

2

ANÁLISE ESTÁTICA DA ESTABILIDADE – MÉTODO ANALÍTICO.

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos de estabilidade de estruturas, dando maior ênfase à estabilidade de arcos parabólicos com apoios elásticos em seu próprio plano. Os apoios elásticos são modelados como molas horizontais.

Utiliza-se, neste capítulo, como alicerce teórico o trabalho desenvolvido por Bradford *et al.* (2007) intitulado “In-Plane Stability of Parabolic Arches with Horizontal Spring Supports. I: Theory”.

2.1. Equilíbrio Não Linear no Plano.

Na mecânica linear dos corpos deformáveis, os deslocamentos são proporcionais aos carregamentos aplicados. Porém, no caso de flambagem, os deslocamentos podem aumentar desproporcionalmente após uma pequena variação de carregamento. Em virtude disso, considera-se a análise de flambagem como um tópico da mecânica não linear.

A não linearidade na mecânica de corpos deformáveis pode ser física ou geométrica. Neste trabalho considera-se uma não linearidade geométrica. Assim a relação cinemática não linear para o arco parabólico abatido é definida por:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_b \quad (2.1)$$

onde ε representa a deformação total do arco parabólico e ε_m e ε_b são, respectivamente, as deformações de membrana e de flexão que são dadas por:

$$\varepsilon_m = \frac{dw}{dz} + \frac{z}{p} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_b = -y \frac{d^2v}{dz^2} \quad (2.3)$$

$$p = \frac{L^2}{8f} \quad (2.4)$$

onde, como ilustra a Figura 2.1, v e w representam os deslocamentos nas direções OY e OZ, respetivamente. O termo $\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2$ expressa a não linearidade geométrica do sistema, p é conhecido como parâmetro focal do arco, expresso em função do vão L e da altura no meio do arco f , equação (2.4).

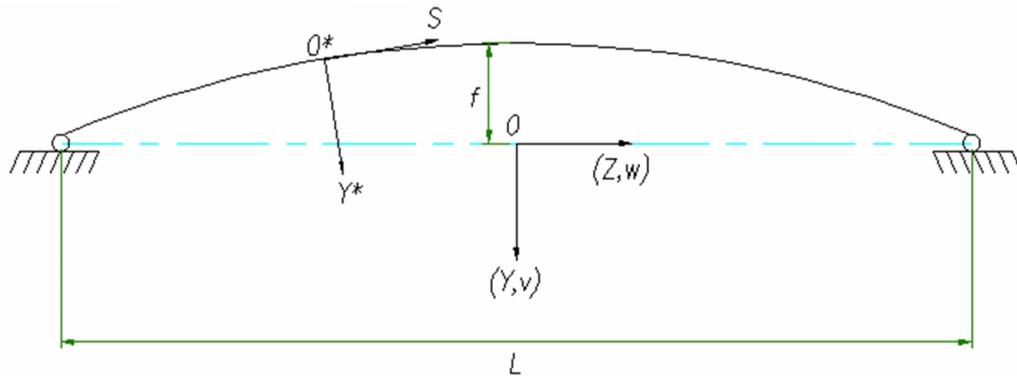


Figura 2.1 - Arco parabólico.

2.1.1. Equação Diferencial de Equilíbrio.

A Figura 2.1 apresenta um arco parabólico simplesmente apoiado nas extremidades e suportado lateralmente por molas.

As hipóteses básicas para a obtenção das equações de equilíbrio são:

1. O arco é suportado horizontalmente por duas molas elásticas lineares de rigidez k_1 e k_2 , as quais podem representar o tirante, no caso de arco atirantado, ou a rigidez de pilares e outras estruturas de apoio.
2. O arco está submetido a um carregamento aplicado verticalmente, o qual permanece na mesma direção, pelo que se considera que é um sistema conservativo. Assim, o método da energia pode ser usado na investigação.

3. Assume-se que os arcos são abatidos, de forma que $\left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \ll 1$, e

$$\text{assim } ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} \approx dz.$$

4. O material do arco é elástico linear, obedecendo, portanto, a lei de Hooke.

5. Assume-se que os deslocamentos horizontais do arco são pequenos em comparação ao comprimento L do vão.

A energia potencial total do arco é dada por:

$$\Delta\pi = U_i + V \quad (2.5)$$

onde U_i é a energia interna de deformação e V é o potencial gravitacional das cargas externas que é definido como menos o trabalho das forças externas ($V = -W_e$).

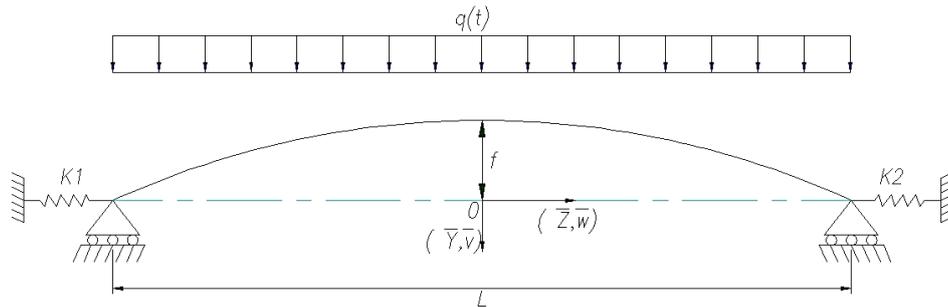


Figura 2.2 - Arco parabólico suportado por molas horizontais.

Para o caso do sistema da Figura 2.2, a energia potencial total do arco e das molas é dada por:

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} \int_0^V E \epsilon^2 dv - \int_{-L/2}^{L/2} q v dz + \frac{1}{2} k_1 w_1^2 + \frac{1}{2} k_2 w_2^2 \quad (2.6)$$

A primeira variação da equação (2.6) é dada por:

$$\delta\Delta\pi = \int_0^V E \epsilon \delta\epsilon dv - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} q \delta v dz + k_1 w_1 \delta w_1 + k_2 w_2 \delta w_2 = 0 \quad (2.7)$$

Introduzindo as equações (2.1), (2.2) e (2.3) na equação (2.7), e considerando que a área da seção transversal do arco é constante, chega-se à expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\pi = & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E A \epsilon_m \delta\epsilon_m dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E I \frac{d^2 v}{dz^2} \delta \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right) dz - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} q \delta v dz \\ & + k_1 w_1 \delta w_1 + k_2 w_2 \delta w_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Integrando por partes a equação (2.8), tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta\Delta\pi &= E A \varepsilon_m \delta w - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} \delta w dz + \left(\frac{z}{p} E A \varepsilon_m + E A \varepsilon_m \frac{dv}{dz} \right) \delta v \\
&- \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{z}{p} E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} + \frac{E A \varepsilon_m}{p} + E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} \frac{dv}{dz} + E A \varepsilon_m \frac{d^2v}{dz^2} \right) \delta v dz + \\
&E I \frac{d^2v}{dz^2} \delta \left(\frac{dv}{dz} \right) - E I \frac{d^3v}{dz^3} \delta \left(\frac{dv}{dz} \right) + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E I \frac{d^4v}{dz^4} \delta v dz \\
&- \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} q \delta v dz + k_1 w_1 \delta w_1 + k_2 w_1 \delta w_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Considerando os deslocamentos virtuais $\delta v \neq 0$, $\delta w \neq 0$, as equações diferenciais de equilíbrio são obtidas a partir da equação (2.9):

$$\left(- \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} dz \right) \delta w = - E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} = 0 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&- \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{z}{p} E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} + \frac{E A \varepsilon_m}{p} + E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} \frac{dv}{dz} + E A \varepsilon_m \frac{d^2v}{dz^2} \right) \delta v dz \\
&+ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E I \frac{d^4v}{dz^4} \delta v dz - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} q \delta v dz = 0 \\
&-\frac{z}{p} E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} - \frac{E A \varepsilon_m}{p} - E A \frac{d\varepsilon_m}{dz} \frac{dv}{dz} - E A \varepsilon_m \frac{d^2v}{dz^2} + E I \frac{d^4v}{dz^4} - q = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

As equações (2.10) e (2.11) correspondem às equações diferenciais de equilíbrio na direção horizontal e vertical, respectivamente.

Além disso, da equação (2.9) obtêm-se também as possíveis condições de contorno do sistema. Para a direção horizontal tem-se:

$$(E A \varepsilon_m) \delta w + k_1 w_1 \delta w_1 + k_2 w_2 \delta w_2 = 0 \tag{2.12}$$

Enquanto que, para a direção vertical, as condições de contorno são dadas por:

$$\left(\frac{z}{p} E A \varepsilon_m + E A \varepsilon_m \frac{dv}{dz} - EI_x \frac{d^3v}{dz^3} \right) \delta v = 0 \quad (2.13)$$

$$-EI \frac{d^3v}{dz^3} \delta \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Da equação (2.10) pode-se determinar que a deformação de membrana ε_m é constante e dada por:

$$-\varepsilon_m = \frac{N}{EA} \quad (2.15)$$

onde que N representa a força axial de compressão no arco e EA , a rigidez de membrana.

Para facilitar a análise, são definidos os seguintes parâmetros (Bradford *et al.*, 2007):

$$\mu = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (2.16)$$

$$\omega = \frac{q p - N}{N} \quad (2.17)$$

Inserindo as equações (2.16) e (2.17) na equação (2.11), obtém-se a seguinte equação diferencial de equilíbrio correspondente à direção vertical:

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{d^4v}{dz^4} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{\omega}{p} \quad (2.18)$$

Que, em virtude dos parâmetros considerados, torna-se uma equação diferencial linear de quarta ordem não homogênea.

2.1.2. Equação de Equilíbrio Não Linear.

Da solução da equação diferencial (2.18), tem-se para o deslocamento vertical v :

$$v(z) = -\frac{c_1 \cos(\mu z)}{\mu^2} - \frac{c_2 \sin(\mu z)}{\mu^2} + c_3 z + c_4 + \frac{\omega z^2}{2p} \quad (2.19)$$

Para que as constantes da equação (2.19) sejam encontradas, utilizam-se as condições de contorno iniciais do sistema, que são: $v(z) = v''(z) = 0$ em $z = \pm L/2$. Uma vez substituída as constantes encontradas, obtém-se:

$$v(z) = \frac{\omega}{\mu^2 p} \left(\frac{\cos(\mu z) - \cos(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{1}{2} (z^2 \mu^2 - \theta^2) \right) \quad (2.20)$$

$$\theta = \frac{\mu L}{2} \quad (2.21)$$

Devido ao fato do arco ser suportado lateralmente por molas, o deslocamento horizontal virtual é diferente de zero, ou seja, $\delta w \neq 0$. Assim, da equação (2.12) tem-se que:

$$(E A \varepsilon_m + k_2 w_2) \delta w_2 + (-E A \varepsilon_m + k_1 w_1) \delta w_1 = 0 \quad (2.22)$$

onde:

$$w_2 = -\frac{E A \varepsilon_m}{k_2}; \quad w_1 = \frac{E A \varepsilon_m}{k_1} \quad (2.23)$$

Substituindo as equações (2.16), (2.17) e (2.21) na equação (2.23), obtém-se para os deslocamentos horizontais:

$$w_2 = \frac{4E \theta^2 I x}{L^2 k_2}; \quad w_1 = -\frac{4E \theta^2 I x}{L^2 k_1} \quad (2.24)$$

Por outro lado, a condição de equilíbrio não linear para arcos abatidos pode ser estabelecida pela igualdade entre a deformação de membrana constante, dada pela equação (2.15), e o valor médio da deformação de membrana ao longo do arco, equação (2.2), ou seja:

$$-\frac{N}{AE} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d(w)}{dz} + \frac{z}{p} \frac{d(v)}{dz} + \frac{1}{2} \left(\frac{d(v)}{dz} \right)^2 \right) dz \quad (2.25)$$

O lado esquerdo da equação (2.25) é simplificado pela consideração da equação (2.16). O termo da esquerda pode ser escrito em função do raio de giração r_x e do parâmetro de estabilidade μ , ou seja:

$$-\frac{N}{AE} = -\mu^2 r_x^2 \quad (2.26)$$

$$r_x = \sqrt{\frac{Ix}{A}} \quad (2.27)$$

A integral do deslocamento horizontal $w(z)$ é igual à diferença dos deslocamentos horizontais nos dois apoios, $\left(\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d(w)}{dz} = \frac{w_2 - w_1}{L} \right)$, ou seja.

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d(w)}{dz} = \frac{4\theta^2 EI}{L^3} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \quad (2.28)$$

Substituindo as equações (2.26) e (2.28) na equação (2.25), pode-se reescrever a equação de equilíbrio na forma:

$$A_1 \omega^2 + B_1 \omega + C_1 = 0 \quad (2.29)$$

onde:

$$A_1 = \frac{1}{4\theta^3} \left[5\theta - 5 \tan(\theta) + \theta \tan^2(\theta) + \frac{2}{3} \theta^3 \right] \quad (2.30)$$

$$B_1 = \frac{1}{\theta^2} \left[1 - \frac{\tan(\theta)}{\theta} + \frac{\theta^2}{3} \right] \quad (2.31)$$

$$C_1 = \left(\frac{\theta}{\lambda} \right)^2 \left[1 + \frac{AE}{L} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \right] \quad (2.32)$$

Aqui λ é a constante de esbeltez modificada do arco definida pela igualdade:

$$\lambda = \frac{L^2}{4r_x p} = \frac{2f}{r_x} \quad (2.33)$$

A equação (2.32) pode ser expressa em termos de α , que representa a relação entre a rigidez axial do arco $\left(\frac{AE}{L}\right)$ e a rigidez elástica da mola k_i , ou seja:

$$C_1 = \left(\frac{\theta}{\lambda} \right)^2 [1 + \alpha_1 + \alpha_2] = \left(\frac{\theta}{\lambda} \right)^2 [1 + \alpha] \quad (2.34)$$

$$\alpha_1 = \frac{AE}{k_1 L}$$

$$\alpha_2 = \frac{AE}{k_2 L} \quad (2.35)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

À medida que k_1 e k_2 crescem, α_1 e α_2 tendem a zero, e o coeficiente (2.34) toma a forma:

$$C_1 = \left(\frac{\theta}{\lambda} \right)^2 \quad (2.36)$$

2.2. Análise da Flambagem.

Quando os deslocamentos laterais de um arco parabólico são completamente restritos, o sistema pode flambar no plano de um modo antissimétrico ou de um modo simétrico, como ilustra a Figura 2.3.

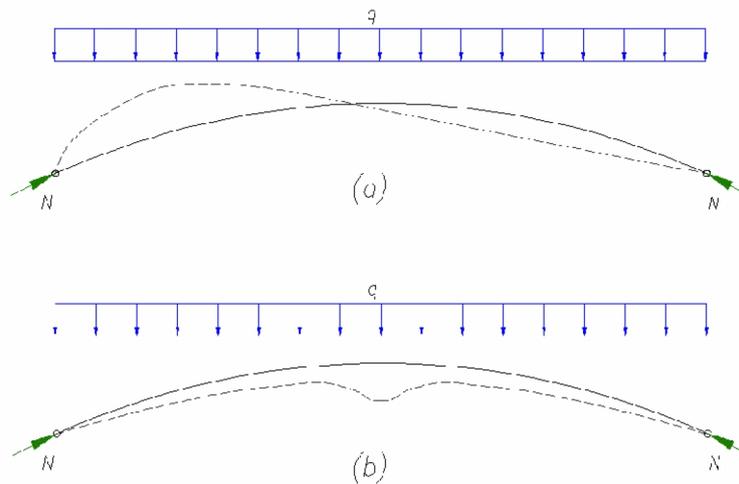


Figura 2.3 – Modos de Flambagem para arcos parabólicos. (a) Flambagem antissimétrica. (b) Flambagem simétrica.

O arco pode flambar passando de uma configuração de equilíbrio pré-flambagem, definida pelos deslocamentos $\{v, w\}$, para uma configuração de equilíbrio adjacente, definida pelos deslocamentos:

$$v_f = v + v_b \quad (2.37)$$

$$w_f = w + w_b \quad (2.38)$$

onde v_b e w_b representam as perturbações nas direções vertical e horizontal, respectivamente, e v_f e w_f representam os deslocamentos totais.

2.2.1. Equação de Equilíbrio Crítico

Substituindo as equações (2.37) e (2.38) na equação (2.6), e variando-se o funcional, tem-se:

$$(2.39)$$

Integrando por partes a equação (2.39), obtêm-se as respectivas equações diferenciais de equilíbrio crítico na direção horizontal:

$$-E A \frac{d\varepsilon_{mf}}{dz} = 0 \quad (2.40)$$

e na direção vertical:

$$-\frac{z}{p} E A \frac{d\varepsilon_{mf}}{dz} - \frac{E A \varepsilon_{mf}}{p} - E A \frac{d\varepsilon_{mf}}{dz} \frac{dv_f}{dz} - E A \varepsilon_{mf} \frac{d^2 v_f}{dz^2} + E I_x \frac{d^4 v_f}{dz^4} - q = 0 \quad (2.41)$$

As possíveis condições de contorno são:

$$E A \varepsilon_{mf} \delta w_f + k_1 w_{f1} \delta w_{f1} + k_2 w_{f2} \delta w_{f2} = 0 \quad (2.42)$$

$$\left(\frac{z}{p} E A \varepsilon_{mf} + E A \varepsilon_{mf} \frac{dv_f}{dz} - EI_x \frac{d^3 v_f}{dz^3} \right) \delta v_f = 0 \quad (2.43)$$

$$-EI_x \frac{d^3 v_f}{dz^3} \delta \left(\frac{dv_f}{dz} \right) = 0 \quad (2.44)$$

Da equação (2.40) pode-se determinar a deformação de membrana (ε_{mf}) na configuração de flambagem, onde N_f representa a força axial de compressão no arco na configuração de flambagem, sendo dada por.

$$-\varepsilon_{mf} = \frac{N_f}{AE} \quad (2.45)$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.17) em (2.41), tem-se:

$$\frac{d^4 v_b}{dz^4} + \mu^2 \frac{d^2 v_b}{dz^2} = \frac{\varepsilon_{mb}}{r_x^2} \left(\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{p} \right) \quad (2.46)$$

onde:

$$\varepsilon_{mb} = \varepsilon_{mf} - \varepsilon_m \quad (2.47)$$

Dependendo da geometria do arco, este pode apresentar um modo de flambagem simétrico ou antissimétrico. Os dois casos são estudados a seguir.

2.2.2. Flambagem Antissimétrica

A configuração antissimétrica de flambagem encontra-se infinitamente próxima da configuração de pré-flambagem, assim considera-se que a força axial N_f é igual à força axial N e, da equação (2.47), tem-se que:

$$\varepsilon_{mb} = -\frac{N}{AE} - \left(-\frac{N}{AE} \right) = 0 \quad (2.48)$$

Substituindo (2.48) na equação (2.46), tem-se:

$$\frac{d^4 v_b}{dz^4} + \mu^2 \frac{d^2 v_b}{dz^2} = 0 \quad (2.49)$$

A solução geral da equação (2.49) é:

$$v_b = c_1 + c_2 z + c_3 \operatorname{sen}(\mu z) + c_4 \cos(\mu z) \quad (2.50)$$

Para a obtenção das constantes se faz uso das condições de contorno. Com o uso da primeira condição $v(z) = 0$ em $z = \pm L/2$, se encontra:

$$v_b = C \left(\text{sen}(\mu z) - \frac{z \text{sen}(\theta)}{(L/2)} \right) \quad (2.51)$$

onde C é a amplitude modal.

A condição $v(z) = 0$ juntamente com a condição $v''(z) = 0$ em $z = \pm L/2$ leva à seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -\text{sen}\left(\frac{\mu L}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mu L}{2}\right) \\ 1 & \frac{L}{2} & \text{sen}\left(\frac{\mu L}{2}\right) & \cos\left(\frac{\mu L}{2}\right) \\ 0 & 0 & \text{sen}\left(\frac{\mu L}{2}\right)\mu^2 & -\cos\left(\frac{\mu L}{2}\right)\mu^2 \\ 0 & 0 & -\text{sen}\left(\frac{\mu L}{2}\right)\mu^2 & -\cos\left(\frac{\mu L}{2}\right)\mu^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Para que o sistema (2.52) tenha solução não trivial, é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual zero, ou seja:

$$-2L \sin\left(\frac{\mu L}{2}\right) \cos\left(\frac{\mu L}{2}\right) \mu^4 = 0 \quad (2.53)$$

cujas únicas soluções viáveis são:

$$\sin\left(\frac{\mu L}{2}\right) = 0 \quad (2.54)$$

Assim, da equação (2.54), tem-se que as raízes $\theta = n \frac{\mu L}{2} = n\pi$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$). A menor raiz é dada por:

$$\theta = \frac{\mu L}{2} = \pi \quad (2.55)$$

Inserindo a equação (2.16) na equação (2.55), encontra-se a força de compressão na flambagem:

$$N_p = \frac{\pi^2 EI_x}{(L/2)^2} \quad (2.56)$$

A equação (2.55) também pode ser inserida nas expressões (2.30), (2.31) e (2.34), as quais podem ser inseridas por sua vez na equação (2.29), levando à seguinte equação:

$$(15 + 2\pi^2)\omega^2 + (12 + 4\pi^2)\omega + \frac{12\pi^4}{\lambda^2}(1 + \alpha) = 0 \quad (2.57)$$

As raízes são dadas por:

$$\omega = -0.741 \pm 0.741 \sqrt{1 - \frac{48(15 + 2\pi^2)\pi^4(1 + \alpha)}{\lambda^2(12 + 4\pi^2)^2}} \quad (2.58)$$

Sabendo-se que $\omega = \frac{qp}{N} - 1$ e inserindo este valor em (2.58), obtém-se:

$$q_{Ant} p = \left(0.259 \pm 0.741 \sqrt{1 - \frac{48(15 + 2\pi^2)\pi^4(1 + \alpha)}{\lambda^2(12 + 4\pi^2)^2}} \right) N_p \quad (2.59)$$

Para encontrar uma solução real da equação (2.59), o termo sob a raiz tem que ser maior ou igual zero, ou seja:

$$1 - \frac{48(15 + 2\pi^2)\pi^4(1 + \alpha)}{\lambda^2(12 + 4\pi^2)^2} \geq 0 \quad (2.60)$$

$$\lambda \geq 7.832\sqrt{1 + \alpha} \quad (2.61)$$

Conclui-se assim que o modo de flambagem antissimétrico de um arco suportado horizontalmente por molas existe somente se a desigualdade (2.61) é cumprida.

Substituído o valor de θ na equação (2.24), tem-se para os deslocamentos horizontais:

$$w_2 = \frac{4E\pi^2 Ix}{L^2 k_2} ; \quad w_1 = -\frac{4E\pi^2 Ix}{L^2 k_1} \quad (2.62)$$

Para satisfazer a condição (5) do item (2.1.1), tem-se que:

$$\frac{4E\pi^2 Ix}{L^2 k_2} \ll 1 ; \quad \frac{4E\pi^2 Ix}{L^2 k_1} \ll 1 \quad (2.63)$$

2.2.3. Flambagem Simétrica

Para a flambagem simétrica de um arco abatido, o deslocamento vertical v_b é simétrico, além disso, implicitamente, k_1 e k_2 devem ser iguais. Substituindo-se a equação (2.20) na equação (2.46), chega-se à equação diferencial de equilíbrio crítico:

$$\mu^2 \frac{d^2}{dx^2}(v_b) + \frac{d^4}{dx^4}(v_b) = -\frac{\varepsilon_{mb} \omega \cos(\mu z)}{r_x^2 p \cos(\theta)} + \frac{\varepsilon_{mb} \omega}{r_x^2 p} + \frac{\varepsilon_{mb}}{r_x^2 p} \quad (2.64)$$

Utilizando-se as condições de contorno $v_b(z) = v_b''(z) = 0$ em $z = \pm L/2$, tem-se a solução da equação (2.64), a saber:

$$v_b(z) = \frac{\varepsilon_{mb}}{(r_x^2 p \mu^4)} \left\{ \frac{(\omega+1)(\mu^2 z^2 - \theta^2)}{2} + \frac{\omega}{2} \left[\frac{\mu z \operatorname{sen}(\mu z)}{\cos(\theta)} - \frac{\theta \cos(\mu z) \operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{(2\omega+1)(\cos(\mu z) - \cos(\theta))}{\cos(\theta)} \right\} \quad (2.65)$$

Substituindo as equações (2.37) e (2.38) na equação (2.2), tem-se para a deformação de membrana:

$$\varepsilon_{mf} = \frac{d}{dz} w(z) + \frac{d}{dz} w_b(z) + \frac{z}{p} \frac{d}{dz} v(z) + \frac{z}{p} \frac{d}{dz} v_b(z) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} v(z) \right)^2 + \frac{d}{dz} v(z) \frac{d}{dz} v_b(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} v_b(z) \right)^2 \quad (2.66)$$

Substituindo as equações (2.2) e (2.66) na equação (2.47) e linearizando a expressão resultante, tem-se para a deformação de membrana na flambagem:

$$\varepsilon_{mb} = \frac{d}{dz} w_b(z) + \frac{z}{p} \frac{d}{dz} v_b(z) + \frac{d}{dz} v(z) \frac{d}{dz} v_b(z) \quad (2.67)$$

Subtraindo as equações (2.12) e (2.42), tem-se:

$$E A \varepsilon_{mb} \delta w_b - k_1 w_{b1} \delta w_{b1} + k_2 w_{b2} \delta w_{b2} = 0 \quad (2.68)$$

Adicionalmente tem-se que:

$$E A \varepsilon_{mb} - k_1 w_{b1} = 0 \quad (2.69)$$

$$E A \varepsilon_{mb} + k_2 w_{b2} = 0 \quad (2.70)$$

Igualando-se a deformação de membrana na flambagem ao seu valor médio ($\varepsilon_{mb} = -\mu^2 r_x^2$), tem-se:

$$-\mu^2 r_x^2 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d}{dz} w_b(z) + \frac{z}{p} \frac{d}{dz} v_b(z) + \frac{d}{dz} v(z) \frac{d}{dz} v_b(z) \right) dz \quad (2.71)$$

A partir da equação (2.71) pode-se obter uma relação entre os parâmetros ω e θ na flambagem. Para isto substituem-se os valores de v , v_b e w_b , obtidos anteriormente, tendo em conta que ε_{mb} é constante na equação (2.65), e w_b pode ser obtido das equações (2.69) e (2.70). Assim a expressão (2.70) toma a forma:

$$A_2 \omega^2 + B_2 \omega + C_2 = 0 \quad (2.72)$$

onde:

$$A_2 = \frac{7 \tan(\theta)^2}{8\theta^2} - \frac{\tan(\theta)^3}{4\theta} - \frac{\tan(\theta)}{4\theta} - \frac{15 \tan(\theta)}{8\theta^3} + \frac{15}{8\theta^2} + 2A_1 \quad (2.73)$$

$$B_2 = 4A_1 \quad (2.74)$$

$$C_2 = B_1 - C_1 \quad (2.75)$$

Para um dado valor da relação de rigidez α , o correspondente valor de esbeltez λ pode ser obtido da solução das equações (2.29) e (2.72) em $\theta = \pi$ (que é a solução fundamental para flambagem antissimétrica) e, assim, satisfazer a igualdade de $q_{ant}p = q_{sim}p$. A relação resultante destas operações é:

$$\lambda \leq 9.38\sqrt{1+\alpha} \quad (2.76)$$

O valor obtido na equação (2.76) define o modo de flambagem de um arco abatido, já que, se o valor de λ é menor, o sistema encontra-se na zona de flambagem simétrica.

Tendo o valor de μ , a solução para encontrar o carregamento de flambagem simétrico $q_{sim}p$ e o correspondente valor de esbeltez λ podem ser obtidas facilmente. Porém, ao ter o valor de λ conhecido, a solução das equações (2.29) e (2.72) se realizam mediante processos iterativos, os quais são muito complicados. Por conveniência, uma aproximação para o carregamento de flambagem simétrica com $\lambda \leq 9.38\sqrt{1+\alpha}$, é proposta da seguinte forma:

$$q_{sim}p \approx [0.25 + 0.0063(\lambda_k - 3.88)^2 + 0.032(\lambda_k - 3.88)]N_p \quad (2.77)$$

$$\lambda_k = \lambda(1+\alpha)^{-1/2} \quad (2.78)$$

Quando a rigidez horizontal da mola k_1 e k_2 tende ao infinito, a equação (2.77) pode ser aproximada por (Bradford *et al.*, 2004):

$$q_{sim}p \approx [0.15 + 0.0063\lambda^2]N_p \quad (2.79)$$

O menor valor do carregamento de flambagem simétrico $q_{sim}p$ pode ser obtido através do seguinte limite:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \omega = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{qp - N}{N} = 0 \quad (2.80)$$

A solução da equação (2.80) leva a:

$$q_{sim}p = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \quad (2.81)$$

Da equação (2.20) se pode encontrar o deslocamento vertical no topo do arco, ou seja, quando $z = 0$:

$$v_c = \frac{\omega}{\mu^2 p} \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \quad (2.82)$$

Assim, o deslocamento no topo do arco quando $q_{sim}p = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$ é dado por:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} v_c = \frac{4L^2}{\pi^3 p} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi^6}{64\lambda^2} (1 + \alpha)} \right] \quad (2.83)$$

Da equação (2.83), pode-se obter a seguinte relação:

$$\lambda \geq \left(\frac{\pi^3}{8}\right)\sqrt{1+\alpha} \approx 3.88\sqrt{1+\alpha} \quad (2.84)$$

Em resumo, do apresentado anteriormente, tem-se que:

- $\lambda \geq 9.23\sqrt{1+\alpha}$, o arco encontra-se na zona de flambagem antissimétrica, equação (2.59).
- $7.83\sqrt{1+\alpha} \leq \lambda < 9.38\sqrt{1+\alpha}$, o arco encontra-se em uma zona onde a flambagem simétrica ou antissimétrica pode ocorrer, equação (2.77) ou a solução das equações (2.29) e (2.72) para o caso simétrico, para o caso antissimétrico a equação (2.59).
- $3.88\sqrt{1+\alpha} \leq \lambda < 7.83\sqrt{1+\alpha}$, o arco encontra-se em uma zona onde somente a flambagem simétrica pode ocorrer, equação (2.77) ou a solução das equações (2.29) e (2.72).
- $\lambda < 3.88\sqrt{1+\alpha}$, o arco encontra-se na zona onde não ocorre flambagem.

A formulação proposta por Bradford *et al.* (2007), permite, através da escolha criteriosa dos parâmetros λ e α eliminar indiretamente os termos não lineares da formulação. Entretanto dificulta a solução do problema e necessita de processos iterativos para se obter a solução do problema.

2.3. Resultados obtidos da solução analítica

Para estudar o comportamento estático do arco parabólico submetido a um carregamento vertical uniformemente distribuído, adotam-se as propriedades físicas e geométricas apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Propriedades do arco

Comprimento do arco	(L)	4.0 m
Altura da seção transversal	(h)	45 mm
Base da seção transversal	(b)	400 mm
Módulo de elasticidade	(E)	30 960 N/mm ²

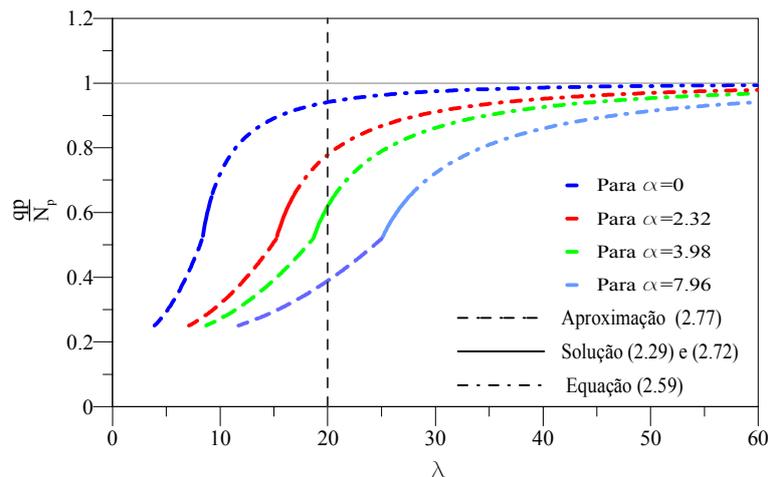


Figura 2.4 - Variação da carga de flambagem para arcos parabólicos suportado horizontalmente por molas em função da esbeltez λ .

A Figura 2.4 apresenta a variação do carregamento adimensional qp/N_p versus a esbeltez modificada λ , para as seguintes relações de rigidez $\alpha = 0, 2.32, 3.98$ e 7.96 . A figura mostra como muda o modo de flambagem e a carga crítica ao se variar o valor de λ , que, por sua vez, é função do parâmetro focal f . Por exemplo, se o arco tem uma esbeltez de $\lambda = 20$, Figura 2.4, o carregamento crítico adimensional do sistema muda ao se variar a relação de rigidez α (que esta em função da rigidez k_i). Assim, quando o arco apresenta o valor de $\alpha = 7.96$ o arco encontra-se em uma zona onde a flambagem simétrica pode ocorrer, enquanto que se $\alpha = 3.98$ o sistema pode flambar de um modo simétrico ou antissimétrico. Finalmente se o sistema tem uma relação de rigidez $\alpha = 2.32$ ou $\alpha = 0$ o arco encontra-se na zona onde somente a flambagem antissimétrica pode ocorrer. Isto mostra a importância do valor da rigidez da mola k_i , já que, quanto maior o seu valor maior a rigidez do sistema, e, conseqüentemente, o valor do carregamento crítico adimensional.

Uma das hipóteses aqui utilizada é a de que a relação f/L seja muito pequena, ou seja, $f/L \ll 1$, de modo que o arco parabólico possa ser considerado abatido. Na Figura 2.5 mostra-se novamente a variação do carregamento adimensional qp/N_p com o parâmetro f/L , para $\alpha = 0, 2.32, 3.98$ e 7.96 .

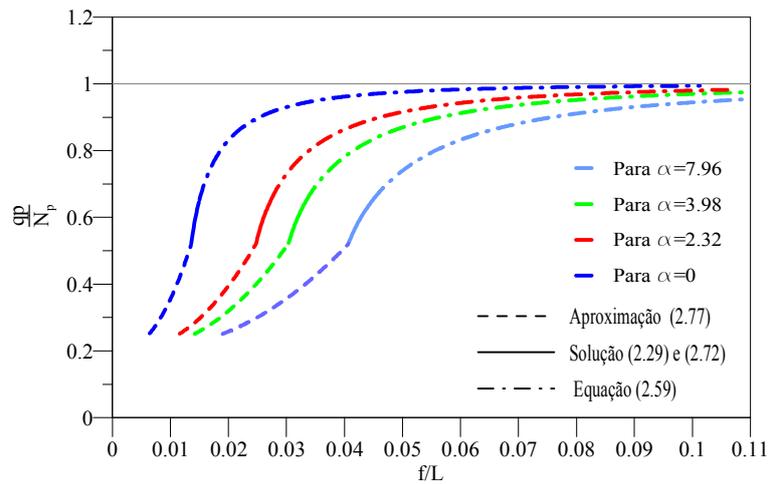


Figura 2.5 - Carregamento de flambagem para arcos parabólicos suportado horizontalmente por molas versus f/L .

O caminho não linear de equilíbrio do arco pode ser apresentado mediante a relação do carregamento adimensional qp/N_p versus o deslocamento adimensional no meio do arco V_c/f . Na Figura 2.6 mostra-se para quatro valores do parâmetro λ o comportamento de arcos abatidos considerando três relações de rigidez $\alpha = 0, 4$ e 50 . Estes gráficos são obtidos mediante o uso das equações (2.29) e (2.82). Para os quatro valores de esbeltez λ o comportamento do arco parabólico, em função da sua rigidez α , está apresentada na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Tipos de Flambagem para diferentes valores de λ e α .

Esbeltez (λ)	Rigidez (α)		
	0	4	50
2.75	Não Flamba	Não Flamba	Não Flamba
4.58	Flambagem simétrica	Não Flamba	Não Flamba
8.71	Flambagem Simétrica ou Antissimétrica	Flambagem simétrica	Não Flamba
17.61	Flambagem Antissimétrica	Flambagem Simétrica ou Antissimétrica	Não Flamba

Para $\lambda=2.75$ (arco muito abatido), independente do valor de α , o arco apresenta um caminho não linear sem ponto limite, decrescendo a não linearidade à medida que α cresce. À medida que λ cresce, a não linearidade da resposta

aumenta e, para pequenos valores de α , o arco passa a apresentar dois pontos limites que delimitam o trecho intermediário instável do caminho não linear de equilíbrio. Para arcos abatidos a instabilidade ocorre quando se atinge um destes pontos limites, ocorrendo neste caso a perda de estabilidade no modo simétrico. À medida que o arco se torna menos abatido, pode ocorrer, antes de se atingir o ponto limite, uma bifurcação instável e o arco perde a estabilidade através do modo antissimétrico. Nesses casos quando o arco atinge o carregamento crítico, ou ponto crítico, o sistema salta de um ponto de equilíbrio instável para um ponto de equilíbrio estável, este fenômeno é conhecido como instabilidade por *snap-through*.

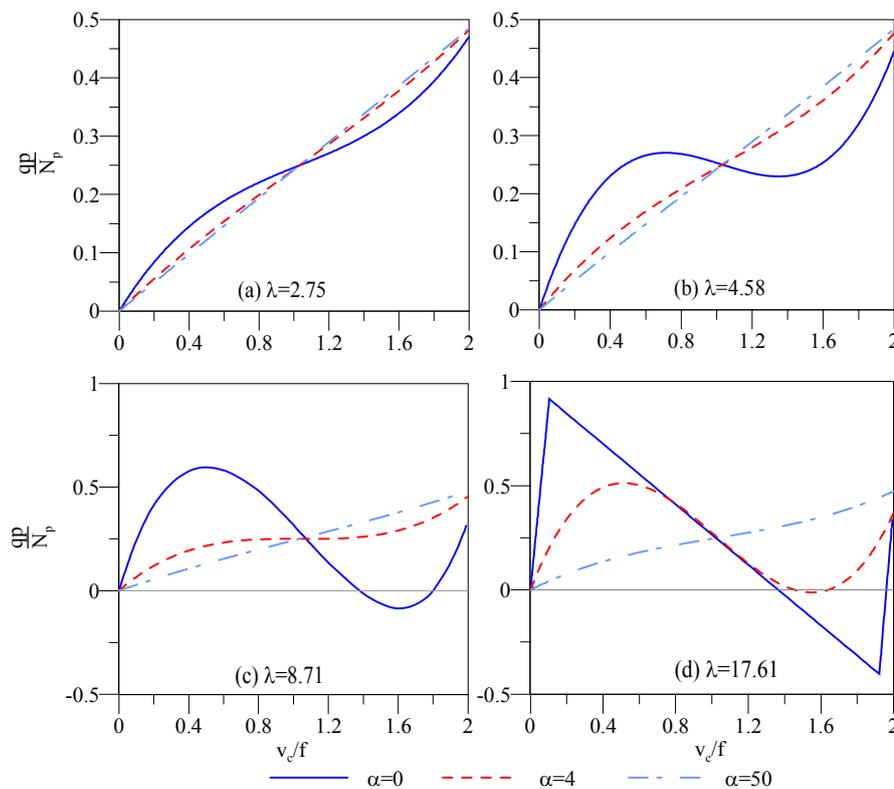


Figura 2.6 – Caminhos não lineares de equilíbrio de arcos parabólicos suportado horizontalmente por molas. $\alpha = 0, 4$ e 50 . Método analítico.

Na Tabela 2.3 é apresentado o valor do carregamento e do deslocamento crítico para os casos aqui analisados.

Tabela 2.3 - Carregamento Critico (pq/N_p)crit

λ	α	Vc/f	(qp/N) analítico	q (KN/m)
4.58	0	0.710	0.28	0.95
8.71	0	0.470	0.55	3.62
	4	0.965	0.25	1.64
17.61	0	0.105	0.92	12.25
	4	0.501	0.48	6.35