

## 4

# FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE DINÂMICA.

Apresenta-se neste capítulo a formulação para análise dinâmica do arco abatido. O princípio de Hamilton é utilizado para se obter a equação de movimento do sistema.

### 4.1. Equação Diferencial de Movimento

Para obter a equação que descreve o movimento da estrutura quando esta é submetida a um carregamento dinâmico, emprega-se a equação:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}_1(t)} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_1(t)} \right) = 0 \quad (4.1)$$

conhecida como equação de Euler-Lagrange.

Para isto, precisa-se da função de Lagrange do sistema, dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{T} - \bar{\Delta}\pi_t \quad (4.2)$$

onde  $\bar{\Delta}\pi_t$  representa a variação da energia potencial adimensional total do arco e  $\bar{T}$  representa a energia cinética na sua forma adimensional.

O deslocamento total,  $V_{1T}(t)$ , pode ser escrito como a soma de um deslocamento estático inicial,  $V_1$ , mais a componente dependente do tempo,  $V_1(t)$ , ou seja:

$$V_{1T}(t) = V_1(t) + V_1 \quad (4.3)$$

Considera-se adicionalmente que o carregamento total  $\bar{q}_t$  é dado pela soma de um carregamento dinâmico  $\bar{q}(t)$  e de um pré-carregamento estático  $\bar{q}$ , ou seja:

$$\bar{q}_t = \bar{q}(t) + \bar{q} \quad (4.4)$$

Assim, a variação da energia potencial total do sistema produzida somente pelo carregamento dinâmico é dada por:

$$\frac{\Delta\pi_t}{AEL} = \frac{\Delta\pi_d}{AEL} - \frac{\Delta\pi_s}{AEL} \quad (4.5)$$

onde

$$\frac{\Delta\pi_d}{AEL} = A_0 (V_{1T}(t))^4 + B_0 (V_{1T}(t))^3 + C_0 (V_{1T}(t))^2 + \bar{q}_t D_0 V_{1T}(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{\Delta\pi_s}{AEL} = A_0 (V_1)^4 + B_0 (V_1)^3 + C_0 (V_1)^2 + \bar{q} D_0 V_1 \quad (4.7)$$

Inserindo as equações (4.6) e (4.7) em (4.5) e substituindo  $V_{1T}(t)$  pela equação (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta\pi}_t = & \left( (V_1(t) + V_1)^4 - V_1^4 \right) A_o + \left( (V_1(t) + V_1)^3 - V_1^3 \right) B_o \\ & + \left( (V_1(t) + V_1)^2 - V_1^2 \right) C_o + \left( \bar{q}_t (V_1(t) + V_1) - \bar{q} V_1 \right) D_o \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde as constantes  $A_0, B_0, C_0$  e  $D_0$  foram definidas no Capítulo 3.

Agora se define a energia cinética do sistema que é dada pela seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho A \left( \left( \frac{d\bar{v}_t}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{w}_t}{dt} \right)^2 \right) dz \quad (4.9)$$

Onde  $\frac{d\bar{v}_t}{dt}$  e  $\frac{d\bar{w}_t}{dt}$  representam as velocidades nas direções vertical e horizontal do arco, respectivamente,  $\rho$  é a massa por unidade de volume e  $t$ , o tempo.

Considerando, como no capítulo anterior, os parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \bar{z} = z/L; \quad \bar{v}_t = v_t/f; \quad \bar{w}_t = w_t/L; \quad \frac{d}{dz} = \frac{d}{Ldz} \\ \delta = f/L; \quad \bar{q}_t = \bar{q}(t) = \frac{q_t f}{EA}; \quad \gamma = \frac{r_x^2 f^2}{L^4}; \quad K_i = \frac{k_i L}{EA}; i=1,2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

tem-se:

$$\bar{T} = \frac{T}{AEL} = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho L^2}{E} \left( \delta^2 \left( \frac{d\bar{v}_t}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{w}_t}{dt} \right)^2 \right) d\bar{z} \quad (4.11)$$

De forma similar ao capítulo anterior, tem-se para  $\bar{w}_t$ :

$$\begin{aligned} \bar{w}_t = & \frac{8\delta^2 V_{1T}(t) \text{sen}(\pi\bar{z})}{\pi} - 8\delta^2 V_{1T}(t) \bar{z} \cos(\pi\bar{z}) + \frac{1}{4} \pi \delta^2 (V_{1T}(t))^2 \text{sen}(\pi\bar{z}) \cos(\pi\bar{z}) \\ & + \left( \frac{\delta^2 V_{1T}(t) K (V_{1T}(t) \pi^3 - 64)}{4\pi(K+4)} - \frac{1}{4} \delta^2 (V_{1T}(t))^2 \pi^2 \right) \bar{z} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Inserindo os parâmetros adimensionais (4.10) na equação (4.11) e substituindo  $V_{1T}(t)$  pela equação (4.3), tem-se:

$$\frac{T}{AEL} = (A_6 + B_6 V_1(t) + C_6 V_1^2(t)) \left( \frac{d(V_1(t))}{dt} \right)^2 \quad (4.13)$$

onde:

$$A_6 = \frac{\delta^2 \rho L^2}{12E} \left( \frac{128\delta^2 K^2}{\pi^2 (K+4)^2} + \frac{768\delta^2 K (\pi^2 - 12)}{\pi^4 (K+4)} + \frac{16\delta^2 (\pi^2 - 6)}{\pi^2} + 3 \right) \quad (4.14)$$

$$B_6 = \frac{\delta^4 \rho L^2}{6E} \left( -\frac{16K (3\pi^2 - 36 + K\pi^2 - 9K)}{\pi (K+4)^2} + \frac{4(9\pi^2 - 104)}{3\pi} + \frac{4K(\pi^2 - 3)}{\pi (K+4)} \right) \quad (4.15)$$

$$C_6 = \frac{\pi^2 \delta^4 \rho L^2}{12E} \left( \frac{\pi^2 K^2}{8(K+4)^2} - \frac{(\pi^2 - 3)K}{4(K+4)} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{9}{16} \right) \quad (4.16)$$

Uma vez obtida a energia cinética, (4.13), e à variação da energia potencial total, (4.8), obtém-se a função de Lagrange, (4.2). Substituindo a equação (4.2) na equação (4.1), obtém-se a seguinte equação diferencial não linear de movimento:

$$\begin{aligned} & (B_6 + 2C_6 V_1(t)) \left( \frac{d}{dt} V_1(t) \right)^2 + 2(A_6 + B_6 V_1(t) + C_6 V_1^2(t)) \frac{d^2}{dt^2} V_1(t) + 4A_0 V_1^3(t) \\ & + 3(B_0 + 3A_0 V_1) V_1^2(t) + 2(C_0 + 3B_0 V_1 + 6A_0 V_1^2) V_1(t) + \bar{q}_t D_0 + 2C_0 V_1 + 3B_0 V_1^2 + 4A_0 V_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Note-se que empregando o princípio da energia potencial estacionária ( $\frac{\partial(\Delta\pi/AEL)}{\partial V_1} = 0$ ), aplicado à equação (3.16), encontra-se a equação de equilíbrio estático, ou seja,  $\bar{q} D_0 + 2C_0 V_1 + 3B_0 V_1^2 + 4A_0 V_1^3 = 0$  que pode ser inserida na equação (4.17). Tem-se assim:

$$\begin{aligned} & (B_6 + 2C_6 V_1(t)) \left( \frac{d}{dt} V_1(t) \right)^2 + 2(A_6 + B_6 V_1(t) + C_6 V_1^2(t)) \frac{d^2}{dt^2} V_1(t) + 4A_0 V_1^3(t) \\ & + 3(B_0 + 3A_0 V_1) V_1^2(t) + 2(C_0 + 3B_0 V_1 + 6A_0 V_1^2) V_1(t) + \bar{q}(t) D_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Linearizando a equação diferencial de movimento (4.18), tem-se:

$$2A_6 \frac{d^2}{dt^2} V_1(t) + 2(C_0 + 3B_0 V_1 + 6A_0 V_1^2) V_1(t) + \bar{q}(t) D_0 = 0 \quad (4.19)$$

Considera-se que a estrutura está submetida a uma excitação harmônica da forma:

$$\bar{q}(t) = \bar{q}_o \text{sen}(\Omega t) \quad (4.20)$$

onde  $\bar{q}_o$  é a magnitude do carregamento dinâmico adimensional e  $\Omega$  é a frequência de excitação.

#### 4.1.1. Vibração Livre do Sistema.

O sistema é considerado em vibração livre se não há forças externas dinâmicas excitando o arco, ou seja,  $\bar{q}(t) = 0$ . Portanto, o carregamento adimensional  $\bar{q}_t$  esta em função somente do carregamento estático  $\bar{q}$ . Neste caso, a equação (4.19) toma a seguinte forma:

$$2A_6 \frac{d^2}{dt^2} V_1(t) + 2(C_0 + 3B_0V_1 + 6A_0V_1^2)V_1(t) = 0 \quad (4.21)$$

Levando (4.21) à forma característica de um sistema em vibração livre sem amortecimento tem-se:

$$\left( \frac{d^2 V_1(t)}{dt^2} \right) + \omega_o^2 V_1(t) = 0 \quad (4.22)$$

onde a frequência natural  $\omega_o$ , escrita em função da rigidez generalizada,  $K_o$ , e da massa generalizada,  $M_o$ , é dada por:

$$\omega_o^2 = \frac{K_o}{M_o} = \frac{2(C_0 + 3B_0V_1 + 6A_0V_1^2)}{2(A_6)} \quad (4.23)$$

$$M_o = 2A_6 \quad (4.24)$$

$$K_o = 2(C_0 + 3B_0V_1 + 6A_0V_1^2) \quad (4.25)$$

A solução da equação diferencial homogênea (4.22) que descreve o deslocamento vertical adimensional em função do tempo é dada por:

$$V_1(t) = \frac{vel_o}{\omega_o} \text{sen}(\omega_o t) + V_{1o} \text{cos}(\omega_o t) \quad (4.26)$$

onde  $vel_o$  e  $V_{1o}$  representam, respetivamente, a velocidade e o deslocamento inicial do sistema em  $t = 0$ .

#### 4.1.2. Vibração Forçada do Sistema.

Considerando agora  $\bar{q}(t) = \bar{q}_o \text{sen}(\Omega t)$  e a equação (4.19), tem-se:

$$2A_6 \frac{d^2}{dt^2} V_1(t) + 2(C_0 + 3B_0V_1 + 6A_0V_1^2)V_1(t) + \bar{q}_o \text{sen}(\Omega t) D_0 = 0 \quad (4.27)$$

Levando (4.27) à forma característica de um sistema em vibração forçado sem amortecimento tem-se:

$$\frac{d^2V_1(t)}{dt^2} + \omega_o^2 V_1(t) + Cte_1 \text{sen}(\Omega t) = 0 \quad (4.28)$$

onde:

$$Cte_1 = \frac{\bar{q}_d}{M_o} \quad (4.29)$$

$$\bar{q}_d = D_o \bar{q}_o \quad (4.30)$$

A solução da equação diferencial (4.28) que descreve o deslocamento vertical adimensional em função do tempo é dada por:

$$V_1(t) = Y_{\max} \text{sen}(\Omega t) + V_{1o} \cos(\omega_o t) - \frac{Y_{\max} \Omega - vel_o}{\omega_o} \text{sen}(\omega_o t) \quad (4.31)$$

onde:

$$r = \frac{\Omega}{\omega_o} ; \quad Y_{est} = \frac{\bar{q}_d}{K_o} ; \quad Y_{\max} = \frac{Y_{est}}{r^2 - 1} \quad (4.32)$$

Aqui  $r$  representa a relação entre a frequência de excitação e a frequência natural do sistema,  $Y_{est}$  e  $Y_{\max}$  são os deslocamentos estático e máximo, respectivamente, e  $vel_o$  e  $V_{1o}$  são as condições iniciais do sistema.

Na formulação acima, considerando  $V_1 = 0$ , obtém-se a equação diferencial para o arco parabólico sem carregamento estático inicial.

## 4.2. Princípio da Conservação da Energia - Plano de Fase do Sistema

Partindo do princípio da conservação da energia, tem-se:

$$\overline{\Delta \pi_t} + \bar{T} = \bar{C} \quad (4.33)$$

onde  $\bar{C}$  é uma constante que representa a energia total do sistema.

Inserindo as equações (4.8) e (4.13) na expressão (4.33), obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{C} = & \left( (V_1(t) - V_1)^4 - V_1^4 \right) A_o + \left( (V_1(t) - V_1)^3 - V_1^3 \right) B_o \\ & + \left( (V_1(t) - V_1)^2 - V_1^2 \right) C_o + \left( \bar{q}_t (V_1(t) - V_1) - \bar{q} V_1 \right) D_o \\ & + \left( A_6 + B_6 V_1(t) + C_6 V_1^2(t) \right) \left( \frac{d(V_1(t))}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Explicitando a velocidade na equação (4.34), é possível encontrar a solução analítica do sistema que defina a órbita no plano de fase associada a um par de condições iniciais.

$$\frac{d(V_1(t))}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{C} - \Delta\pi_t}{(A_6 + B_6 V_1(t) + C_6 V_1^2(t))}} \quad (4.35)$$

### 4.3. Frequência Natural do Sistema.

A frequência natural do sistema pode ser obtida a partir da equação (4.23). Novamente as características físicas e geométricas do arco parabólico são descritas na Tabela 2.1, enquanto os valores adotados para  $\lambda$  e  $\alpha$  estão dados na Tabela 3.1.

A Tabela 4.1 mostra as frequências naturais do sistema quando o arco encontra-se sem carregamento estático.

**Tabela 4.1** - Frequência natural  $\omega_o$  do sistema na configuração descarregada.

$\alpha \mid \lambda$	2.75	4.58	8.71	17.61
0	41.20	56.63	96.88	189.04
4	31.88	36.31	50.54	88.45
50	29.37	29.87	31.83	39.09

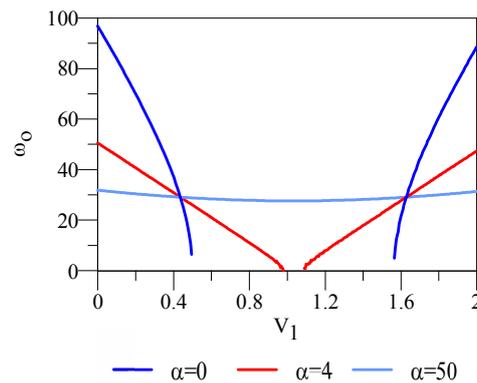
Como se observa na equação (4.23), a frequência natural da estrutura encontra-se em função da rigidez efetiva e da massa do sistema. Se a estrutura encontra-se submetida a um pré-carregamento estático, a rigidez do sistema varia, variando, portanto, a frequência  $\omega_o$ . Este efeito é ilustrado na Tabela 4.2, onde se mostra para  $\lambda = 8.71$  a variação da frequência com o nível de carga estática. Mostra-se que ao encontrar-se o arco submetido a um carregamento estático compressivo à medida que  $(qp/N_p)_{aprox}$  aumenta, o valor da rigidez efetiva do sistema diminui. Quando  $\omega_o$  se torna zero, tem-se a carga crítica do arco.

**Tabela 4.2** - Frequência natural  $\omega_o$  do arco em torno um carregamento estático,  $\lambda = 8.71$ .

$V_1$	$(qp/N)_{aprox}$			$\omega_o$		
	$\alpha=0$	$\alpha=4$	$\alpha=50$	$\alpha=0$	$\alpha=4$	$\alpha=50$
0.00	0.00	0.00	0.00	96.82	50.53	31.84
0.10	0.23	0.07	0.03	83.76	45.62	31.11
0.20	0.40	0.12	0.06	69.96	40.71	30.43
0.30	0.52	0.16	0.08	54.92	35.79	29.81
0.40	0.58	0.19	0.11	37.13	30.86	29.27
0.50	0.60	0.22	0.13	---	25.95	28.80
0.60	0.58	0.23	0.15	---	21.04	28.41
0.70	0.53	0.24	0.18	---	16.07	28.09

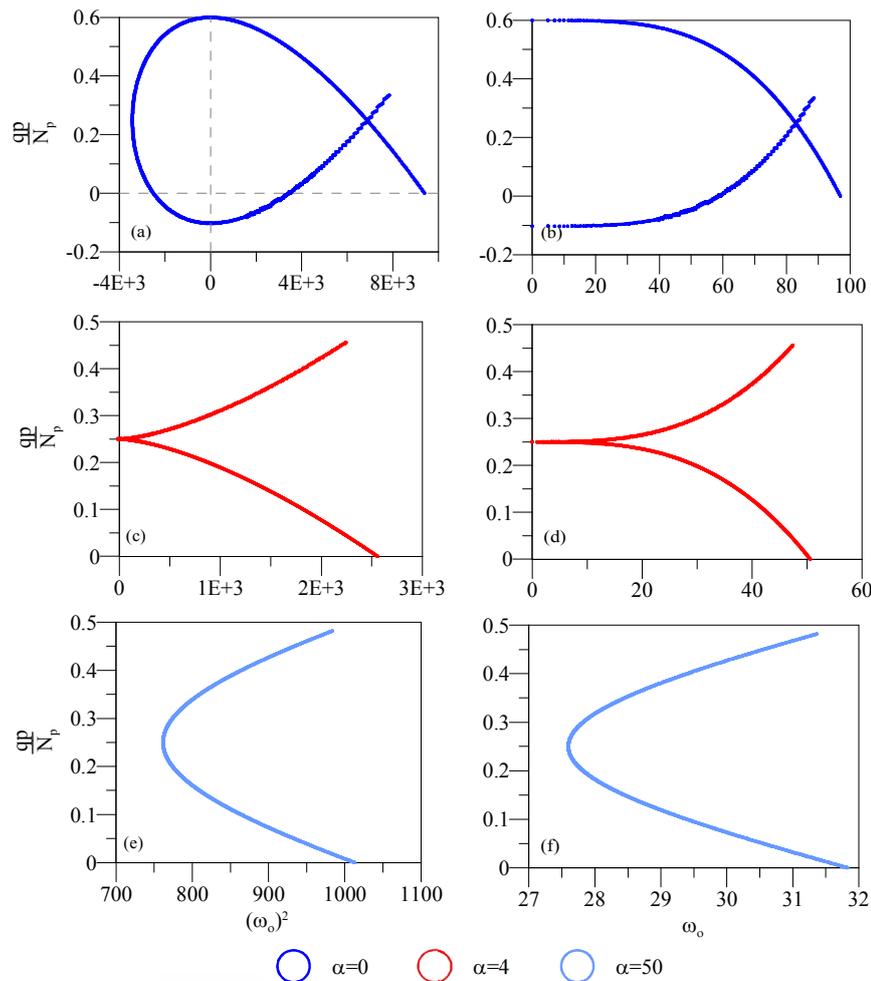
0.80	0.46	0.25	0.20	---	11.04	27.85
0.90	0.38	0.25	0.22	---	5.88	27.70
1.00	0.28	0.25	0.24	---	---	27.63
1.10	0.18	0.25	0.27	---	2.57	27.65
1.20	0.09	0.25	0.29	---	7.86	27.75
1.30	0.01	0.25	0.31	---	12.93	27.93
1.40	-0.05	0.26	0.33	---	17.92	28.20
1.50	-0.09	0.27	0.35	---	22.81	28.54
1.60	-0.09	0.29	0.38	21.66	27.74	28.97
1.70	-0.07	0.32	0.40	44.26	32.66	29.47
1.80	0.01	0.35	0.43	60.65	37.59	30.03
1.90	0.15	0.40	0.45	75.14	42.47	30.67
2.00	0.35	0.46	0.48	88.61	47.42	31.38

Na Figura 4.1 mostra-se a variação de  $\omega_o$  para um arco com  $\lambda = 8.71$  e diferentes valores de  $\alpha$ , em função do deslocamento  $V_1$  produzido pelo carregamento estático inicial.



**Figura 4.1** - Frequência natural  $\omega_o$  versus deslocamento estático  $V_1$ ,  $\lambda = 8.71$ .

Na Figura 4.2 mostra-se a variação de  $\omega_o$  e  $\omega_o^2$  com respeito ao parâmetro de carga  $qp/N_p$ .



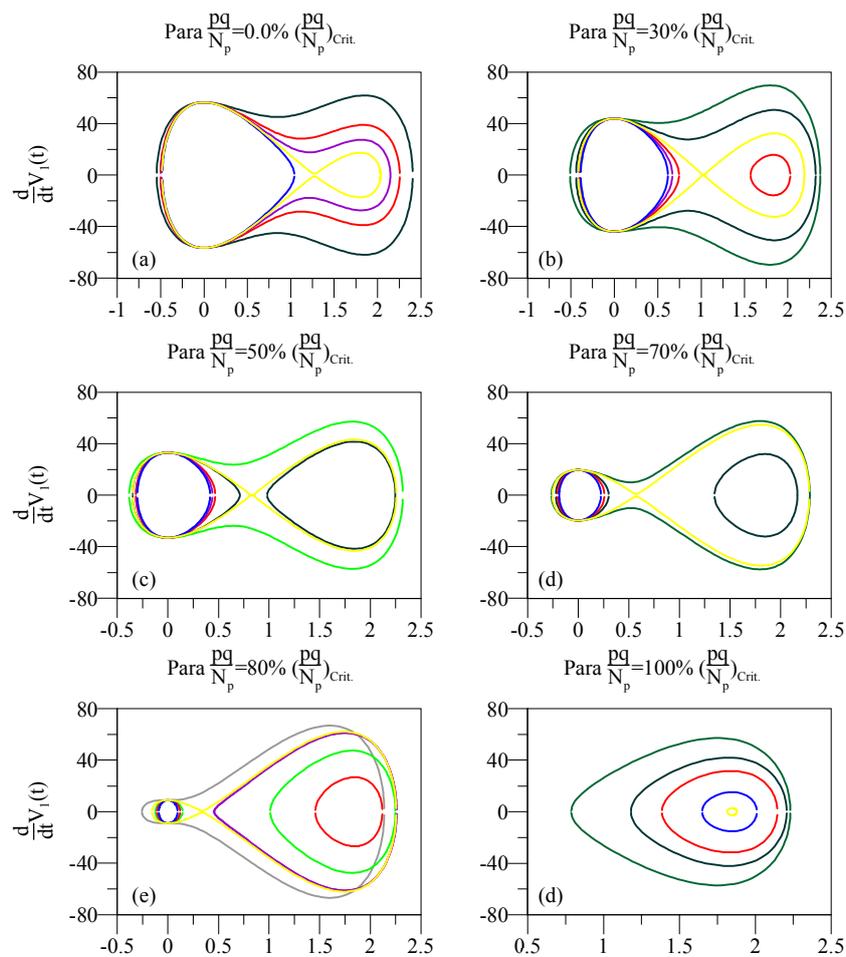
**Figura 4.2** - Comportamento de  $\omega_o^2$  e  $\omega_o$  em função do carregamento estático adimensional.  $\lambda = 8.71$ .

#### 4.3.1. Planos de Fase do Sistema em Vibração Livre.

A Tabela 4.3 apresenta para níveis crescentes do parâmetro de carregamento estático (variando de 0 a 100% da carga crítica) a coordenada V1 relativa ao ponto de sela e da constante  $\bar{C}_{lim}$  associada a este ponto de sela para um arco de esbeltez  $\lambda = 8.71$  e rigidez  $\alpha = 0$ . O valor de  $\bar{C}_{lim}$  representa a energia no ponto de sela de onde partem as duas órbitas homoclínicas que delimitam os dois vales potenciais (bacias de atração conservativas). A Figura 4.3 apresenta, para os níveis de carregamento apresentados na Tabela 4.3 ali, as curvas de nível de igual energia para alguns pares de condições iniciais. Verifica-se que a área relativa ao conjunto de condições iniciais associados ao vale pré-crítico (bacia de atração conservativa) diminui à medida que a carga aumenta, desaparecendo quando a carga atinge o valor crítico, enquanto o vale pós-crítico aumenta.

**Tabela 4.3** - Valores de  $\bar{C}_{lim}$  para  $\lambda = 8.71$  e  $\alpha = 0$ .

Porcentagem da Carga Crítica	$(qp/N_p)_{aprox}$	$V_1$	$C_{lim}$
0%	0.000	0.000	1.94E-07
10%	0.060	0.023	1.75E-07
20%	0.120	0.047	1.45E-07
30%	0.180	0.074	1.17E-07
40%	0.240	0.103	9.08E-08
50%	0.299	0.134	6.65E-08
60%	0.359	0.170	4.41E-08
70%	0.419	0.211	2.35E-08
80%	0.479	0.260	4.92E-09
90%	0.539	0.327	-1.14E-08
100%	0.599	0.498	-2.47E-08



**Figura 4.3** - Curvas de nível de igual energia para níveis crescentes de carregamento estático e energia associada ao ponto de sela,  $\bar{C}_{lim}$ . Para  $\lambda = 8.71$  e  $\alpha = 0$ .