

3

ANALISE ESTÁTICA DA ESTABILIDADE - MÉTODO RAYLEIGH RITZ.

Alguns problemas de estabilidade de estruturas não podem ser resolvidos por métodos analíticos ou são resolvidos de forma mais fácil utilizando métodos aproximados. Os métodos analíticos referem-se a métodos pelos quais se obtém uma solução exata das equações diferenciais governantes do sistema. Algumas destas soluções podem ser aproximadas por séries de funções harmônicas ou polinomiais com coeficientes indeterminados. O método de Rayleigh-Ritz utiliza estes tipos de aproximação em conjunto com o funcional do problema, para discretizar o sistema contínuo e obter os coeficientes dos termos das séries de funções.

Aqui neste trabalho é usado o método de Rayleigh-Ritz para resolver o problema estático não linear e obter as informações necessárias para a análise dinâmica não linear apresentada no Capítulo 4.

3.1.

Calculo do Carregamento Critico Adimensional.

Para generalizar os resultados e facilitar a análise paramétrica, se definem as seguintes coordenadas e deslocamentos adimensionais (coordenadas horizontais divididos por L e coordenadas verticais divididos por f):

$$\bar{z} = z / L ; \quad \bar{y} = y / f ; \quad \bar{w} = w / L ; \quad \bar{v} = v / f ; \quad \frac{d}{dz} = \frac{d}{Ldz} \quad (3.1)$$

Adicionalmente, consideram-se os seguintes parâmetros adimensionais;

$$\delta = f / L ; \quad \bar{q} = \frac{qf}{EA} ; \quad \gamma = \frac{r_x^2 f^2}{L^4} ; \quad K_i = \frac{k_i L}{EA} ; i = 1, 2 \quad (3.2)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais na equação (2.6), correspondente à energia total do sistema, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\pi}{AEL} = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d(\bar{w})}{dz} + 8\bar{z}\delta^2 \frac{d(\bar{v})}{dz} + \frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{d(\bar{v})}{dz} \right)^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{d^2(\bar{v})}{dz^2} \right)^2 - \bar{q}\bar{v} \right) dz \\ & + \frac{1}{2} K_1 \bar{w}_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \bar{w}_2^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

No método de solução numérica de Rayleigh Ritz é preciso aproximar o deslocamento por uma série de funções admissíveis que sejam contínuas e satisfaçam pelo menos as condições de contorno do sistema em termos dos deslocamentos (condições de contorno forçadas). Para o caso do arco parabólico, Figura 2.6, uma boa aproximação para o deslocamento vertical é dada por (3.4):

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n V_i \cos(i\pi z) \quad (3.4)$$

onde cada termo da série (3.4) é uma função admissível e contínua que satisfaz todas as condições de contorno do sistema em v .

O termo V_i é conhecido como deslocamento generalizado ou variável cinemática. No caso particular deste trabalho, a constante é uma grandeza adimensional dada pela divisão do deslocamento modal vertical no meio do arco, $z = 0$, pela altura do arco f , ou seja.

$$V_i = \frac{v_{ci}}{f} \quad (3.5)$$

Para que a equação (3.3) seja resolvida deve-se primeiro encontrar para cada termo da série uma expressão para o deslocamento horizontal adimensional \bar{w} em função V_i . Inserindo a equação (2.2) e os parâmetros adimensionais (3.1) e (3.2) na equação diferencial de equilíbrio na direção horizontal (2.10), obtém-se a equação diferencial:

$$\frac{d^2(\bar{w})}{dz^2} = -8\delta^2 \frac{d(\bar{v})}{dz} - 8\bar{z}\delta^2 \frac{d^2(\bar{v})}{dz^2} - \delta^2 \frac{d(\bar{v})}{dz} \frac{d^2(\bar{v})}{dz^2} \quad (3.6)$$

que relaciona a função \bar{w} com a função \bar{v} .

Agora, substituindo, por exemplo, o primeiro termo da equação (3.4) na equação (3.6) e resolvendo-a, obtém-se a equação (3.7) que descreve o comportamento do deslocamento horizontal adimensional \bar{w} em função de V_1 :

$$\bar{w} = \frac{8\delta^2 V_1 \text{sen}(\pi z)}{\pi} - 8\delta^2 V_1 z \cos(\pi z) + \frac{1}{4} \pi \delta^2 V_1^2 \text{sen}(\pi z) \cos(\pi z) + C_1 z + C_2 \quad (3.7)$$

A constante C_2 é obtida considerando que as rigidezes das molas K_1 e K_2 sejam iguais, ou seja, o deslocamento horizontal adimensional no meio do arco é igual zero, $\bar{w}(0) = 0$. Desta condição se tem que $C_2 = 0$.

Da equação (2.23), que descreve as condições de contorno na direção horizontal, se obtêm duas equações adimensionais:

$$\varepsilon_m = K_1 \bar{w}_1 ; \quad \varepsilon_m = -K_2 \bar{w}_2 \quad (3.8)$$

Somando as equações (3.8), tem-se:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} (K_1 \bar{w}_1 - K_2 \bar{w}_2) \quad (3.9)$$

Levando a equação (2.2) à forma adimensional, obtém-se:

$$\varepsilon_m = \frac{d(\bar{w})}{dz} + 8z\delta^2 \frac{d(\bar{v})}{dz} + \frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{d(\bar{v})}{dz} \right)^2 \quad (3.10)$$

Considerando que a deformação de membrana é constante em (3.9) e igual à deformação média, equação (3.10), tem-se:

$$\frac{1}{2} (K_1 \bar{w}_1 - K_2 \bar{w}_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{d(\bar{w})}{dz} + 8z\delta^2 \frac{d(\bar{v})}{dz} + \frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{d(\bar{v})}{dz} \right)^2 \right) dz \quad (3.11)$$

Inserindo as equações (3.4) e (3.7) na equação (3.11) e resolvendo-a, obtém-se a constante C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{2} K_1 \bar{w}_1 - \frac{1}{2} K_2 \bar{w}_2 - \frac{1}{4} \delta^2 V_1^2 \pi^2 \quad (3.12)$$

Precisa-se agora obter os deslocamentos horizontais \bar{w}_1 e \bar{w}_2 em termos dos parâmetros adimensionais, de V_1 e das constantes de rigidez K_1 e K_2 . Isto é possível avaliando a equação (3.7) em $\bar{z} = -\frac{1}{2}$ e $\bar{z} = \frac{1}{2}$ e inserindo os valores obtidos das constantes C_1 e C_2 .

Uma vez resolvido o sistema de equações, os deslocamentos horizontais no apoio do arco são obtidos:

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V_1 (V_1 \pi^3 - 64)}{\pi (K + 4)} ; \quad \bar{w}_2 = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 V_1 (V_1 \pi^3 - 64)}{\pi (K + 4)} ; \quad K = K_1 + K_2 \quad (3.13)$$

Desta forma se obtém o deslocamento horizontal \bar{w} em função somente das constantes de rigidez, dos parâmetros adimensionais e de V_1 :

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \frac{8\delta^2 V_1 \text{sen}(\pi \bar{z})}{\pi} - 8\delta^2 V_1 \bar{z} \cos(\pi \bar{z}) + \frac{1}{4} \pi \delta^2 V_1^2 \text{sen}(\pi \bar{z}) \cos(\pi \bar{z}) \\ & + \left(\frac{\delta^2 V_1 K (V_1 \pi^3 - 64)}{4\pi(K+4)} - \frac{1}{4} \delta^2 V_1^2 \pi^2 \right) \bar{z} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Cabe ressaltar que esta expressão não só é compatível com o campo de deslocamentos vertical, como satisfaz as condições de contorno e simetria em w .

Na presente dissertação, considera-se um modelo reduzido de um grau de liberdade adotando-se apenas o primeiro termo da série (3.4). Substituindo, pois, o deslocamento horizontal adimensional (3.14) e o deslocamento vertical adimensional (3.4) na equação (3.3), obtém-se:

$$\frac{\Delta\pi}{AEL} = -\frac{2\bar{q}}{\pi} V_1 + \left(\frac{\pi^4 \gamma}{4} + \frac{128\delta^4 K}{\pi^2(K+4)} \right) V_1^2 - \frac{4\pi\delta^4 K}{(K+4)} V_1^3 + \frac{\pi^4 \delta^4 K}{32(K+4)} V_1^4 \quad (3.15)$$

ou, em forma mais compacta:

$$\frac{\Delta\pi}{AEL} = D_0 \bar{q} V_1 + C_0 V_1^2 + B_0 V_1^3 + A_0 V_1^4 \quad (3.16)$$

onde

$$D_0 = -\frac{2}{\pi}; \quad C_0 = \frac{\pi^4 \gamma}{4} + \frac{128\delta^4 K}{\pi^2(K+4)}; \quad B_0 = -\frac{4\pi\delta^4 K}{(K+4)}; \quad A_0 = \frac{\pi^4 \delta^4 K}{32(K+4)} \quad (3.17)$$

Tendo em vista que o primeiro termo em (3.1) é simétrico, a presente aproximação é válida apenas para arcos abatidos.

Empregando agora o princípio da energia potencial estacionária, $\frac{\partial(\Delta\pi/AEL)}{\partial V_1} = 0$, encontra-se a seguinte aproximação para o caminho não linear de equilíbrio:

$$\bar{q} = A_3 V_1 + B_3 V_1^2 + C_3 V_1^3 \quad (3.18)$$

onde

$$A_3 = \frac{\pi^5 \gamma}{4} + \frac{128\delta^4 K}{\pi(K+4)}; \quad B_3 = -\frac{6\pi^2 \delta^4 K}{(K+4)}; \quad C_3 = \frac{\pi^5 \delta^4 K}{16(K+4)} \quad (3.19)$$

A equação (3.18) encontra-se expressa em forma adimensional. Porém, para poder fazer a comparação com a solução analítica, reescreve-se a equação (3.18) em termos dos parâmetros usados no capítulo 2. Substituindo o carregamento adimensional \bar{q} por seu equivalente apresentado na equação (3.2) e multiplicando pelo parâmetro focal p e dividindo pela força axial N_p , tem-se:

$$\frac{\bar{q}p}{N_p} = \left(\frac{qp}{N_p} \right)_{\text{aprox}} \frac{f}{AE} = \frac{p}{N_p} (A_3 V_1 + B_3 V_1^2 + C_3 V_1^3) \quad (3.20)$$

onde:

$$N_p = \frac{\pi^2 EI_x}{(L/2)^2}; \quad p = \frac{L^2}{8f} \quad (3.21)$$

A equação (3.20) toma assim a forma:

$$\left(\frac{qp}{N_p} \right)_{\text{aprox}} = A_4 V_1 + B_4 V_1^2 + C_4 V_1^3 \quad (3.22)$$

onde:

$$A_4 = \frac{\pi^3}{128} + \frac{4\delta^4 K}{\pi^3 \gamma (K+4)}; \quad B_4 = -\frac{3\delta^4 K}{16\gamma (K+4)}; \quad C_4 = \frac{\pi^3 \delta^4 K}{512\gamma (K+4)} \quad (3.23)$$

3.2. Cálculo da Energia Potencial.

A energia potencial total, equação (3.22), pode, pois, ser reescrita na forma:

$$\bar{\Delta\pi} = \left(\frac{qp}{N_p} \right)_{\text{aprox}} V_1 - \frac{A_4}{2} V_1^2 - \frac{B_4}{3} V_1^3 - \frac{C_4}{4} V_1^4 \quad (3.24)$$

3.3. Análise dos resultados obtidos.

Para a validação das equações obtidas utilizam-se as características físicas e geométricas do arco apresentadas na Tabela 2.1 e as seguintes relações de rigidez e esbeltez:

Tabela 3.1 - Relação de rigidez e esbeltez modificada analisados.

Esbeltez modificada	(λ)	2.75; 4.58; 8.71; 17.6
Relação de rigidez	(α)	0; 4; 50

Agora, precisa-se reescrever a rigidez adimensional K em função da relação de rigidezes α , da mesma maneira precisa-se encontrar uma relação dos parâmetros dimensionais γ e δ em função de λ .

Inserindo as equações (2.35) e (3.2) na equação (3.13) e lembrando que $\alpha_1 = \alpha_2$, encontra-se a seguinte relação:

$$K = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{2}{\alpha_1} = \frac{2}{\alpha_2} \quad (3.25)$$

Fazendo uso das equações (2.33) e (3.2), obtêm-se as seguintes relações:

$$\gamma = \frac{r_x^4}{4L^4} \lambda^2 ; \delta = \frac{r_x}{2L} \lambda \quad (3.26)$$

Na Tabela 3.2 mostra-se a relação entre a rigidez adimensional K e o parâmetro de rigidez α , equação (3.25). Quando $\alpha = 0$ o valor da rigidez linear da mola k_i é muito elevada em comparação da rigidez do material AE , o que faz com que α seja muito pequena. Assim quando $k_i \rightarrow \infty$, α_i aproxima-se do valor zero, ou seja, de um apoio rotulado (nenhum deslocamento horizontal). Para representar este limite utiliza-se o valor aproximado de $K = 10^4$, já que a rigidez adimensional é inversamente proporcional ao valor de α_i . À medida que α_i cresce, cresce a flexibilidade das molas horizontais.

Tabela 3.2 - Relação entre as rigidezes α e K .

α	0.0	4.0	50
K	10000	1.0	0.08

A Tabela 3.3 mostra a variação dos deslocamentos horizontais nos apoios w_i em função α_i . Verifica-se que estes são muito pequenos em comparação do comprimento L do arco. A Figura 3.1 apresenta a variação do deslocamento horizontal $w(z)$, expresso em milímetros, equação (3.27). Para isto, utilizou-se um deslocamento estático $V_1 = 1$.

$$w = \bar{w}L \quad (3.27)$$

Tabela 3.3 - Deslocamento horizontal nos apoios $\lambda = 8.71$, $L = 4m$.

α	K	w(-L/2) mm	w(L/2)mm	%L
0	10000	-2.10E-04	2.10E-04	0.00001%
4	1	-0.70	0.70	0.01751%
50	0.08	-1.01	1.01	0.02525%

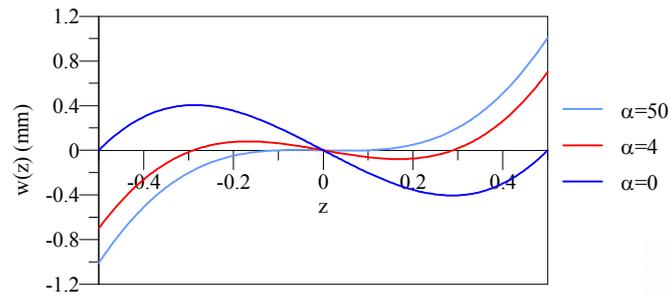


Figura 3.1 - Deslocamento horizontal para diversos valores de α e $\lambda = 8.71$.

A Figura 3.2 mostra os caminhos não lineares de equilíbrio descritos pela equação (3.22) para diferentes valores de λ e α . Nota-se, comparando com a Figura 2.6, que os caminhos de equilíbrio obtidos pelo método aproximado de Rayleigh-Ritz tem uma grande semelhança com o caminho de equilíbrio descrito pela formulação analítica apresentada no capítulo 2.

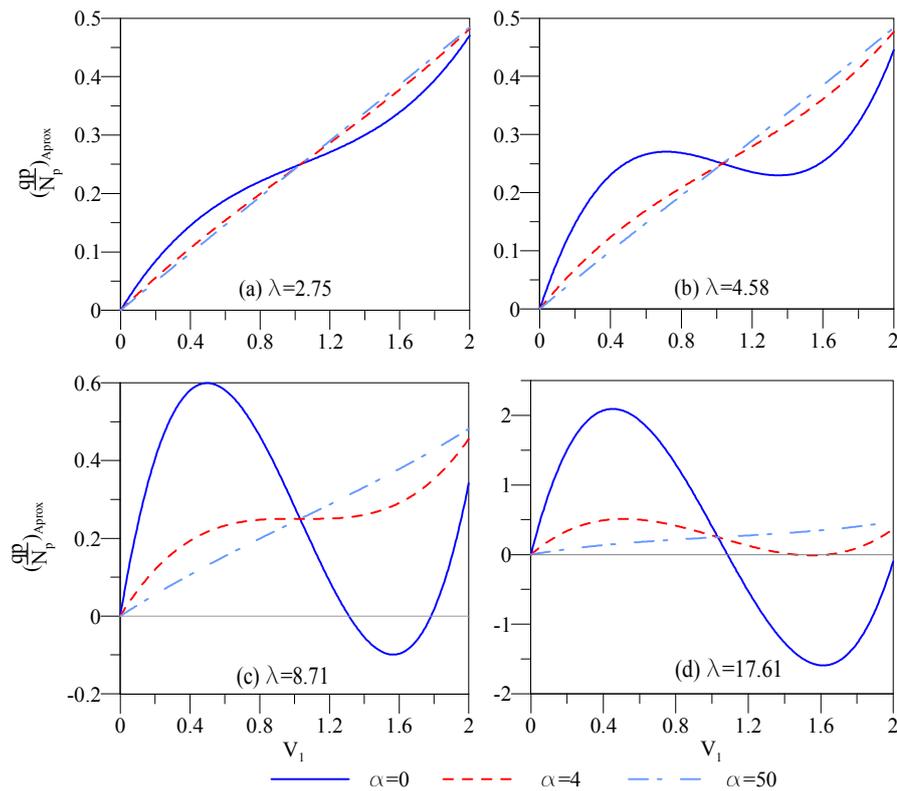


Figura 3.2 - Caminhos não lineares de equilíbrio para valores selecionados de λ e $\alpha = 0, 4$ e 50 .

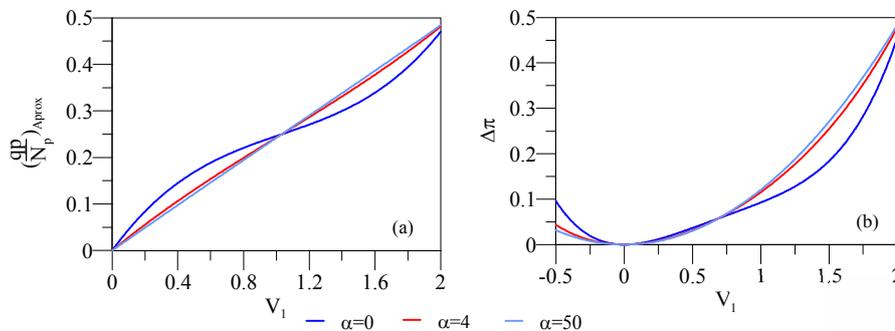
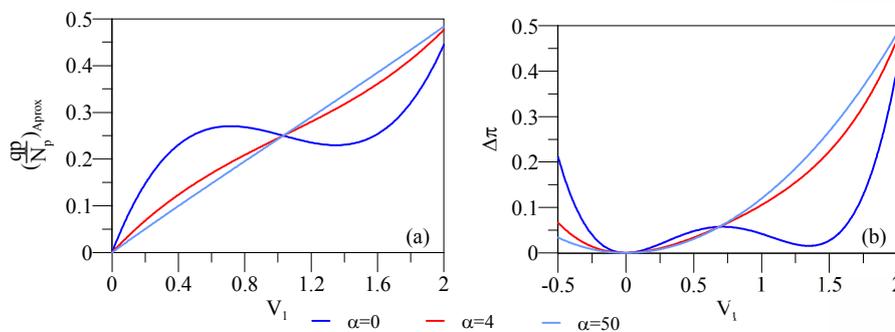
A Tabela 3.4 mostra os valores do carregamento crítico (na sua forma dimensional e adimensional) e do respectivo deslocamento no meio do arco relativos aos pontos limites observados na Figura 3.2.

Tabela 3.4 - Carregamento e deslocamento crítico correspondente ao ponto limite.

λ	α	V_1	(qp/N) aproximado	q (KN/m)
4.58	0	0.72	0.27	0.93
8.71	0	0.50	0.60	3.93
	4	0.57	0.23	1.49
17.61	0	0.45	2.09	27.79
	4	0.52	0.51	6.80

Mediante a análise do perfil de energia potencial total do sistema, descrito pela equação (3.22), em função do deslocamento vertical adimensional V_1 , pode-se analisar a estabilidade do equilíbrio do arco abatido.

Na Figura 3.3b pode-se ver que nenhuma das configurações do arco atinge o flambagem, ou seja, para $\lambda = 2.75$ e qualquer valor de α , a energia potencial do sistema apresenta um único extremo, um mínimo. Tem-se assim uma única posição de equilíbrio estável. A Figura 3.4b mostra o comportamento de um arco abatido com uma esbeltez $\lambda = 4.58$. Neste caso o comportamento é similar ao descrito na Figura 3.3, exceto quando a relação de rigidez é igual a $\alpha = 0$ onde o sistema conta com três posições de equilíbrio, duas estáveis e uma instável.

**Figura 3.3** - Energia potencial adimensional versus deslocamento V_1 , $\lambda = 2.75$.**Figura 3.4** - Energia potencial adimensional versus deslocamento V_1 , $\lambda = 4.58$.

Quando o arco tem uma esbelteza de $\lambda = 8.71$ o sistema apresenta para $\alpha = 0$ e $\alpha = 4$ dois vales potenciais cujos mínimos estão associados à posição de equilíbrio estável pré-crítico ($V_1 = 0$), posição desejável onde o sistema ainda apresenta pequenas deformações, e a configuração de equilíbrio pós-crítica, não desejável, onde o sistema apresenta uma configuração invertida, ver Figura 3.5. O ponto de máximo corresponde à posição de equilíbrio instável.

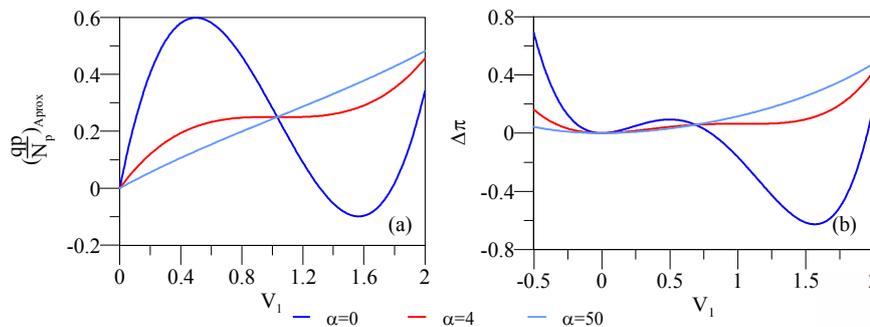


Figura 3.5 - Energia potencial adimensional versus deslocamento V_1 , $\lambda = 8.71$.

Finalmente quando $\lambda = 17.61$ a não linearidade apresentada pelo sistema é maior, e uma pequena aplicação de carregamento estático produz um salto de um vale potencial desejável para um não desejável, Figura 3.6.

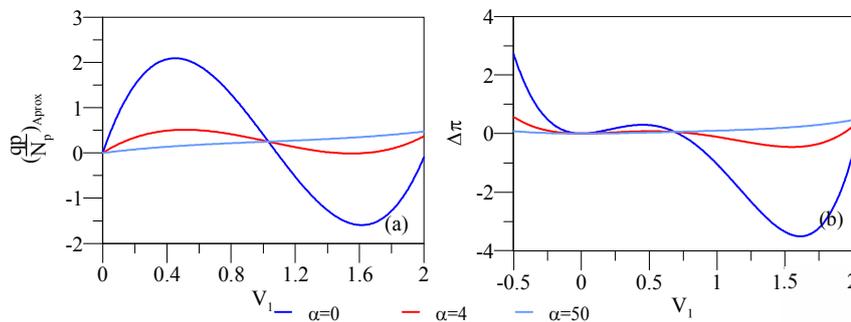


Figura 3.6 - Energia potencial adimensional versus deslocamento V_1 , $\lambda = 17.61$

3.4. Comparação do Carregamento Crítico Obtido Analiticamente e pelo Método de Rayleigh – Ritz.

Com a finalidade de se verificar quando o presente modelo reduzido pode ser empregado para o estudo das oscilações não lineares, apresentam-se na Tabela 3.5 os valores dos carregamentos críticos obtidos pelo método analítico e numérico. Pode-se observar que, à medida que λ e α aumentam, aumenta a diferença entre os dois resultados, o que já era esperado, dado que um termo em (3.4) não é suficiente para representar o comportamento antissimétrico do arco, o que deve ser estudado em um trabalho futuro.

Tabela 3.5 - Comparação dos carregamentos críticos de flambagem.

λ	α	(qp/N) analítico	(qp/N) aproximado	%error	Modo de Flambagem
2.75	0	-	-	-	Não Flamba
	4	-	-	-	Não Flamba
	50	-	-	-	Não Flamba
4.58	0	0.2755	0.27	1.87%	Simétrica
	4	-	-	-	Não Flamba
	50	-	-	-	Não Flamba
8.71	0	0.5515	0.60	8.61%	Simétrica ou Antissimétrica
	4	0.2505	0.23	9.08%	Simétrica
	50	-	-	-	Não Flamba
17.61	0	0.9227	2.09	126.92%	Antissimétrica
	4	0.4784	0.51	7.04%	Simétrica ou Antissimétrica
	50	-	-	-	Não Flamba

A partir da Tabela 3.5 se pode dizer também que a função harmônica de deslocamento vertical aproximada descrita na equação (3.4) é válida para sistemas com uma esbeltez relativamente baixa. Assim na análise dinâmica apresentada no capítulo seguinte utilizam-se arcos com esbeltez de $\lambda = 4.58$ e $\lambda = 8.71$ ambas com uma relação de rigidez $\alpha = 0$. Para os dois casos escolhidos é preciso encontrar as posições de equilíbrio para valores crescentes de carregamento. Os dados são apresentados na Tabela 3.6 e Tabela 3.7.

Tabela 3.6 - Posições de equilíbrio em função do nível de carregamento para $\lambda = 8.71$ e $\alpha = 0$

%	(qp/N) _{crit}	V _{1A}	V _{1B}	V _{1C}
0%	0.000	0.000	1.783	1.313
10.00%	0.060	0.023	1.236	1.837
20.00%	0.120	0.047	1.168	1.881
30.00%	0.180	0.074	1.104	1.918
40.00%	0.240	0.103	1.043	1.951
50.00%	0.299	0.134	0.982	1.980
60.00%	0.359	0.170	0.919	2.008
70.00%	0.419	0.211	0.853	2.033
80.00%	0.479	0.260	0.780	2.056
90.00%	0.539	0.327	0.691	2.078

100.00%	0.599	0.498	0.498	2.099
---------	-------	-------	-------	-------

Tabela 3.7 - Posições de equilíbrio em função do nível de carregamento para $\lambda = 4.58$ e $\alpha = 0$

%	$(qp/N)_{crit}$	V_{1A}	V_{1B}	V_{1C}
0%	0.000	0.000	Complexo	Complexo
10%	0.027	0.030	Complexo	Complexo
20%	0.054	0.063	Complexo	Complexo
30%	0.081	0.098	Complexo	Complexo
40%	0.108	0.137	Complexo	Complexo
50%	0.135	0.180	Complexo	Complexo
60%	0.162	0.228	Complexo	Complexo
70%	0.189	0.285	Complexo	Complexo
80%	0.216	0.354	Complexo	Complexo
90%	0.243	0.450	Complexo	Complexo
100%	0.270	1.667	Complexo	Complexo