cover and beam elements to represent the ribs, both with six degrees of freedom per node. Rigid link elements were used to connect the shell elements and the beam elements in order to capture the relative position between the concrete cover and the ribs. Once the model was selected, a study of two-way, three-way and rotational systems were developed in the linear elastic regime. The results found using the finite element program Robot allowed the comparison between the three types of slabs in terms of, displacements obtained from the Service Limit State, amount of steel determined by designing in the Ultimate Limit State and volume of concrete. The traditional ribbed slabs had an overall better structural behavior, resulting in slabs that are more rigid and more economical from the point of view of the amount of materials used.

Keywords

Finite Elements; Waffle Slabs, Rotated Waffle Slabs, Three-way Waffle Slabs.

Sumário

| | | |
|----------|---|----|
| 1. | Introdução | 17 |
| 1.1. | Motivação..... | 18 |
| 1.2. | Objetivos | 18 |
| 1.3. | Estrutura do Trabalho | 19 |
| 2. | Pesquisa Bibliográfica..... | 20 |
| 2.1. | Considerações Gerais Sobre Lajes..... | 20 |
| 2.2. | Lajes Maciças..... | 22 |
| 2.2.1. | Considerações Gerais | 22 |
| 2.2.2. | Prescrições Normativas (NBR 6118:2007)..... | 23 |
| 2.3. | Lajes Nervuradas | 24 |
| 2.3.1. | Considerações Gerais | 24 |
| 2.3.2. | Prescrições Normativas (NBR 6118:2007)..... | 26 |
| 2.4. | Lajes Tridirecionais | 26 |
| 2.4.1. | Considerações Gerais | 26 |
| 2.4.2. | Método Construtivo e Detalhamento | 30 |
| 2.4.3. | Lajes Contínuas Ligadas por Vigas Faixas Nervuradas | 31 |
| 2.5. | Métodos de Análise..... | 32 |
| 2.5.1 | Teoria das Placas | 33 |
| 2.5.1.1. | Teoria Clássica das Placas Delgadas | 34 |
| 2.5.1.2. | Momento em uma Placa Anisotrópica..... | 35 |
| 2.6. | Procedimentos Numéricos e Analíticos | 36 |
| 2.6.1. | Método dos Elementos Finitos | 36 |
| 2.6.1.1. | Fundamentos Teóricos..... | 36 |
| 2.6.1.2. | Elementos e Convergência | 37 |
| 2.6.1.3. | Método dos Elementos Finitos Baseado em Deslocamentos | 39 |
| 2.6.1.4. | Integração Numérica por Pontos de Gauss..... | 42 |
| 2.6.2. | Grelha Equivalente | 43 |
| 2.6.3. | Métodos Empíricos | 45 |
| 2.7. | Programas Computacionais para Análise de Estruturas | 46 |
| 2.7.1. | Autodesk Robot..... | 47 |
| 3. | Modelagem por Elementos Finitos | 48 |
| 3.1. | Validade do Modelo | 48 |

| | |
|---|-----|
| 3.2. Precisão do Modelo..... | 52 |
| 3.3. Ligação Rígida..... | 53 |
| 3.4. Resultados do Estudo de Convergência..... | 56 |
| 4. Estudo do Comportamento de Lajes Nervuradas..... | 66 |
| 4.1. Análise Numérica de Laje Nervurada Simplesmente Apoiada..... | 67 |
| 4.1.1. Laje Nervurada Ortogonal..... | 70 |
| 4.1.2. Laje Nervurada Rotacionada..... | 73 |
| 4.1.3. Laje Nervurada Tridirecional..... | 75 |
| 4.2. Análise Numérica de Lajes Nervuradas com Diversas Condições de Apoio..... | 77 |
| 4.3. Análise Numérica de Lajes Contínuas Ligadas por Vigas Faixas Nervuradas..... | 83 |
| 5. Análise dos Resultados..... | 87 |
| 5.1. Análise dos Resultados para Lajes Simplesmente Apoiada..... | 87 |
| 5.2. Análise dos Resultados para Lajes com Diversas Condições de Apoio..... | 92 |
| 5.3. Análise Numérica de Lajes Contínuas ligadas por Vigas Faixas Nervuradas..... | 97 |
| 6. Conclusões e Sugestões..... | 101 |
| 6.1. Conclusões..... | 101 |
| 6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros..... | 104 |
| Referências Bibliográficas..... | 106 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 – Laje Lisa, <i>Reinforced Concrete Slabs</i> [10] | 22 |
| Figura 2.2 – Laje cogumelo, <i>Reinforced Concrete Slabs</i> [10] | 23 |
| Figura 2.3 – Laje nervurada | 25 |
| Figura 2.4 – Modulação da forma de uma laje tridirecional, Análise Tridirecional em Lajes Nervuradas Protendidas [12] | 27 |
| Figura 2.5 – Sistema de escoramento de uma laje tridirecional | 30 |
| Figura 2.6 – Laje nervurada tridirecional, Sistema Construtivo Tridirecional para Construção de Lajes Nervuradas [3] | 31 |
| Figura 2.7 – Laje nervurada tridirecional | 32 |
| Figura 2.8 – Corpo livre a um ângulo α | 34 |
| Figura 2.9 – Cálculo do momento por nervura através do momento por unidade de comprimento, <i>Theory of plates and shells</i> [13] | 45 |
| Figura 3.1 – Forma da Laje nervurada | 50 |
| Figura 3.2 – Planta de locação da área de carregamento | 51 |
| Figura 3.3 – Modelos de viga com e sem excentricidade, Análise numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos [6] | 55 |
| Figura 3.4 – Laje nervurada gerada pelo Modelador TQS | 56 |
| Figura 3.5 – Deslocamento obtido pelo Modelador TQS | 57 |
| Figura 3.6 – Modelo de casca e viga sem ligações rígidas | 57 |
| Figura 3.7 – Malha de 25x25 cm ² para o modelo de casca e viga sem ligações rígidas | 58 |
| Figura 3.8 – Modelo de casca e viga com ligações rígidas | 58 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.9 – Modelo de elementos sólidos | 59 |
| Figura 3.10 – Planta de locação dos pontos de instrumentação | 59 |
| Figura 3.11 – Deslocamentos obtidos através do modelo com elementos de casca e viga sem consideração do <i>offset</i> | 60 |
| Figura 3.12 – Deslocamentos obtidos através do modelo com elementos de casca e viga com consideração do <i>offset</i> | 60 |
| Figura 3.13 – Deslocamentos obtidos através do modelo com elementos sólidos | 61 |
| Figura 3.14 – Gráfico comparativo dos deslocamentos | 62 |
| Figura 4.1 – Geometria das formas da laje tipo | 59 |
| Figura 4.2 – Laje de referência 1.1, Marcus caso 1 – 6x6 m ² ($\lambda=1$) | 70 |
| Figura 4.3 – Laje de referência 2.1, Marcus caso 1 – 6x4 m ² ($\lambda=1,5$) | 70 |
| Figura 4.4 – Laje de referência 3.1, Marcus caso 1 – 6x3 m ² ($\lambda=2$) | 71 |
| Figura 4.5 – Momentos principais nas direções x e y, $\lambda=1$ | 71 |
| Figura 4.6 – Laje de referência 1.2, Marcus caso 1 – 6x6 m ² ($\lambda=1$) | 74 |
| Figura 4.7 – Laje de referência 2.2, Marcus caso 1 – 6x4 m ² ($\lambda=1,5$) | 74 |
| Figura 4.8 – Laje de referência 3.2, Marcus caso 1 – 6x3 m ² ($\lambda=2$) | 74 |
| Figura 4.9 – Laje de referência 1.3, Marcus caso 1 – 6x6 m ² ($\lambda=1$) | 76 |
| Figura 4.10 – Laje de referência 2.3, Marcus caso 1 – 6x4 m ² ($\lambda=1,5$) | 76 |
| Figura 4.11 – Laje de referência 3.3, Marcus caso 1 – 6x3 m ² ($\lambda=2$) | 76 |
| Figura 4.12 – Lajes de referência no caso 2 de Marcus | 79 |
| Figura 4.13 – Lajes de referência no caso 4 de Marcus | 79 |
| Figura 4.14 – Lajes de referência no caso 5 de Marcus | 80 |
| Figura 4.15 – Lajes de referência no caso 7 de Marcus | 80 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.16 – Lajes de referência no caso 9 de Marcus | 81 |
| Figura 4.17 – Lajes de referência no caso 4 de Marcus | 82 |
| Figura 5.1 – Gráfico comparativo entre deslocamentos máximos no caso 1 | 87 |
| Figura 5.2 – Gráfico comparativo entre peso de aço nas nervuras no caso 1 | 89 |
| Figura 5.3 – Gráfico comparativo entre volume de concreto das nervuras no caso 1 | 90 |
| Figura 5.4 – Gráfico comparativo entre deslocamentos máximos | 92 |
| Figura 5.5 – Gráfico comparativo entre peso de aço nas nervuras | 94 |
| Figura 5.6 – Gráfico comparativo entre volume de concreto das nervuras | 95 |
| Figura 5.7 – Deslocamentos da laje bidirecional | 97 |
| Figura 5.8 – Deslocamentos da laje rotacionada | 97 |
| Figura 5.9 – Deslocamentos da laje com faixas nervuradas | 98 |
| Figura 5.10 – Gráfico comparativo entre deslocamentos máximos | 98 |
| Figura 5.11 – Gráfico comparativo entre peso de aço das nervuras e vigas faixa | 99 |
| Figura 5.12 – Gráfico comparativo entre volume de concreto das nervuras e vigas faixa | 100 |

Lista de Tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 3.1 – Quadro comparativo da convergência dos deslocamentos, Análise numérica do comportamento de pavimentos constituídos de lajes lisas de concreto protendido [9] | 53 |
| Tabela 3.2 – Quadro comparativo dos deslocamentos nos diversos modelos estudados | 61 |
| Tabela 3.3 – Quadro comparativo dos deslocamentos entre modelos estudados | 62 |
| Tabela 3.4 – Quadro comparativo dos deslocamentos obtidos em um modelo com variação de malha | 63 |
| Tabela 3.5 – Quadro apresentando a quantidade de nós nos diversos modelos estudados | 64 |
| Tabela 4.1 – Propriedades mecânicas dos materiais empregados | 67 |
| Tabela 4.2 – Deslocamentos, peso de aço e volume de concreto para lajes ortogonais, no caso 1 | 72 |
| Tabela 4.3 – Verificação da tensão de compressão das bielas, no caso 1 | 72 |
| Tabela 4.4 – Deslocamentos, peso de aço e volume de concreto para lajes rotacionadas, no caso 1 | 75 |
| Tabela 4.5 – Verificação da tensão de compressão das bielas, no caso 1 | 75 |
| Tabela 4.6 – Deslocamentos, peso de aço e volume de concreto para lajes tridirecionais, no caso 1 | 77 |
| Tabela 4.7 – Verificação da tensão de compressão das bielas, no caso 1 | 77 |
| Tabela 4.8 – Deslocamentos, peso de aço e volume de concreto para lajes | 82 |
| Tabela 4.9 – Verificação da tensão de compressão das bielas | 83 |

| | |
|---|-----|
| Tabela 4.10 – Deslocamentos, peso de aço e volume de concreto para lajes | 86 |
| Tabela 4.11 – Verificação da tensão de compressão das bielas | 86 |
| Tabela 5.1 – Comparação entre deslocamentos máximos no caso 1 | 88 |
| Tabela 5.2 – Comparação entre peso de aço nas nervuras no caso 1 | 89 |
| Tabela 5.3 – Comparação entre volume de concreto das nervuras no caso 1 | 91 |
| Tabela 5.4 – Comparação entre deslocamentos máximos | 93 |
| Tabela 5.5 – Comparação entre peso de aço nas nervuras | 94 |
| Tabela 5.6 – Comparação entre volume de concreto das nervuras | 96 |
| Tabela 5.7 – Comparação entre deslocamentos máximos | 98 |
| Tabela 5.8 – Comparação entre peso de aço das nervuras e vigas faixas | 99 |
| Tabela 5.9 – Comparação entre volume de concreto das nervuras e vigas faixas | 100 |

Lista de Símbolos

Letras Romanas Maiúsculas

| | |
|------------|---|
| P | Força externa |
| N | Função de forma |
| G | Módulo de elasticidade transversal |
| q | Carga imposta na placa ou na barra |
| A | Área da seção transversal |
| F | Força axial |
| V_x, V_y | Força Cortante |
| E | Módulo de elasticidade ou módulo de Young |

Letras Romanas Minúsculas

| | |
|--------------------|---|
| m_x, m_y, m_{xy} | Momento |
| u' | Deslocamento axial |
| k | Matriz de rigidez |
| h | Espessura da placa |
| w | Deflexão da placa na direção do carregamento no ponto |

Letras Gregas

| | |
|--|--|
| ν | Coefficiente de Poisson |
| Ω | Trabalho exercido pelas forças externas |
| $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ | Tensão |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ | Deformação específica |
| λ | Relação entre vãos da laje |
| Π | Energia potencial |
| U | Energia Interna ou energia de deformação |

Lista de Abreviaturas

| | |
|-----|--------------------------------|
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| ELS | Estado Limite de Serviço |
| ELU | Estado Limite Último |
| GUI | Graphical User Interface |
| BIM | Building Information Modeling |
| GDL | Grau de Liberdade |
| MRD | Método da Rigidez Direta |
| EPE | Energia Potencial Estacionária |
| NBR | Norma Brasileira Registrada |