

4

Modelos de fatores com betas variantes no tempo

Este capítulo apresenta os modelos de fatores para os quais as sensibilidades dos retornos em relação a cada fator, os betas, são tratadas como variantes no tempo. Trata-se, na prática, de um modelo de regressão com coeficientes dinâmicos aplicado no contexto de modelos de fatores para retornos de ativos financeiros.

A primeira seção apresenta uma generalização do modelo de fatores tradicional, partindo da abordagem em que os betas são constantes para a abordagem em que os betas variam no tempo. A seção 4.2 apresenta os modelos propostos neste trabalho na forma espaço-estado, estendendo o modelo de Adrian e Franzoni (2009) para o caso de apreçamento de mais fatores além do excesso de retorno do mercado. A seção 4.3 apresenta os estudos de simulação dos modelos estudados para avaliar a precisão das estimativas dos hiperparâmetros a partir do programa utilizado, desenvolvido em *Matlab* com funções adaptadas do *toolbox* SSM (Peng e Aston, 2011).

4.1

Generalização de modelos de fatores com coeficientes variantes no tempo

Na forma tradicional, o processo gerador de retornos em modelos de múltiplos fatores pode ser definido como (Campbell, Lo e MacKinlay, 1997; Tsay, 2010):

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i1}f_{1,t} + \cdots + \beta_{ik}f_{k,t} + \epsilon_{i,t} = \alpha_i + \sum_{j=1}^k \beta_{ij}f_{j,t} + \epsilon_{i,t} \quad (4.1)$$

$$E[\epsilon_{i,t}] = 0, \quad E[\epsilon_{i,t}^2] = \sigma_i^2, \quad cov[\epsilon_{i,t}, f_{j,s}] = 0$$

para todo i, j, t e s

onde $r_{i,t}$ é o retorno do ativo i no tempo t , α_i é uma constante representando o intercepto, $f_{j,t}$ é a realização do fator j , sendo $j = 1 \dots k$, β_{ij} é chamado *loading*, ou exposição, do ativo i ao fator j e $\epsilon_{i,t}$ é o termo de erro idiossincrático do ativo i .

Os betas são definidos como coeficientes de regressão múltipla dos retornos sobre os fatores dados na equação (4.1), comumente chamada de regressão por série temporal, uma vez que se costuma rodar uma regressão no tempo para cada ativo i . Ou, ainda:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i' f_t + \epsilon_{i,t} \quad t = 1 \text{ a } N \quad (4.2)$$

onde β_i é o vetor $k \times 1$ de sensibilidades do ativo i aos fatores e f_t é o vetor $k \times 1$ de realizações dos fatores comuns. Seguindo Elton et al. (2004), tomando o valor esperado da equação (4.1), tem-se que:

$$E[r_{i,t}] = \alpha_i + \sum_{j=1}^k \beta_{ij} E[f_{j,t}] \quad (4.3)$$

e tomando a diferença entre as equações (4.1) e (4.3), obtém-se, a seguinte expressão, de forma alternativa, para o processo gerador de retornos:

$$r_{i,t} = E[r_{i,t}] + \sum_{j=1}^k \beta_{ij} (f_{j,t} - E[f_{j,t}]) + \epsilon_{i,t} \quad (4.4)$$

Considerando a existência da taxa livre de risco, os trabalhos empíricos em finanças tratam os modelos de múltiplos fatores em termos de retorno esperado na forma a seguir (Cochrane, 2005):

$$E[r_{i,t}] = r_f + \beta_{i1}\lambda_1 + \dots + \beta_{ik}\lambda_k \quad \text{para } i = 1 \text{ a } p \quad (4.5)$$

onde λ_j é o prêmio de risco esperado associado ao fator j . Considerando os fatores como excesso de retornos de carteiras, como no modelo de três fatores de Fama e French (1993), podemos escrever o modelo como:

$$E[r_{i,t}] = r_f + \beta_{i1}E[f_{1,t}] + \dots + \beta_{ik}E[f_{k,t}] \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.4), tem-se que:

$$r_{i,t} = r_f + \sum_{j=1}^k \beta_{ij} f_{j,t} + \epsilon_{i,t} \quad (4.7)$$

ou, em função de excesso de retorno do ativo i , pode-se escrever:

$$R_{i,t} = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} f_{j,t} + \epsilon_{i,t} \quad (4.8)$$

implicando que o intercepto α_i seja nulo. Comumente, estima-se a equação (4.8) a partir de uma regressão temporal e se testa se o intercepto é nulo.

Dentre os objetivos desta tese está o estudo de modelos de múltiplos fatores, mas considerando as sensibilidades aos fatores como variantes no tempo no contexto de modelos condicionais, nos quais a dinâmica temporal é descrita no próprio modelo. Avramov e Chordia (2006), em analogia à equação (4.4), trabalham com a seguinte estrutura para modelos de fatores condicionais:

$$r_{i,t} = E_{t-1}[r_{i,t}] + \sum_{j=1}^k \beta_{ij,t} (f_{j,t} - E_{t-1}[f_{j,t}]) + \epsilon_{i,t} \quad (4.9)$$

onde $\beta_{ij,t}$ é a exposição condicional do ativo i ao fator j no tempo t , agora considerada variante no tempo e $E_{t-1}[\cdot]$ é a esperança condicional dado o conjunto de informação até o tempo $t-1$. Seguindo o mesmo desenvolvimento considerando agora os betas variantes no tempo, supondo a existência da taxa livre de risco e fatores dados por excesso de retornos de portfólios existentes, para cada ativo i , o modelo é dado por:

$$R_{i,t} = \beta'_{i,t} \mathbf{f}_t + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2) \quad (4.10)$$

onde $R_{i,t}$ é o excesso de retorno do ativo ou carteira i , $\mathbf{f}_t$ é o vetor de retorno dos fatores, $\beta'_{i,t}$ é vetor linha beta de sensibilidades em relação aos k fatores.

4.2

Modelos de fatores na forma espaço-estado

As modelagens para variação temporal de beta nesta tese seguirão alguns modelos apresentados no Capítulo 2. Adrian e Franzoni (2009) sugerem a extensão de seu trabalho, em que beta segue um processo estocástico autoregressivo combinado com variáveis exógenas, para uma modelagem para múltiplos fatores. O interesse é combinar a modelagem dos betas dada por processos estocásticos com uma dependência em relação a variáveis relativas ao ciclo econômico. Assim, além de variáveis observadas *proxy* da informação

disponível, a modelagem através de um processo estocástico permite capturar a influência de variáveis não observadas diretamente e de características dos próprios valores passados de beta, como persistência ou reversão à média. Ao considerar a extensão deste modelo para múltiplos fatores, podem-se incluir como casos particulares outros modelos apresentados na literatura, como o de Ferson e Harvey (1999) em que os betas são considerados apenas funções determinísticas de variáveis defasadas, ou o de Mergner (2009) em que é considerado apenas o passeio aleatório como processo estocástico dos betas. Desta forma, pode-se verificar se as melhorias alcançadas justificam a implementação. Além disso, o desempenho dos modelos de múltiplos fatores condicionais pode ser comparado com os de modelos condicionais análogos para apenas um fator, como os apresentados por Adrian e Franzoni (2009), Jostova e Philipov (2005) e Mergner (2009).

Em trabalhos acerca do CAPM condicional, considerando apenas um fator de risco, Adrian e Franzoni (2009) justificam a escolha do movimento de reversão à média na tentativa de capturar movimentos de longo prazo no risco de classes de ativos, como ações de valor e de crescimento.¹ Jostova e Philipov (2005) defendem também o movimento de reversão, mas, por outro lado, ao comparar diferentes processos estocásticos para descrição da dinâmica de beta, Mergner (2009) observa em seu estudo que o melhor desempenho é obtido no caso de passeio aleatório. Cabe observar que, ao se trabalhar com um processo de reversão à média, outros processos podem ser obtidos como casos particulares dependendo dos valores do parâmetro de persistência da dinâmica de beta.

Além disso, como abordado no Capítulo 2, o uso de beta como função de variáveis condicionantes defasadas é tradicional na literatura associando sua evolução a variações no ciclo econômico, de modo que as variáveis utilizadas são *proxy* da informação disponível aos investidores. A premissa é que o risco associado aos fluxos de caixa das empresas pode variar ao longo do ciclo econômico, como, por exemplo, em períodos de recessão ou expansão da economia. Avramov e Chordia (2006) argumentam, de acordo resultados

¹ Adrian e Franzoni (2009) observam que, em diversos estudos sobre o mercado norte-americano, há evidências de que os betas das ações de valor eram maiores do que as de crescimento no período de 1926 a 1963, sendo o contrário verdade em amostra mais recente a partir de 1963. Ao tratar a dinâmica dos betas a partir de modelo auto-regressivo, os autores buscam modelar um movimento de longo prazo não capturado nas aplicações tradicionais do CAPM condicional.

encontrados em seu trabalho, que o fato de se considerar a dependência de beta em relação a variáveis do ciclo econômico e atributos da firma, melhora a habilidade de apreçamento dos modelos avaliados. Adrian e Franzoni (2009) escolhem variáveis cuja habilidade de previsão do beta ou do prêmio de risco tenha sido identificada na literatura. Na prática, como apresentado no Capítulo 2, algumas variáveis condicionantes utilizadas incluem o *default spread*, o *term spread*, os retornos do ativo livre de risco e da carteira de mercado, entre outras.

Adrian e Franzoni (2009) identificam que apenas o uso de apenas variáveis condicionantes como determinantes da variação de beta não melhoram a performance do modelo em testes de séries temporais, em linha com os resultados de Lewellen e Nagel (2006). Entretanto, os autores, ao proporem uma combinação de um processo de reversão à média com variáveis condicionantes para descrição da dinâmica de beta, observam uma redução significativa dos erros de apreçamento. O modelo proposto por Adrian e Franzoni (2009) é o ponto de partida para a presente pesquisa, de modo que, no contexto mais amplo estendendo para um modelo de múltiplos fatores, pode ser escrito como:

$$R_{i,t} = \sum_{j=1}^k \beta_{ij,t} f_{j,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \quad (4.11)$$

$$\beta_{ij,t+1} - B_{ij} = \delta_{ij}(\beta_{ij,t} - B_{ij}) + \phi'_{ij} \mathbf{Z}_t + \eta_{ij,t+1} \quad \eta_{ij,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_j}^2) \quad (4.12)$$

$j = 1 \text{ a } k$

onde $\beta_{ij,t}$ é beta do ativo i em relação a cada fator j , B_{ij} é a media de longo prazo de $\beta_{ij,t}$, δ_{ij} é o parâmetro de persistência da dinâmica de beta $\beta_{ij,t}$, que reflete a força de reversão à média, $\mathbf{Z}_t$ é o vetor de variáveis condicionantes, corrigidas pela média sem perda de generalidade, e ϕ_{ij} é o vetor de coeficientes que relaciona $\beta_{ij,t}$ com $\mathbf{Z}_{t-1}$. A dinâmica de beta dada pela equação (4.12) pressupõe um processo estacionário, de forma que a média incondicional é dada por:

$$E[\beta_{ij}] = \frac{(1 - \delta_{ij})B_{ij}}{(1 - \delta_{ij})} = B_{ij} \quad (4.13)$$

A variância incondicional, por sua vez, na ausência de dependência em variáveis condicionantes, ou seja, quando $\phi'_{ij} = \mathbf{0}$, é dada por:

$$var[\beta_{ij}] = \frac{\sigma_{\eta j}^2}{(1 - \delta_{ij}^2)} \quad (4.14)$$

Já no caso em que há dependência em variáveis condicionantes, a variância incondicional é dada por:

$$var[\beta_{ij}] = \frac{\sigma_{\eta j}^2 + \sum_g \phi_{ij,g}^2 var[Z_g]}{(1 - \delta_{ij}^2)} \quad (4.15)$$

onde g é o número de variáveis condicionantes consideradas no modelo.

Alternativamente, para o processo de estimação do modelo de múltiplos fatores neste trabalho, a equação (4.12) pode ser reescrita no seguinte formato:

$$\beta_{ij,t+1} = \delta_{ij}\beta_{i,t} + a_{ij} + \boldsymbol{\phi}_{ij}'\mathbf{Z}_t + \eta_{ij,t+1} \quad (4.16)$$

onde

$$a_{ij} = (1 - \delta_{ij})B_{ij} \quad (4.17)$$

Considerando um modelo de três fatores como o de Fama e French (1993), objeto de estudo no Capítulo 6, e a evolução do beta de cada fator dada pela equação (4.12), temos:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \beta_{i1,t}f_{1,t} + \beta_{i2,t}f_{2,t} + \beta_{i3,t}f_{3,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \\ \beta_{i1,t+1} &= B_{i1} + \delta_{i1}(\beta_{i1,t} - B_{i1}) + \boldsymbol{\phi}_{i1}'\mathbf{Z}_t + \eta_{i1,t} \quad \eta_{i1,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 1}^2) \\ \beta_{i2,t+1} &= B_{i2} + \delta_{i2}(\beta_{i2,t} - B_{i2}) + \boldsymbol{\phi}_{i2}'\mathbf{Z}_t + \eta_{i2,t} \quad \eta_{i2,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 2}^2) \\ \beta_{i3,t+1} &= B_{i3} + \delta_{i3}(\beta_{i3,t} - B_{i3}) + \boldsymbol{\phi}_{i3}'\mathbf{Z}_t + \eta_{i3,t} \quad \eta_{i3,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 3}^2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $f_{1,t}, f_{2,t}$ e $f_{3,t}$ são os retornos dos três fatores, sendo o primeiro fator correspondente ao excesso de retorno da carteira de mercado, o segundo ao retorno da carteira *SMB* e o terceiro ao retorno da carteira *HML*, como descritos no Capítulo 2. Ou, ainda, dada a forma alternativa para os betas pela equação (4.16), temos:

$$\begin{aligned}
R_{i,t} &= \beta_{i1,t}f_{1,t} + \beta_{i2,t}f_{2,t} + \beta_{i3,t}f_{3,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\
\beta_{i1,t+1} &= \delta_{i1}\beta_{i1,t} + a_{i1} + \boldsymbol{\Phi}'_{i1}\mathbf{Z}_t + \eta_{i1,t} \quad \eta_{i1,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_1}^2) \\
\beta_{i2,t+1} &= \delta_{i1}\beta_{i2,t} + a_{i2} + \boldsymbol{\Phi}'_{i2}\mathbf{Z}_t + \eta_{i2,t} \quad \eta_{i2,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_2}^2) \\
\beta_{i3,t+1} &= \delta_{i3}\beta_{i3,t} + a_{i3} + \boldsymbol{\Phi}'_{i3}\mathbf{Z}_t + \eta_{i3,t} \quad \eta_{i3,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_3}^2)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

O tratamento do problema pode ser feito sob o conceito de regressão com coeficientes variáveis, apresentado no Capítulo 3. Para estimação do modelo dado pelo conjunto de equações (4.19), podemos reescrevê-lo na forma matricial como:

$$\begin{aligned}
R_{i,t} &= (f_{1,t} \quad f_{2,t} \quad f_{3,t}) \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix} + \epsilon_{i,t} \\
\begin{pmatrix} \beta_{i1,t+1} \\ \beta_{i2,t+1} \\ \beta_{i3,t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{i1} & \boldsymbol{\Phi}'_{i1} \\ a_{i2} & \boldsymbol{\Phi}'_{i2} \\ a_{i3} & \boldsymbol{\Phi}'_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Z}_t \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{i1,t} \\ \eta_{i2,t} \\ \eta_{i3,t} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

De forma geral, considerando um modelo espaço-estado como descrito pelas equações (3.1)-(3.2) no caso univariado, ou seja, para $R_{i,t}$ sendo um escalar correspondente ao excesso de retorno de um ativo i ($t = 1$ a N), tem-se:

$$\text{Equação de observação:} \quad R_{i,t} = \mathbf{S}_t \boldsymbol{\mu}_{i,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \tag{4.21}$$

$$\text{Equação de estado:} \quad \boldsymbol{\mu}_{i,t+1} = \mathbf{T}_{i,t} \boldsymbol{\mu}_{i,t} + \mathbf{c}_{i,t} + \mathbf{U}_{i,t} \boldsymbol{\eta}_{i,t} \quad \boldsymbol{\eta}_{i,t} \sim N(0, \mathbf{Q}) \tag{4.22}$$

As matrizes do sistema e o vetor de estado $\boldsymbol{\mu}_{i,t}$ são dados por:

$$\mathbf{S}_t = (f_{1,t} \quad f_{2,t} \quad f_{3,t})$$

$$\boldsymbol{\mu}_{i,t} = \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{i,t} = \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{i3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{i,t} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \boldsymbol{\Phi}'_{i1} \\ a_{i2} & \boldsymbol{\Phi}'_{i2} \\ a_{i3} & \boldsymbol{\Phi}'_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Z}_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_i \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Z}_t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{i,t} = \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}_{i,t} = \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta 1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta 2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\eta 3}^2 \end{pmatrix}$$

Sejam:

$$\mathbf{b}_{i,t+1} = \mathbf{b}_{i,t+1|t} = E[\boldsymbol{\mu}_{i,t+1} | \mathbf{R}_{i,t}] \quad (4.23)$$

$$\mathbf{P}_{i,t+1} = \mathbf{P}_{i,t+1|t} = \text{var}[\boldsymbol{\mu}_{i,t+1} | \mathbf{R}_{i,t}] \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{R}_{i,t} = \{R_{i,1}, \dots, R_{i,t}\}$. O filtro de Kalman pode ser aplicado para estimação recursiva do vetor de estado $\boldsymbol{\mu}_{i,t}$. Pelas equações (3.5)-(3.6), tem-se que:

$$\mathbf{b}_{i,t+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{b}_{i,t} + \mathbf{c}_{i,t} + \mathbf{k}_{i,t} \mathbf{v}_{i,t} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_{i,t+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{P}_{i,t} \mathbf{L}_{i,t}' + \mathbf{U} \mathbf{Q}_i \mathbf{U}' \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{v}_{i,t} = R_{i,t} - \mathbf{S}_t \mathbf{b}_{i,t}$; $\mathbf{k}_{i,t} = \mathbf{T}_i \mathbf{M}_{i,t} F_{i,t}^{-1}$; $\mathbf{M}_{i,t} = \mathbf{P}_{i,t} \mathbf{S}_t'$; $F_{i,t} = \mathbf{S}_t \mathbf{P}_{i,t} \mathbf{S}_t' + \sigma_\epsilon^2$ e $\mathbf{L}_{i,t} = \mathbf{T}_i - \mathbf{k}_{i,t} \mathbf{S}_t$.

O conjunto de hiperparâmetros $\boldsymbol{\psi}_i$ do modelo para cada ativo i é dado pelos parâmetros que compõem $\mathbf{T}_i$ e $\boldsymbol{\Phi}_i$ e pelas variâncias σ_ϵ^2 e $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$, e podem ser estimados por máxima verossimilhança, como descrito no Capítulo 3. De acordo com a equação (3.22), a função de log-verossimilhança é dada por:

$$\log L(\boldsymbol{\psi}_i; \mathbf{R}_i) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \log F_{i,t} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{(R_{i,t} - \mathbf{S}_t \mathbf{b}_{i,t})^2}{F_{i,t}} \quad (4.27)$$

4.3

Estudos de simulação

O estudo de simulação envolve dois estágios, o de geração e o de estimação. Para testar o processo de estimação por máxima verossimilhança, são geradas séries sintéticas a partir de valores conhecidos para os hiperparâmetros envolvidos, chamados de reais, e, em seguida, submetidas ao processo de otimização. Deste modo, os hiperparâmetros estimados podem ser comparados aos seus valores reais que geraram a série para avaliar a precisão das estimativas a partir do programa computacional utilizado, bem como verificar questões pertinentes sobre valores iniciais para o filtro de Kalman.

O processo de otimização numérica é realizado a partir de uma combinação de métodos de Newton e algoritmos genéticos, podendo ser considerado um processo híbrido. O uso de algoritmos genéticos permite explorar o espaço paramétrico de uma forma mais ampla; este procedimento parte de um conjunto inicial de soluções, chamada de população inicial, cujos “indivíduos” são evoluídos até que a solução ótima seja encontrada. Uma forma de se trabalhar é considerar alguns indivíduos desta população inicial como possíveis soluções encontradas a partir de método do Newton. No caso do algoritmo híbrido utilizado, a população inicial é formada por 50 “indivíduos”, sendo eles dados por três soluções encontradas a partir da otimização por método de Newton, mais 47 pontos aleatórios. Utilizando o *Matlab*, as três soluções iniciais dadas por métodos de Newton são obtidas a partir do método BFGS (função *fminsearch*) e do método *Nelder-Mead* (função *fminsearch*), considerando pontos iniciais diferentes. Adicionando outros 47 pontos aleatórios para formar a população, é rodado o procedimento de otimização utilizando algoritmos genéticos e obtém-se então uma solução dada pelo ponto de maior verossimilhança dentre todos avaliados. Apenas para refinar a solução, roda-se novamente o método BFGS utilizando esta solução do algoritmo genético como ponto inicial, obtendo-se, assim, o ponto ótimo.

Os modelos a serem testados envolvem inicialmente apenas um fator com e sem variáveis condicionantes e, em seguida, três fatores, também com e sem variáveis condicionantes, como descritos a seguir.

4.3.1

Modelos a serem analisados

Os seguintes modelos foram utilizados no processo de testes dos algoritmos de otimização e nos procedimentos de simulação e estimação de séries sintéticas, sendo estes modelos a serem aplicados nos estudos empíricos dos Capítulos 5 e 6.

- **Modelo 1: um fator com beta seguindo reversão à média**

Seguindo o *Learning CAPM* apresentado por Adrian e Franzoni (2009) e o modelo proposto por Jostova e Philipov (2005), para cada ativo i o modelo proposto é dado por:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \beta_{i,t} f_t + \epsilon_{i,t} & \epsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \beta_{i,t+1} &= B_i + \delta_i(\beta_{i,t} - B_i) + \eta_{i,t} & \eta_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Neste caso, mantendo o procedimento de Adrian e Franzoni (2009), a média de longo prazo é tratada como desconhecida, incluída no vetor de estado de modo a ser estimada a cada nova observação. Para estimação, o modelo é escrito como:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= (f_t \quad 0) \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix} + \epsilon_{i,t} & \epsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \begin{pmatrix} \beta_{i,t+1} \\ B_{i,t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_i & (1 - \delta_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_{i,t} & \eta_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Os hiperparâmetros a serem estimados neste modelo são σ_ϵ^2 , σ_η^2 e δ_i .

- **Modelo 2: um fator com beta seguindo reversão à média combinado com variáveis condicionantes defasadas**

Seguindo o *Learning CAPM* combinado com variáveis condicionantes defasadas, também apresentado por Adrian e Franzoni (2009), o modelo proposto para cada ativo i é dado por:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \beta_{i,t} f_t + \epsilon_{i,t} & \epsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \beta_{i,t+1} &= B_i + \delta_i(\beta_{i,t} - B_i) + \Phi_t' \mathbf{Z}_t + \eta_{i,t} & \eta_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Novamente, a média de longo prazo é incluída no vetor de estado, de modo a ser estimada a cada nova observação. O modelo é descrito da seguinte forma:

$$R_{i,t} = (f_t \quad 0) \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (4.31)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{i,t+1} \\ B_{i,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i & (1 - \delta_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_i' Z_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_{i,t} \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

Os hiperparâmetros a serem estimados são σ_ϵ^2 , $\sigma_{\eta 1}^2$, δ_i e os coeficientes Φ_i .

- **Modelo 3: três fatores com betas seguindo reversão à média**

Estendendo o *Learning CAPM* de Adrian e Franzoni (2009), sem a presença de variáveis condicionantes, para o caso do modelo de três fatores, temos para cada ativo i :

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \beta_{i1,t} f_{1,t} + \beta_{i2,t} f_{2,t} + \beta_{i3,t} f_{3,t} + \epsilon_{i,t} & \epsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \beta_{i1,t+1} &= B_{i1} + \delta_{i1}(\beta_{i1,t} - B_{i1}) + \eta_{i1,t} & \eta_{i1,t} &\sim N(0, \sigma_{\eta 1}^2) \\ \beta_{i2,t+1} &= B_{i2} + \delta_{i2}(\beta_{i2,t} - B_{i2}) + \eta_{i2,t} & \eta_{i2,t} &\sim N(0, \sigma_{\eta 2}^2) \\ \beta_{i3,t+1} &= B_{i3} + \delta_{i3}(\beta_{i3,t} - B_{i3}) + \eta_{i3,t} & \eta_{i3,t} &\sim N(0, \sigma_{\eta 3}^2) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Neste caso, tendo em vista a maior complexidade do modelo, as médias de longo prazo serão tratadas como hiperparâmetros a serem estimados pela função de verossimilhança. De maneira análoga ao conjunto de equações (4.19), o modelo pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \beta_{i1,t} f_{1,t} + \beta_{i2,t} f_{2,t} + \beta_{i3,t} f_{3,t} + \epsilon_{i,t} & \epsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \beta_{i1,t+1} &= \delta_{i1} \beta_{i1,t} + a_{i1} + \eta_{i1,t} & \eta_{i1,t} &\sim N(0, \sigma_{\eta 1}^2) \\ \beta_{i2,t+1} &= \delta_{i1} \beta_{i2,t} + a_{i2} + \eta_{i2,t} & \eta_{i2,t} &\sim N(0, \sigma_{\eta 2}^2) \\ \beta_{i3,t+1} &= \delta_{i3} \beta_{i3,t} + a_{i3} + \eta_{i3,t} & \eta_{i3,t} &\sim N(0, \sigma_{\eta 3}^2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Na forma espaço-estado, tem-se que:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= (f_{1,t} \quad f_{2,t} \quad f_{3,t}) \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix} + \epsilon_{i,t} \\ \begin{pmatrix} \beta_{i1,t+1} \\ \beta_{i2,t+1} \\ \beta_{i3,t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{i1,t} \\ \eta_{i2,t} \\ \eta_{i3,t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Os hiperparâmetros a serem estimados são as variâncias σ_ϵ^2 , $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$, os parâmetros de reversão δ_{i1} , δ_{i2} e δ_{i3} e os coeficientes a_{i1} , a_{i2} e a_{i3} , que indiretamente fornecem informação sobre as médias de longo prazo dos betas.

- **Modelo 4: três fatores com betas seguindo reversão à média combinado com variáveis condicionantes defasadas**

Novamente, este é o caso mais geral apresentado pelas equações (4.18) a (4.20), repetidas a seguir para facilitar a sequência de leitura.

$$\begin{aligned}
 R_{i,t} &= \beta_{i1,t}f_{1,t} + \beta_{i2,t}f_{2,t} + \beta_{i3,t}f_{3,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\
 \beta_{i1,t+1} &= B_{i1} + \delta_{i1}(\beta_{i1,t} - B_{i1}) + \Phi'_{i1}\mathbf{Z}_t + \eta_{i1,t} \quad \eta_{i1,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 1}^2) \\
 \beta_{i2,t+1} &= B_{i2} + \delta_{i2}(\beta_{i2,t} - B_{i2}) + \Phi'_{i2}\mathbf{Z}_t + \eta_{i2,t} \quad \eta_{i2,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 2}^2) \\
 \beta_{i3,t+1} &= B_{i3} + \delta_{i3}(\beta_{i3,t} - B_{i3}) + \Phi'_{i3}\mathbf{Z}_t + \eta_{i3,t} \quad \eta_{i3,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 3}^2)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

As médias de longo prazo são novamente tratadas como hiperparâmetros estimados pela função de verossimilhança, de forma que o modelo é dado por:

$$\begin{aligned}
 R_{i,t} &= \beta_{i1,t}f_{1,t} + \beta_{i2,t}f_{2,t} + \beta_{i3,t}f_{3,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\
 \beta_{i1,t+1} &= \delta_{i1}\beta_{i1,t} + a_{i1} + \Phi'_{i1}\mathbf{Z}_t + \eta_{i1,t} \quad \eta_{i1,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 1}^2) \\
 \beta_{i2,t+1} &= \delta_{i2}\beta_{i2,t} + a_{i2} + \Phi'_{i2}\mathbf{Z}_t + \eta_{i2,t} \quad \eta_{i2,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 2}^2) \\
 \beta_{i3,t+1} &= \delta_{i3}\beta_{i3,t} + a_{i3} + \Phi'_{i3}\mathbf{Z}_t + \eta_{i3,t} \quad \eta_{i3,t} \sim N(0, \sigma_{\eta 3}^2)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Na forma espaço-estado, tem-se:

$$\begin{aligned}
 R_{i,t} &= (f_{1,t} \quad f_{2,t} \quad f_{3,t}) \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix} + \epsilon_{i,t} \\
 \begin{pmatrix} \beta_{i1,t+1} \\ \beta_{i2,t+1} \\ \beta_{i3,t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i1,t} \\ \beta_{i2,t} \\ \beta_{i3,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{i1} & \Phi'_{i1} \\ a_{i2} & \Phi'_{i2} \\ a_{i3} & \Phi'_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Z}_t \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{i1,t} \\ \eta_{i2,t} \\ \eta_{i3,t} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Os hiperparâmetros a serem estimados são as variâncias σ_ϵ^2 , $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$, os parâmetros de reversão δ_{i1} , δ_{i2} e δ_{i3} , os coeficientes a_{i1} , a_{i2} e a_{i3} e os coeficientes dos vetores ϕ_{i1} , ϕ_{i2} e ϕ_{i3} .

4.3.2

Dados para simulação

Para o modelo de um fator, como é o caso do CAPM, para a série f_t foi utilizada a série de excesso de retorno da carteira de mercado $R_{m,t}$ no mercado norte-americano, no período de janeiro de 1963 a dezembro de 2012, extraída do *website* do prof. Kenneth French², base de dados utilizada nos estudos relativos ao mercado norte-americano. Para o modelo de três fatores foram utilizados inicialmente valores artificiais para três séries de fatores a partir de distribuições normais descorrelacionadas. Tomando como base o modelo de três fatores de Fama e French (1993), foram realizados adicionalmente alguns testes considerando valores conhecidos para as séries dos fatores $f_{1,t}$, $f_{2,t}$ e $f_{3,t}$, dados pelas séries de $R_{m,t}$, SMB_t e HML_t , correspondentes ao prêmio de risco de mercado e aos outros dois fatores adicionais do referido modelo, tal como abordado no Capítulo 2. Os dados foram extraídos do mesmo *website* mencionado. No caso de uso de variáveis condicionantes Z_t e seguindo a literatura internacional, foram escolhidas duas séries do mercado norte-americano: a de *default spread* e a de *term spread*, também mencionadas na revisão de literatura apresentada no Capítulo 2, sendo o *default spread* (DEF) dado pela diferença de rendimento dos títulos corporativos classificados como BAA e AAA), e o *term spread* (TERM) dado pela diferença entre a taxa de rendimento dos títulos do Tesouro Americano de maturidade 10 anos e 3 meses. As séries para construção de TERM e DEF foram obtidas na base de dados *Federal Reserve Economic Data (FRED Economic Data)*³.

² http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html. O detalhamento de construção das séries pode ser obtidos no próprio *website*.

³ Disponível no *website* do *Federal Reserve Bank of St. Louis* (<http://research.stlouisfed.org/fred2/>)

4.3.3 Resultados da estimação de séries sintéticas

A partir de valores conhecidos escolhidos para os hiperparâmetros de cada um dos quatro modelos descritos anteriormente nesta seção, são geradas séries sintéticas de tamanho $N=600$ para os betas e para os retornos. As séries sintéticas são então submetidas ao processo de estimação, tendo sido utilizado programa desenvolvido em *Matlab* com funções adaptadas do *toolbox* SSM (Peng e Aston, 2011) considerando a construção dos modelos propostos e função de otimização baseada em algoritmo híbrido a partir de métodos de Newton e algoritmos genéticos, como explicado anteriormente no início da seção 4.3. As tabelas a seguir apresentam os resultados de média e desvio-padrão para os hiperparâmetros estimados em cada um dos experimentos realizados.

- **Modelo 1: um fator com beta seguindo reversão à média**

Para os valores dos hiperparâmetros utilizados na geração de séries sintéticas a serem estimadas, foram tomados como base diversos trabalhos da literatura⁴, tais como o de Jostova e Philipov (2005) que realizaram estudos de simulação para séries sintéticas considerando como parâmetros de variância $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_\eta^2 = 0,0625$; e como parâmetro de reversão à média $\delta = 0,4$ e $\delta = 0,7$. Uma vez que a média de longo prazo é tratada como hiperparâmetro pelos autores, eles consideram na simulação $B = 0,7$ e $1,3$.⁵

⁴ O índice i , para referencia o ativo i , foi removido aqui da notação para facilitar a leitura.

⁵ Considerando o uso de dados mensais, nos resultados obtidos para séries reais analisadas por Jostova e Philipov (2005), os valores de σ_ϵ^2 variam de 0,00006 a 0,00088; os valores de σ_η^2 variam de 0,0019 a 0,0558; os valores correspondentes ao parâmetro δ variam de 0,01 a 0,93; e os valores correspondentes a média de longo prazo B variam de 0,52 a 1,19. Nos resultados obtidos para as séries reais analisadas por Mergner (2009) para beta seguindo processo de reversão à média, os valores de σ_ϵ^2 variam de 0,00006 a 0,00041; os valores de σ_η^2 variam de 0,0013 a 0,3769; os valores de δ variam de 0,00 a 0,98; e os valores de B variam de 0,68 a 1,48. Em ambos os casos, a média de longo prazo é tratada como hiperparâmetro do modelo. Já Adrian e Franzoni (2009) trata a média de longo prazo como uma variável de estado do modelo no processo de estimação. Considerando ainda que eles trabalham com dados trimestrais, para as séries reais utilizando o processo de reversão à média sem variáveis condicionantes para beta, eles obtêm os seguintes valores estimados: para σ_ϵ^2 , os valores variam de 0,00071 a 0,00975; para σ_η^2 variam de 0,01 a 0,66; para δ variam de -0,26 a 0,35. Utilizando o processo de reversão à média com variáveis condicionantes, os valores estimados para σ_ϵ^2 variam de 0,00076 a 0,00983; para σ_η^2 variam de 0,00 a 0,65; para δ variam de -0,18 a 0,32; e para os valores dos coeficientes ϕ de dependência nas variáveis condicionantes, os valores variam de -12,96 a 5,21.

Nos experimentos deste trabalho, como valores para os hiperparâmetros de variâncias foram utilizados $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_\eta^2 = 0,05$. Para o parâmetro de persistência δ , foram considerados quatro valores, $\delta = 0,10; 0,40; 0,70$ e $0,90$, de forma que quanto menor a persistência, maior a força de reversão à média, e vice-versa. Cabe ressaltar quando $\delta = 1$, tem-se um processo de passeio aleatório. Para a geração das séries, foi utilizado para o vetor de estado inicial $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{P}_1 = \text{diag}\left(\frac{\sigma_\eta^2}{(1-\delta^2)}, 0\right)$.

No processo de estimação, para os valores iniciais dos hiperparâmetros, foi utilizado como σ_ϵ^2 a variância da série sintética gerada para R_t ; como σ_η^2 a variância da série de beta estimado por mínimos quadrados com janelas móveis de tamanho 60 (60 meses); e como δ o valor de 0,5, neste caso, seguindo Mergner (2009). Quanto ao vetor de estado, o procedimento utilizado foi o de inicialização difusa exata (abordada na seção 3.3) para as duas componentes, considerando que a média de longo prazo é tratada como variável de estado constante ao longo do tempo. Para cada conjunto de hiperparâmetros, considerando 100 séries sintéticas, os resultados para a média e o desvio-padrão das estimativas são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Estimação do Modelo 1 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_\eta^2 = 0,05$

σ_ϵ^2 real = 0,0001	σ_η^2 real = 0,05		
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$
0,0001 (9,78E-06)	0,0498 (7,60E-03)	0,10	0,1142 (0,1087)
0,0001 (9,82E-06)	0,0503 (8,37E-03)	0,40	0,4026 (0,0899)
0,0001 (9,43E-06)	0,0514 (8,65E-03)	0,70	0,6935 (0,0481)
0,0001 (9,24E-06)	0,0514 (7,59E-03)	0,90	0,8946 (0,0204)

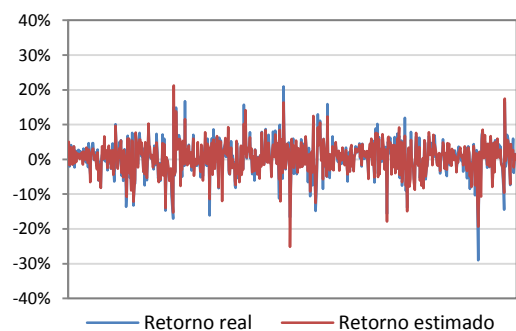
Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis

As estimativas tanto para os parâmetros de variância σ_ϵ^2 e σ_η^2 quanto para o parâmetro de persistência δ são bem próximas dos valores reais em todos os casos. Para o parâmetro δ , a precisão das estimativas melhora para valores mais altos de δ , tendo em vista que os desvios-padrão das estimativas se tornam menores. A Figura 4.A.1 no Apêndice 4.A apresenta os histogramas da estimação dos quatro casos apresentados na tabela anterior. A título de exemplo, as Figuras

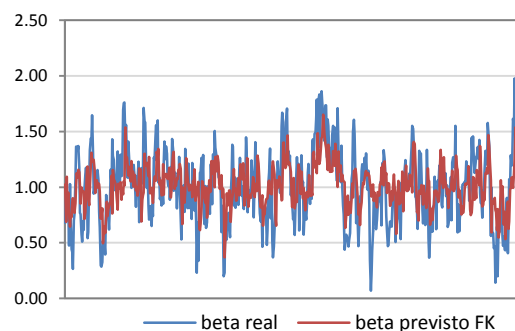
4.1(a) e (b) apresentam uma série sintética gerada e a série estimada correspondente para o retorno e para o beta, respectivamente, nos casos em que $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$ e $\delta = 0,70$.

Figura 4.1 – Séries sintéticas para Modelo 1 com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$, $\delta = 0,70$

(a) Retorno real e estimado



(d) Beta real e estimado



Para sensibilidade do processo de estimação de forma a verificar o comportamento dos valores no caso de variância de beta ser menor, repetiu-se o procedimento utilizando $\sigma_\eta^2 = 0,10$ e $0,01$, como apresentado nas Tabelas 4.2 e 4.3, respectivamente. Os resultados apresentam características similares aos da Tabela 4.1. Verifica-se, ainda, que para valores mais altos de σ_η^2 , a precisão do valor estimado de δ aumenta, considerando seu menor desvio-padrão. Assim, quando o processo apresenta maior variação, maior é a precisão da estimativa do parâmetro referente à força de reversão à média.

Tabela 4.2 – Estimação de do Modelo 1 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_\eta^2 = 0,10$

σ_ϵ^2 real = 0,0001	σ_η^2 real = 0,10		
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$
0,0001	0,1000	0,10	0,1109
(1,08E-05)	(1,19E-02)		(0,0861)
0,0001	0,1007	0,40	0,4038
(1,07E-05)	(1,30E-02)		(0,0692)
0,0001	0,1021	0,70	0,6956
(1,04E-05)	(1,39E-02)		(0,0407)
0,0001	0,1022	0,90	0,8952
(1,01E-05)	(1,29E-02)		(0,0189)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis

Tabela 4.3 – Estimação do Modelo 1 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_\eta^2 = 0,01$

σ_ϵ^2 real = 0,0001	σ_η^2 real = 0,01		
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$
0,0001	0,0097	0,10	0,1505
(8,35E-06)	(3,63E-03)		(0,2676)
0,0001	0,0102	0,40	0,3853
(8,23E-06)	(3,69E-03)		(0,2062)
0,0001	0,0098	0,70	0,6868
(6,71E-06)	(3,37E-03)		(0,1076)
0,0001	0,0098	0,90	0,8973
(6,31E-06)	(2,50E-03)		(0,0313)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis

Outras variações dos testes foram realizadas, considerando diferentes valores para a inicialização do vetor de estado no filtro de Kalman, mas foi verificado que os resultados não se alteram. Foi também utilizado um valor diferente de 1 para a média de longo prazo B na geração das séries, verificando-se que as estimativas permanecem equivalentes aos resultados anteriores. Verificou-se também que, utilizando tamanho menor para as séries ($N=200$)⁶, as estimativas permanecem boas, porém com um desvio-padrão maior. Finalmente, foi considerada uma alteração no espaço paramétrico de δ , pois, em vista que o processo de beta é auto-regressivo de ordem 1, os resultados apresentados acima para o modelo foram estimados para $-1 < \delta < 1$, como também adotado por Adrian e Franzoni (2009) e Jostova e Philipov (2005). Uma variação possível é considerar $0 < \delta < 1$ e, no caso em que a variância σ_η^2 é mais alta (0,05 e 0,10), os resultados praticamente não se alteram. Porém, no caso em que $\sigma_\eta^2 = 0,01$ e δ é baixo, o valor médio estimado de δ fica bem mais alto, pois apenas valores positivos são incluídos. Para as análises empíricas desta tese, abordadas nos Capítulos 5 e 6, foi adotada a parametrização $-1 < \delta < 1$, seguindo os trabalhos de Adrian e Franzoni (2009) e Jostova e Philipov (2005).

- **Modelo 2: um fator com beta seguindo reversão à média combinado com variáveis condicionantes defasadas**

Para a geração das séries sintéticas correspondentes a este modelo, como valores para os hiperparâmetros de variâncias, foram utilizados novamente

⁶ As séries a serem estimadas na aplicação do Capítulo 5 tem aproximadamente este número de observações.

$\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_\eta^2 = 0,05$. Para estas combinações, variaram-se os valores de δ nas mesmas quatro situações anteriores (0,10; 0,40; 0,70 e 0,90). Quanto à dependência em variáveis condicionantes, foram avaliadas simulações para ϕ_1 e $\phi_2 = 5$ e 0,5. Para a geração das séries, foi utilizado para o vetor de estado inicial $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{P}_1 = \text{diag}\left(\frac{\sigma_\eta^2 + \sum_g \phi_g^2 \text{var}[Z_g]}{(1-\delta^2)}, 0\right)$ ⁷.

No processo de estimação, para os valores iniciais dos hiperparâmetros, utilizou-se novamente como σ_ϵ^2 a variância da série sintética gerada para R_t ; como σ_η^2 a variância da série de beta estimado por mínimos quadrados com janelas móveis de tamanho 60 (60 meses); e como δ o valor de 0,5. Para os coeficientes ϕ_1 e ϕ_2 , o valor inicial utilizado foi nulo. Quanto à inicialização do vetor de estado para o filtro de Kalman, o procedimento foi também o de inicialização difusa exata. Para cada conjunto de hiperparâmetros, considerando 100 séries sintéticas, os resultados para média e o desvio-padrão das estimativas no caso em que $\phi_1 = \phi_2 = 5,0$ são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Estimação do Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$, $\phi_1 = 5,0$ e $\phi_2 = 5,0$

$\sigma_\epsilon^2 \text{ real} = 0,0001$	$\sigma_\eta^2 \text{ real} = 0,05$	$\phi_1 \text{ real} = 5,0 \quad \phi_2 \text{ real} = 5,0$			
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	$\delta \text{ real}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
0,0001 (1,03E-05)	0,0479 (9,06E-03)	0,10	0,0855 (0,1230)	5,5319 (3,3243)	5,0285 (1,3771)
0,0001 (9,97E-06)	0,0492 (9,36E-03)	0,40	0,3807 (0,0929)	5,4988 (2,9155)	5,1539 (1,3131)
0,0001 (1,00E-05)	0,0493 (9,14E-03)	0,70	0,6948 (0,0484)	5,1594 (2,6652)	5,1601 (1,1706)
0,0001 (9,04E-06)	0,0502 (6,37E-03)	0,90	0,8933 (0,0190)	4,6002 (2,1412)	5,2777 (0,8539)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Para o caso em que $\phi_1 = \phi_2 = 0,50$, considerando 200 séries sintéticas, os resultados para média e o desvio-padrão são apresentados na Tabela 4.5.

⁷ As variáveis condicionantes utilizadas nos testes são dadas pelas séries $Z_{1t} = DEF$ e $Z_{2t} = TERM$, conforme descritas na seção 5.3.2, defasadas da média. Os valores das variâncias das séries no período analisado são $\text{Var}[DEF] = 2,00 \times 10^{-5}$ e $\text{Var}[TERM] = 1,70 \times 10^{-5}$.

Tabela 4.5 – Estimação do Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$, $\phi_1 = 0,5$ e $\phi_2 = 0,5$

σ_ϵ^2 real = 0,0001	σ_η^2 real = 0,05			ϕ_1 real = 0,5	ϕ_2 real = 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
0,0001 (9,46E-06)	0,0481 (8,35E-03)	0,10	0,0919 (0,1208)	0,3998 (3,2313)	0,6354 (1,1547)
0,0001 (9,78E-06)	0,0488 (8,24E-03)	0,40	0,3884 (0,0867)	0,3801 (2,8063)	0,6114 (0,9283)
0,0001 (8,00E-06)	0,0507 (8,47E-03)	0,70	0,6833 (0,0530)	0,5488 (2,4988)	0,4739 (0,8935)
0,0001 (8,11E-06)	0,0503 (7,42E-03)	0,90	0,8918 (0,0253)	0,6113 (2,4407)	0,5662 (0,8561)

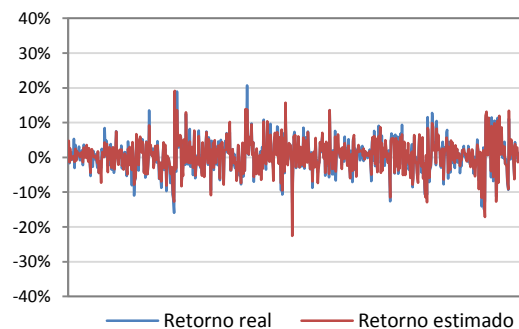
Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Novamente, observa-se que as estimativas para os parâmetros de variância σ_ϵ^2 e σ_η^2 são bastante próximas dos valores reais, bem como as estimativas para o parâmetro de persistência δ . Quanto aos parâmetros de dependência em relação às variáveis condicionantes, para os casos em que consideramos uma ordem de grandeza maior para ϕ_1 e ϕ_2 (iguais a 5,0), os valores médios estimados são melhores do que nos casos em que foi considerado um valor menor (iguais a 0,50). Porém, em todos os casos, o desvio-padrão das estimativas é alto especialmente para valores mais baixos do parâmetro δ . Quanto maior o valor do parâmetro δ , menor o desvio-padrão das estimativas de ϕ_1 e ϕ_2 , refletindo maior precisão. Observa-se, também, que as estimativas do coeficiente ϕ_2 , relativo à segunda variável condicionante, são melhores do que a do parâmetro ϕ_1 , relativo à primeira variável condicionante. Isto ocorre pela diferença de variância na série das duas variáveis Z_1 e Z_2 , tendo a primeira menor variância do que a segunda. A Figura 4.A.2 no Apêndice 4.A apresenta os histogramas das estimativas nos quatro casos apresentados na Tabela 4.5.

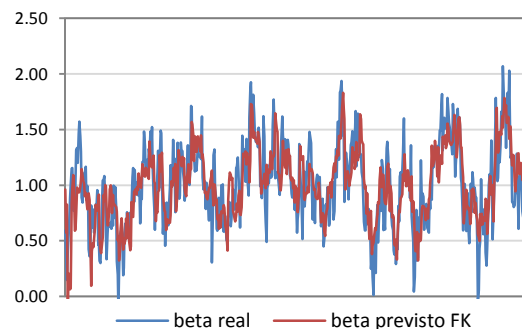
Da mesma forma que no modelo anterior, como exemplo, as Figuras 4.2(a) e (b) apresentam uma série sintética gerada e a série estimada correspondente para o retorno e para o beta, respectivamente, nos casos em que $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$, $\delta = 0,70$ e $\phi_1 = \phi_2 = 5,0$.

Figura 4.2 – Séries sintéticas para retorno e para beta – Modelo 2 com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$, $\delta = 0,70$, $\phi_1 = 5,0$ e $\phi_2 = 5,0$

(a) Retorno real e estimado



(b) Beta real e estimado



Novamente, para avaliar a sensibilidade das estimativas em relação ao parâmetro σ_η^2 , foram considerados ainda os casos de $\sigma_\eta^2 = 0,10$ e $0,01$. Os resultados são apresentados nas Tabelas 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9.

Tabela 4.6 – Estimação do Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,10$, $\phi_1 = 5,0$ e $\phi_2 = 5,0$

σ_ϵ^2 real = 0,0001		σ_η^2 real = 0,10	ϕ_1 real = 5,0			ϕ_2 real = 5,0
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$		$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
0,0001 (1,02E-05)		0,0952 (1,36E-02)	0,10	0,0872 (0,0958)	5,1152 (4,0264)	5,0899 (1,6660)
0,0001 (1,02E-05)		0,0957 (1,40E-02)	0,40	0,3931 (0,0826)	4,9737 (3,5822)	5,0788 (1,5142)
0,0001 (1,05E-05)		0,1000 (1,35E-02)	0,70	0,6908 (0,0442)	5,0537 (3,1742)	5,3488 (1,5697)
0,0001 (9,66E-06)		0,0996 (1,12E-02)	0,90	0,8929 (0,0201)	5,0582 (2,9311)	5,4491 (1,4503)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.7 – Estimação do Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,01$, $\phi_1 = 5,0$ e $\phi_2 = 5,0$

σ_ϵ^2 real = 0,0001		σ_η^2 real = 0,01	ϕ_1 real = 5,0			ϕ_2 real = 5,0
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$		$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
0,0001 (8,43E-06)		0,0082 (3,72E-03)	0,10	0,0761 (0,2938)	5,1477 (2,6067)	5,1969 (1,7777)
0,0001 (8,17E-06)		0,0087 (3,48E-03)	0,40	0,3962 (0,1683)	4,9890 (1,8051)	5,1489 (1,6811)
0,0001 (6,85E-06)		0,0102 (3,31E-03)	0,70	0,6747 (0,0647)	5,3132 (1,4847)	5,3705 (1,0920)
0,0001 (6,65E-06)		0,0096 (2,25E-03)	0,90	0,8960 (0,0137)	5,0430 (1,0946)	5,1237 (0,6468)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.8 – Estimação do Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,10$, $\phi_1 = 0,5$ e $\phi_2 = 0,5$

σ_ϵ^2 real = 0,0001	σ_η^2 real = 0,10				
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
0,0010	0,0872	0,10	0,0887	0,4666	0,4489
(7,82E-05)	(3,93E-02)		(0,2942)	(7,6031)	(3,1920)
0,0010	0,0972	0,40	0,3201	0,8578	0,8094
(8,20E-05)	(4,15E-02)		(0,2531)	(6,2605)	(2,5375)
0,0010	0,1081	0,70	0,6611	0,6001	0,7281
(7,52E-05)	(3,65E-02)		(0,1020)	(4,6281)	(1,6332)
0,0010	0,1049	0,90	0,8863	0,4806	0,6855
(7,05E-05)	(2,72E-02)		(0,0334)	(3,6477)	(1,2470)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.9 – Estimação do Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,01$, $\phi_1 = 0,5$ e $\phi_2 = 0,5$

σ_ϵ^2 real = 0,0001	σ_η^2 real = 0,01				
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	δ real	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
0,0001	0,0090	0,10	0,0664	0,7933	0,3917
(8,07E-06)	(3,96E-03)		(0,3634)	(2,3475)	(0,8894)
0,0001	0,0098	0,40	0,3494	0,6339	0,4275
(8,24E-06)	(3,84E-03)		(0,2738)	(1,8844)	(0,6829)
0,0001	0,0104	0,70	0,6772	0,4425	0,6295
(7,79E-06)	(3,35E-03)		(0,0849)	(1,3367)	(0,6099)
0,0001	0,0103	0,90	0,8900	0,5880	0,5659
(7,74E-06)	(2,58E-03)		(0,0324)	(1,1834)	(0,4033)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Como no caso sem variáveis condicionantes, observa-se que as estimativas do parâmetro δ são melhores quando σ_η^2 é maior. Por outro lado, as estimativas para os coeficientes ϕ_1 e ϕ_2 apresentam precisão superior quanto menor a variância σ_η^2 , considerando que os desvios-padrão correspondentes a esses hiperparâmetros são menores no caso de $\sigma_\eta^2 = 0,01$. A menor variância da equação de beta permite estimar melhor a influência das variáveis condicionantes.

- **Modelo 3: três fatores com betas seguindo reversão à média**

Para geração das séries sintéticas correspondentes a este modelo, como valores para os hiperparâmetros de variâncias, foram utilizados $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$. Da mesma forma que nos modelos de um fator, para os parâmetros de persistência δ_1, δ_2 e δ_3 foram considerados quatro valores (0,10; 0,40; 0,70 e 0,90). Os casos extremos de $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$ e $\delta_3 = 1$ acarretam processo de passeio aleatório para cada um dos coeficientes. Para o

modelo de três fatores, as médias de longo prazo foram tratadas como hiperparâmetros a serem estimados, sendo os valores utilizados para geração das séries sintéticas $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$. Desta forma, para a geração das

séries, utilizou-se para o vetor inicial de estado $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{2,1} \\ \beta_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 0,8 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ e

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{\eta_1}^2}{(1-\delta_1^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{\eta_2}^2}{(1-\delta_2^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{\eta_3}^2}{(1-\delta_3^2)} \end{pmatrix}.$$

No processo de estimação, para os valores iniciais dos hiperparâmetros, foram utilizados como valor de σ_ϵ^2 a variância da série sintética gerada para R_t ; como valores de $\sigma_{\eta_1}^2$, $\sigma_{\eta_2}^2$ e $\sigma_{\eta_3}^2$, as variâncias das séries dos betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis (60 meses); e como δ_1 , δ_2 e δ_3 , o valor de 0,5. Para os valores iniciais das médias de longo prazo, foram utilizados os valores médios dos betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis (60 meses). Desta forma, os valores dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 são calculados a partir da equação (4.17). Quanto ao vetor de estado, o procedimento utilizado é o de inicialização estacionária padrão, sendo que, para o valor inicial do vetor de estado $\mathbf{b}_1$, correspondente ao valor esperado incondicional, foi utilizado o valor médio dos betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis (60 meses). O valor inicial da variância $\mathbf{P}_1$, correspondente à matriz diagonal de variância incondicional dos betas, foi calculado a partir da equação (4.14) considerando os valores iniciais para os hiperparâmetros utilizados no processo de estimação.

Inicialmente, trabalhou-se com séries artificiais para cada um dos fatores $f_{1,t}$, $f_{2,t}$ e $f_{3,t}$, de forma a garantir que não houvesse correlação entre eles. As séries foram construídas a partir de distribuições normais desconcorrelacionadas, cujos valores de variância fossem aproximadamente iguais aos valores de variância das séries de cada um dos três fatores de Fama e French (1993), no período de julho/1963 a dezembro/2012⁸. Para cada conjunto de 100 séries

⁸ $Var[f_{1,t}] = 0,0020$; $Var[f_{2,t}] = 0,0009$ e $Var[f_{3,t}] = 0,0009$

sintéticas geradas, foram calculados a média e o desvio-padrão das estimativas dos parâmetros, obtendo-se os resultados apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Estimação do Modelo 3 para séries sintéticas com fatores artificiais e $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta 1}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta 2}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta 3}^2$ real 0,05					B_1 real 1,3	B_2 real 0,8	B_3 real 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$
0,0001 (4,15E-10)	0,0470 (7,49E-05)	0,0458 (4,33E-04)	0,0435 (3,46E-04)	0,10	0,1000 (0,0196)	0,1637 (0,0865)	0,0828 (0,1108)	1,3011 (0,0003)	0,7982 (0,0007)	0,4985 (0,0006)
0,0001 (4,02E-10)	0,0481 (9,12E-05)	0,0476 (3,64E-04)	0,0458 (3,74E-04)	0,40	0,3870 (0,0132)	0,3825 (0,0615)	0,3758 (0,0750)	1,3023 (0,0005)	0,7951 (0,0007)	0,4981 (0,0008)
0,0001 (4,00E-10)	0,0485 (9,15E-05)	0,0533 (3,70E-04)	0,0501 (3,47E-04)	0,70	0,6970 (0,0033)	0,6807 (0,0086)	0,6827 (0,0144)	1,2991 (0,0010)	0,8035 (0,0015)	0,4984 (0,0016)
0,0001 (2,94E-10)	0,0508 (8,80E-05)	0,0531 (2,39E-04)	0,0511 (1,68E-04)	0,90	0,8901 (0,0005)	0,8877 (0,0016)	0,8942 (0,0009)	1,3136 (0,0076)	0,7964 (0,0083)	0,5046 (0,0081)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Observa-se que as estimativas para os parâmetros de variância σ_ϵ^2 , $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$ são bem próximas dos valores reais em todos os casos. Para os parâmetros de persistências δ_1 , δ_2 e δ_3 , as estimativas são também próximas dos valores reais, mas observa-se que, como no caso do modelo de um fator, a precisão melhora para valores mais altos de δ_1 , δ_2 e δ_3 . Assim, quanto mais próximos os processos se tornam de um passeio aleatório, mais precisas são as estimativas dos próprios parâmetros de persistência. A Figura 4.A.3 no Apêndice 4.A apresenta os histogramas da estimação de todos os parâmetros para os casos em que $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,40$ e $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$ da tabela anterior.

Observa-se ainda que a estimativa para δ_1 é sempre melhor do que as estimativas de δ_2 e δ_3 . Isto ocorre porque a variância da série do fator $f_{1,t}$ é maior do que as dos fatores $f_{2,t}$ e $f_{3,t}$. Testes adicionais alterando a série artificial do fator $f_{3,t}$ para que sua variância fosse igual à do fator $f_{1,t}$ mostram que, de fato, neste caso, a precisão da estimativa de δ_3 melhora para níveis comparáveis aos de δ_1 . Os resultados obtidos para os são apresentados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Estimação do Modelo 3 para séries sintéticas com novos fatores artificiais
 $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

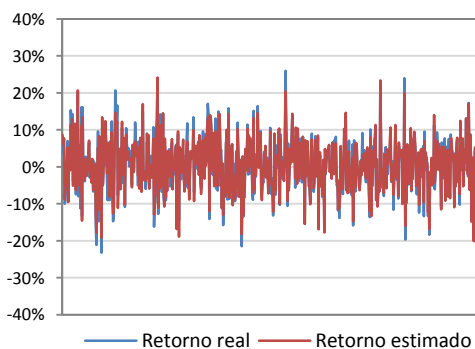
σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta_1}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta_2}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta_3}^2$ real 0,05					B_1 , real 1,3	B_2 real 0,8	B_3 real 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$
0,0001 (5,64E-10)	0,0462 (8,58E-05)	0,0427 (4,58E-04)	0,0478 (1,09E-04)	0,10	0,1104 (0,0315)	0,0857 (0,1631)	0,0969 (0,0188)	1,2988 (0,0003)	0,8007 (0,0011)	0,5015 (0,0495)
0,0001 (6,25E-10)	0,0488 (1,33E-04)	0,0456 (4,28E-04)	0,0475 (1,12E-04)	0,40	0,3725 (0,0196)	0,3656 (0,0802)	0,4066 (0,0142)	1,2999 (0,0004)	0,8031 (0,0008)	0,5013 (0,1672)
0,0001 (6,00E-10)	0,0506 (1,19E-04)	0,0536 (5,84E-04)	0,0493 (1,18E-04)	0,70	0,6909 (0,0038)	0,6566 (0,0192)	0,6965 (0,0030)	1,2992 (0,0005)	0,8004 (0,0003)	0,5027 (0,0067)
0,0001 (4,26E-10)	0,0504 (9,33E-05)	0,0527 (2,00E-04)	0,0516 (7,62E-05)	0,90	0,8916 (0,0006)	0,8872 (0,0015)	0,8910 (0,0007)	1,2840 (0,0002)	0,8078 (0,0001)	0,4885 (0,0004)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

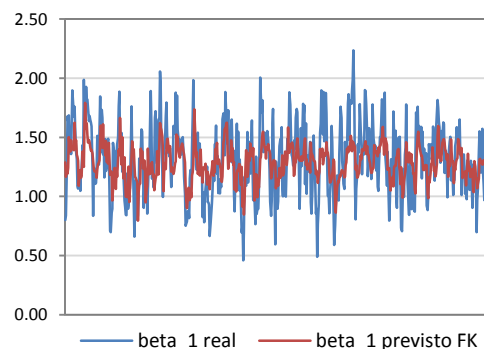
Como exemplo, as Figuras 4.3(a) e 4.3(b,c,d) apresentam uma série sintética gerada e a série estimada correspondente para o retorno e para os betas relativos a cada um dos três fatores, respectivamente, no caso em que $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$.

Figura 4.3 – Séries sintéticas para retorno e para beta – Modelo 3 com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

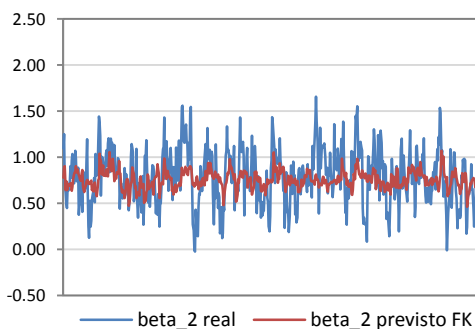
(a) Retorno real e estimado



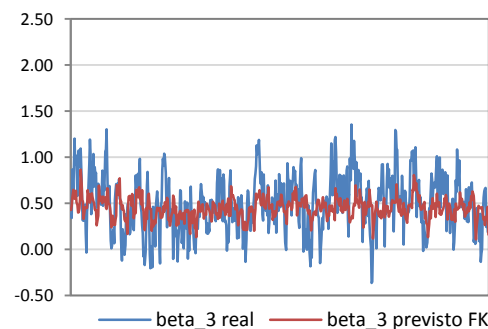
(b) beta1 real e estimado



(c) beta2 real e estimado



(d) beta3 real e estimado



Para a sensibilidade do processo de estimação de forma a verificar o comportamento dos valores no caso de variância dos betas serem menores, repetiu-se o procedimento utilizando $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,10$ e 0,01, como apresentado nas Tabelas 4.12 e 4.13, respectivamente. Os resultados apresentam características similares, de modo que a precisão das estimativas dos parâmetros δ_1 , δ_2 e δ_3 é maior para valores maiores dos parâmetros de persistência. Analogamente ao modelo de um fator, observa-se que para valores mais altos de $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$, a precisão dos valores estimados de δ_1 , δ_2 e δ_3 aumenta, sendo menores os desvios-padrão das estimativas. Por outro lado, quanto menor $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$, menor a precisão das estimativas de δ_1 , δ_2 e δ_3 .

Tabela 4.12 – Estimação do Modelo 3 para séries sintéticas com fatores artificiais e $\sigma_{\epsilon}^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,10$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

σ_{ϵ}^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta 1}^2$ real 0,10	$\sigma_{\eta 2}^2$ real 0,10	$\sigma_{\eta 3}^2$ real 0,10	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	B_1 , real 1,3	B_2 real 0,8	B_3 real 0,5
$\hat{\sigma}_{\epsilon}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 3}^2$					$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$
0,0001 (7,61E-10)	0,0983 (2,89E-04)	0,0903 (7,46E-04)	0,0955 (9,78E-04)	0,10	0,0900 (0,0129)	0,0254 (0,0714)	0,1019 (0,0647)	1,3041 (0,0005)	0,7982 (0,0009)	0,5004 (0,0008)
0,0001 (7,51E-10)	0,0948 (2,24E-04)	0,0890 (7,01E-04)	0,0964 (1,06E-03)	0,40	0,3970 (0,0074)	0,4267 (0,0303)	0,4036 (0,0276)	1,3013 (0,0009)	0,8060 (0,0014)	0,5041 (0,0012)
0,0001 (9,56E-10)	0,0965 (3,29E-04)	0,0988 (8,30E-04)	0,0972 (8,29E-04)	0,70	0,6948 (0,0032)	0,6865 (0,0073)	0,6976 (0,0052)	1,0042 (0,0019)	0,8093 (0,0030)	0,5022 (0,0021)
0,0001 (4,84E-10)	0,0996 (2,69E-04)	0,1000 (4,03E-04)	0,1027 (4,11E-04)	0,90	0,8923 (0,0006)	0,8942 (0,0007)	0,8925 (0,0007)	1,3066 (0,0144)	0,8283 (0,0208)	0,5090 (0,0155)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.13 – Estimação do Modelo 3 para séries sintéticas com fatores artificiais e $\sigma_{\epsilon}^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,01$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

σ_{ϵ}^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta 1}^2$ real 0,01	$\sigma_{\eta 2}^2$ real 0,01	$\sigma_{\eta 3}^2$ real 0,01	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	B_1 , real 1,3	B_2 real 0,8	B_3 real 0,5
$\hat{\sigma}_{\epsilon}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 3}^2$					$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$
0,0001 (1,22E-10)	0,0091 (1,74E-05)	0,0092 (5,11E-05)	0,0089 (4,39E-05)	0,10	0,1550 (0,0988)	0,1446 (0,2367)	0,0678 (0,2428)	1,2999 (0,0001)	0,8004 (0,0003)	0,5015 (0,0003)
0,0001 (1,26E-10)	0,0099 (1,67E-05)	0,0099 (5,59E-05)	0,0100 (5,50E-05)	0,40	0,3773 (0,0479)	0,3043 (0,2080)	0,2974 (0,2123)	1,2997 (0,0001)	0,8001 (0,0003)	0,5019 (0,0004)
0,0001 (1,23E-10)	0,0103 (1,79E-05)	0,0096 (3,75E-05)	0,0115 (5,42E-05)	0,70	0,6900 (0,0123)	0,5857 (0,1235)	0,6015 (0,0942)	1,2982 (0,0003)	0,8024 (0,0005)	0,5022 (0,0005)
0,0001 (1,27E-10)	0,0101 (8,43E-06)	0,0112 (2,46E-05)	0,0107 (1,48E-05)	0,90	0,8926 (0,0014)	0,8836 (0,0027)	0,8847 (0,0016)	1,3045 (0,0020)	0,7921 (0,0017)	0,5052 (0,0023)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Foram realizados também alguns testes utilizando como séries dos fatores $f_{1,t}$, $f_{2,t}$ e $f_{3,t}$ os dados reais das séries dos três fatores de Fama e French (1993), R_{Mt} , SMB_t e HML_t , com observações mensais entre julho/1963 e dezembro/2012. Os resultados são satisfatórios, similares aos obtidos com fatores artificiais, e se encontram na Tabela 4.14. A baixa correlação entre os fatores não influencia os resultados de estimação.

Tabela 4.14 – Estimação do Modelo 3 para séries sintéticas com fatores reais e $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta 1}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta 2}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta 3}^2$ real 0,05					B_1 , real 1,3	B_2 real 0,8	B_3 real 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$
0,0001 (1,97E-10)	0,0487 (1,07E-04)	0,0492 (3,22E-04)	0,0449 (4,66E-04)	0,10	0,0683 (0,0295)	0,0698 (0,0887)	0,0936 (0,0956)	1,2983 (4,1E-05)	0,8074 (0,0004)	0,5010 (0,0158)
0,0001 (1,63E-10)	0,0479 (1,02E-04)	0,0474 (4,18E-04)	0,0450 (4,97E-04)	0,40	0,4006 (0,0199)	0,3163 (0,1008)	0,3800 (0,0893)	1,2993 (4,6E-05)	0,7942 (0,0025)	0,4945 (0,0160)
0,0001 (1,72E-10)	0,0496 (1,39E-04)	0,0528 (3,46E-04)	0,0534 (4,75E-04)	0,70	0,6821 (0,0042)	0,6635 (0,0117)	0,6780 (0,0112)	1,3007 (3,5E-05)	0,8062 (0,0004)	0,5017 (0,0041)
0,0001 (1,88E-10)	0,0506 (8,95E-05)	0,0524 (2,20E-04)	0,0501 (2,66E-04)	0,90	0,8924 (0,0007)	0,8887 (0,0011)	0,8909 (0,0012)	1,2898 (3,8E-05)	0,7971 (0,0001)	0,5105 (0,0003)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Outras variações dos testes também foram realizadas. Por exemplo, foram usados valores unitários para as médias de longo prazo B_1 , B_2 e B_3 na geração das séries, sendo que as estimativas permanecem similares. Foram considerados também diferentes valores para a inicialização do vetor de estado no filtro de Kalman, utilizando diferentes valores iniciais como $\mathbf{b}_1$, dados pelos valores médios dos betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis de 24 meses e pelos valores dos betas estimados a partir da regressão de mínimos quadrados ordinários na série completa, mas os resultados continuaram similares.

- **Modelo 4: três fatores com betas seguindo reversão à média combinado com variáveis condicionantes defasadas**

Para geração das séries sintéticas correspondentes a este modelo, como valores para os hiperparâmetros de variâncias, foram utilizados novamente $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$ e $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,05$. Os valores para os parâmetros de persistência δ_1 , δ_2 e δ_3 usados foram os mesmos (0,10; 0,40; 0,70 e 0,90). Para

a dependência em variáveis condicionantes, foram realizadas simulações para $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22}, \phi_{31}$ e $\phi_{32} = 5$ e $0,5$. Assim como no Modelo 3, as médias de longo prazo foram tratadas como hiperparâmetros a serem estimados, sendo os valores utilizados para geração das séries sintéticas $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$. Para a geração das séries, os dados para o vetor inicial de estado foram

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{2,1} \\ \beta_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 0,8 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{\eta_1}^2 + \Sigma_g \phi_{1g}^2 \text{var}[Z_g]}{(1-\delta_1^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{\eta_2}^2 + \Sigma_g \phi_{2g}^2 \text{var}[Z_g]}{(1-\delta_2^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{\eta_3}^2 + \Sigma_g \phi_{3g}^2 \text{var}[Z_g]}{(1-\delta_3^2)} \end{pmatrix}.$$

No processo de estimação, para os valores iniciais dos hiperparâmetros, foi utilizada mais uma vez como σ_ϵ^2 a variância da série sintética gerada para R_t ; como $\sigma_{\eta_1}^2$, $\sigma_{\eta_2}^2$ e $\sigma_{\eta_3}^2$, as variâncias da série dos betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis (60 meses); e como δ_1 , δ_2 e δ_3 , o valor inicial de $0,5$. Para os valores iniciais da média de longo prazo de cada beta, novamente o valor médio de beta estimado por mínimos quadrados com janelas móveis (60 meses) foi utilizado, de modo que os valores iniciais dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 foram calculados a partir da equação (4.17). Para os coeficientes ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{21} , ϕ_{22} , ϕ_{31} e ϕ_{32} , o valor inicial considerado foi zero. Quanto ao vetor de estado, o procedimento utilizado, tal como no Modelo 3, foi o de inicialização estacionária padrão. Para o valor inicial do vetor de estado $\mathbf{b}_1$, correspondente ao valor esperado incondicional, foi utilizado o valor médio dos betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis (60 meses), e o valor inicial da variância $\mathbf{P}_1$, correspondente à matriz diagonal de variância incondicional dos betas, foi calculado a partir da equação (4.15), considerando os valores iniciais para os hiperparâmetros utilizados no processo de estimação.

Para os fatores $f_{1,t}$, $f_{2,t}$ e $f_{3,t}$, foram utilizadas as mesmas séries artificiais utilizadas nos testes iniciais do Modelo 3. Para cada conjunto de hiperparâmetros, considerando 100 séries sintéticas, os resultados para média e o desvio-padrão das estimativas dos parâmetros no caso em que $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{21} = \phi_{22} = \phi_{31} = \phi_{32} = 5,0$ são apresentados na Tabela 4.15. Para o caso em que $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{21} = \phi_{22} = \phi_{31} = \phi_{32} = 0,50$, considerando 200 séries sintéticas, os resultados são apresentados na Tabela 4.16.

As observações que podem ser feitas acerca dos hiperparâmetros estimados são similares às constatadas no modelo de um fator com variáveis condicionantes.

Novamente, as estimativas para os parâmetros de variância σ_ϵ^2 e $\sigma_{\eta_1}^2$, $\sigma_{\eta_2}^2$ e $\sigma_{\eta_3}^2$ são bastante boas em todos os casos. As estimativas para os parâmetros de persistência δ_1 , δ_2 e δ_3 são melhores para valores mais altos, mas, ainda assim, os desvios-padrão das estimativas são piores do que no modelo anterior sem variáveis condicionantes. Quanto aos parâmetros de dependência em relação às variáveis condicionantes, para os casos em que consideramos uma ordem de grandeza maior (iguais a 5,0), os valores médios estimados são melhores do que nos casos em que foi considerado um valor menor (iguais a 0,50). Porém, o desvio-padrão das estimativas é alto, especialmente quando os parâmetros δ_1 , δ_2 e δ_3 têm valor mais baixo. Quanto maior o valor dos parâmetros de persistência, o desvio-padrão das estimativas dos coeficientes ϕ_{jg} diminui, refletindo melhora na precisão.

A Figura 4.A.4 no Apêndice 4.A apresenta os histogramas da estimação de todos os parâmetros para os casos em que $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,40$ e $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$ apresentados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Estimação Modelo 4 séries sintéticas, $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{1g} = \phi_{2g} = \phi_{3g} = 5,0$ ($g = 1, 2$)

σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta_1}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta_2}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta_3}^2$ real 0,05					B_1 real 1,3	B_1 real 0,7	B_1 real 0,5	ϕ_{11} real 5,0	ϕ_{12} real 5,0	ϕ_{21} real 5,0	ϕ_{22} real 5,0	ϕ_{31} real 5,0	ϕ_{32} real 5,0
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$	$\hat{\Phi}_{11}$	$\hat{\Phi}_{12}$	$\hat{\Phi}_{21}$	$\hat{\Phi}_{22}$	$\hat{\Phi}_{31}$	$\hat{\Phi}_{32}$
0,0001	0,0487	0,0441	0,0469	0,10	0,0780	0,0197	0,0856	1,3031	0,7982	0,5000	4,4454	5,4234	4,8356	5,3254	5,7221	5,1627
(1,96E-05)	(1,04E-02)	(1,66E-02)	(1,92E-02)		(0,1413)	(0,2943)	(0,2889)	(0,0170)	(0,0233)	(0,0224)	(3,7224)	(5,9206)	(5,4702)	(1,5354)	(2,3805)	(2,5159)
0,0001	0,0502	0,0475	0,0494	0,40	0,3723	0,3215	0,3457	1,3036	0,7978	0,5006	4,6136	5,7035	4,9677	5,3850	5,8736	5,5101
(1,99E-05)	(1,16E-02)	(1,82E-02)	(1,88E-02)		(0,1086)	(0,2350)	(0,2385)	(0,0195)	(0,0260)	(0,0249)	(3,2243)	(5,1725)	(4,5006)	(1,3689)	(2,3696)	(2,5607)
0,0001	0,0493	0,0526	0,0504	0,70	0,6835	0,6723	0,6765	1,3037	0,7965	0,4937	5,4432	4,8294	5,1761	5,2466	5,5944	5,3590
(1,89E-05)	(1,04E-02)	(1,88E-02)	(2,02E-02)		(0,0654)	(0,0977)	(0,0907)	(0,0384)	(0,0407)	(0,0433)	(2,5096)	(3,0751)	(2,7471)	(1,3052)	(1,8939)	(1,7734)
0,0001	0,0499	0,0491	0,0501	0,90	0,8913	0,8938	0,8904	1,2988	0,8046	0,5043	5,1087	4,9993	5,5063	5,1571	5,3142	5,4274
(1,79E-05)	(8,87E-03)	(1,16E-02)	(1,13E-02)		(0,0192)	(0,0209)	(0,0211)	(0,0818)	(0,1035)	(0,0959)	(2,4785)	(2,1863)	(2,5687)	(1,0070)	(1,2025)	(1,2341)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.16 – Estimação Modelo 4 séries sintéticas, $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{1g} = \phi_{2g} = \phi_{3g} = 0,5$ ($g = 1, 2$)

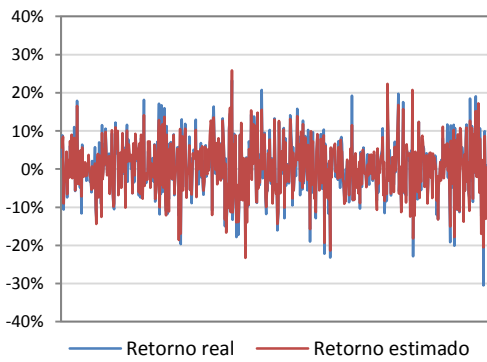
σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta_1}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta_2}^2$ real 0,05	$\sigma_{\eta_3}^2$ real 0,05					B_1 real 1,3	B_1 real 0,7	B_1 real 0,5	ϕ_{11} real 0,5	ϕ_{12} real 0,5	ϕ_{21} real 0,5	ϕ_{22} real 0,5	ϕ_{31} real 0,5	ϕ_{32} real 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$	$\hat{\Phi}_{11}$	$\hat{\Phi}_{12}$	$\hat{\Phi}_{21}$	$\hat{\Phi}_{22}$	$\hat{\Phi}_{31}$	$\hat{\Phi}_{32}$
0,0001	0,0477	0,0435	0,0444	0,10	0,0676	0,0424	0,0493	1,3026	0,7968	0,4988	0,1076	0,7117	0,5035	0,6212	0,7612	0,5159
(1,97E-05)	(9,42E-03)	(1,70E-02)	(1,88E-02)		(0,1460)	(0,3228)	(0,3346)	(0,0178)	(0,0229)	(0,0246)	(3,6088)	(5,6297)	(5,8635)	(1,3737)	(1,9967)	(2,0687)
0,0001	0,0492	0,0476	0,0474	0,40	0,3692	0,3257	0,3540	1,3031	0,7964	0,4991	0,2880	0,8551	0,3111	0,5895	0,6934	0,5542
(1,99E-05)	(1,04E-02)	(1,89E-02)	(1,92E-02)		(0,1142)	(0,2651)	(0,2585)	(0,0208)	(0,0263)	(0,0271)	(3,0182)	(4,5297)	(4,4281)	(1,0901)	(1,6738)	(1,6126)
0,0001	0,0506	0,0525	0,0517	0,70	0,6782	0,6556	0,6666	1,2995	0,7962	0,4970	0,2578	0,6802	0,6291	0,5950	0,5361	0,4909
(1,88E-05)	(1,03E-02)	(1,87E-02)	(1,94E-02)		(0,0630)	(0,1191)	(0,1182)	(0,0347)	(0,0327)	(0,0358)	(2,6281)	(3,0182)	(3,0184)	(0,8606)	(1,3103)	(1,2852)
0,0001	0,0500	0,0525	0,0523	0,90	0,8881	0,8809	0,8844	1,2910	0,7948	0,4951	0,8097	0,4416	0,5491	0,5621	0,5394	0,5792
(1,83E-05)	(8,19E-03)	(1,36E-02)	(1,35E-02)		(0,0265)	(0,0318)	(0,0360)	(0,0899)	(0,0992)	(0,0928)	(2,2035)	(2,6218)	(2,2693)	(0,8055)	(0,9983)	(0,8555)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

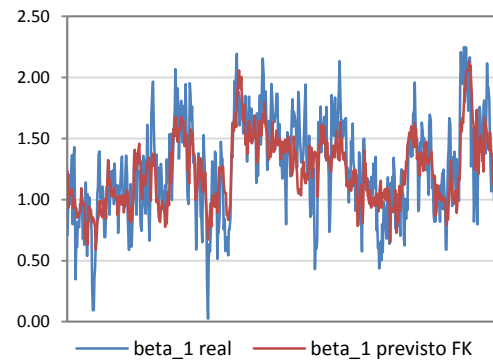
Novamente como exemplo, as Figuras 4.4(a) e 4.4(b,c,d) apresentam uma série sintética gerada e a série estimada correspondente para o retorno e para os betas relativos a cada um dos três fatores, respectivamente, nos casos em que $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$, $B_1 = 1,3, B_2 = 0,8, B_3 = 0,5$ e $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{21} = \phi_{22} = \phi_{31} = \phi_{32} = 5,0$.

Figura 4.4 – Séries sintéticas para retorno e para beta – Modelo 3 $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{21} = \phi_{22} = \phi_{31} = \phi_{32} = 5,0$

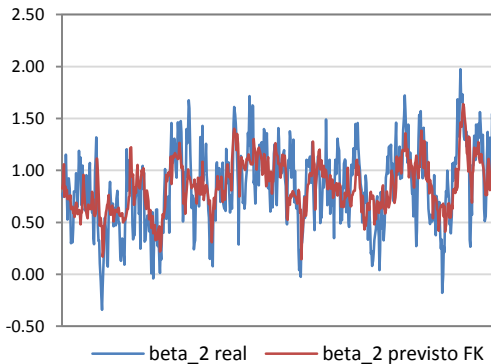
(a) Retorno real e estimado



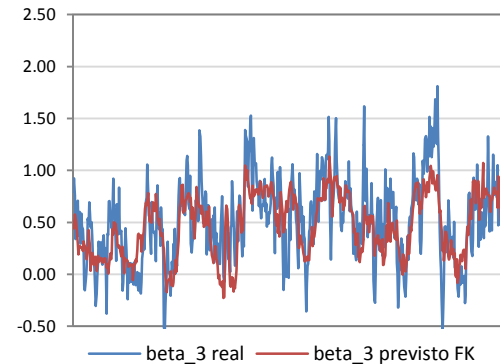
(b) beta1 real e estimado



(c) beta2 real e estimado



(d) beta3 real e estimado



Para a sensibilidade do processo de estimação de forma a verificar o comportamento dos valores no caso de variância de beta ser menor, repetiu-se o procedimento utilizando $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,10$ e $0,01$ como apresentado nas Tabelas 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20. Os resultados apresentam características similares aos já observamos anteriormente. Analogamente ao modelo de um fator, observa-se que para valores mais altos de $\sigma_{\eta_1}^2$, $\sigma_{\eta_2}^2$ e $\sigma_{\eta_3}^2$, a precisão dos valores estimados de δ_1 , δ_2 e δ_3 aumenta, sendo menores os desvios-padrão das estimativas. Especialmente no caso

em que $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,01$, as estimativas dos parâmetros δ_1 , δ_2 e δ_3 ficam prejudicadas para valores pequenos dos parâmetros de persistência. Por outro lado, também como observado no modelo de um fator com variáveis condicionantes, quanto menores as variâncias $\sigma_{\eta 1}^2$, $\sigma_{\eta 2}^2$ e $\sigma_{\eta 3}^2$, melhores são as estimativas dos valores dos parâmetros de dependência nas variáveis condicionantes.

Algumas observações desta seção podem ser resumidas considerando os resultados para os quatro diferentes modelos analisados. Observa-se, de forma geral, que as estimativas dos parâmetros de variância nas equações de retorno e dos betas são sempre bastante precisas. Já a precisão das estimativas dos parâmetros de persistência é maior quanto maior for o seu valor, ou seja, quanto mais próximo de um passeio aleatório for o processo de evolução do beta. Quanto aos parâmetros de dependência em relação às variáveis condicionantes, a precisão também é maior para valores maiores do parâmetro de persistência. Variando os valores do parâmetro de variância da equação dos betas, observa-se que, se por um lado um valor maior de variância permite estimar melhor a força do processo de reversão à média, um valor menor do mesmo parâmetro permite estimar melhor a influência das variáveis condicionantes. Além disso, quanto maior a variância da própria série da variável condicionante, maior é a precisão da estimativa do coeficiente de dependência. Finalmente, valores dos hiperparâmetros utilizados como iniciais no processo de estimação, bem como os procedimentos adotados na inicialização do filtro de Kalman em todos os casos se mostraram satisfatórios.

Tabela 4.17 – Estimação Modelo 4 séries sintéticas, $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,10$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{1g} = \phi_{2g} = \phi_{3g} = 5,0$ ($g = 1, 2$)

σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta 1}^2$ real 0,10	$\sigma_{\eta 2}^2$ real 0,10	$\sigma_{\eta 3}^2$ real 0,10					B_1 real 1,3	B_1 real 0,7	B_1 real 0,5	ϕ_{11} real 5,0	ϕ_{12} real 5,0	ϕ_{21} real 5,0	ϕ_{22} real 5,0	ϕ_{31} real 5,0	ϕ_{32} real 5,0
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\phi}_{31}$	$\hat{\phi}_{32}$
0,0001 (2,68E-05)	0,0972 (1,73E-02)	0,0902 (2,66E-02)	0,0952 (3,16E-02)	0,10	0,0820 (0,1173)	0,0217 (0,2409)	0,0846 (0,2495)	1,3044 (0,0216)	0,7977 (0,0300)	0,5003 (0,0287)	4,1982 (4,8324)	5,3298 (7,3052)	4,6948 (6,6204)	5,3849 (1,8658)	5,8680 (2,7456)	5,2371 (2,8277)
0,0001 (2,66E-05)	0,0969 (1,60E-02)	0,0957 (3,06E-02)	0,0943 (3,00E-02)	0,40	0,3764 (0,0964)	0,3637 (0,1990)	0,3640 (0,2113)	1,3032 (0,0287)	0,7928 (0,0348)	0,4973 (0,0381)	5,3925 (4,0448)	5,8536 (5,3155)	5,3426 (6,1560)	5,1698 (1,4321)	5,3376 (2,4740)	5,1725 (2,3669)
0,0001 (2,51E-05)	0,0977 (1,56E-02)	0,1027 (2,96E-02)	0,0988 (2,80E-02)	0,70	0,6887 (0,0519)	0,6803 (0,0738)	0,6793 (0,0834)	1,2973 (0,0442)	0,8064 (0,0520)	0,4969 (0,0554)	4,8250 (3,0792)	3,8940 (3,7762)	5,1068 (3,7964)	5,4132 (1,6560)	5,3523 (1,7919)	5,2936 (2,1171)
0,0001 (2,48E-05)	0,0988 (1,45E-02)	0,1025 (2,25E-02)	0,1020 (2,29E-02)	0,90	0,8906 (0,0239)	0,8885 (0,0237)	0,8890 (0,0260)	1,2856 (0,1174)	0,8251 (0,1269)	0,4957 (0,1356)	4,7633 (2,9593)	3,7685 (3,3460)	5,0899 (3,2783)	5,5488 (1,5825)	5,4621 (1,3998)	5,4007 (1,7416)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.18 – Estimação Modelo 4 séries sintéticas, $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,10$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{1g} = \phi_{2g} = \phi_{3g} = 0,5$ ($g = 1, 2$)

σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta 1}^2$ real 0,10	$\sigma_{\eta 2}^2$ real 0,10	$\sigma_{\eta 3}^2$ real 0,10					B_1 real 1,3	B_1 real 0,7	B_1 real 0,5	ϕ_{11} real 0,5	ϕ_{12} real 0,5	ϕ_{21} real 0,5	ϕ_{22} real 0,5	ϕ_{31} real 0,5	ϕ_{32} real 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta 3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\phi}_{31}$	$\hat{\phi}_{32}$
0,0001 (2,60E-05)	0,1005 (1,48E-02)	0,0876 (2,90E-02)	0,0880 (2,76E-02)	0,10	0,0956 (0,1146)	0,0366 (0,2785)	0,0813 (0,2274)	1,3009 (0,0212)	0,8005 (0,0299)	0,5008 (0,0308)	0,3411 (4,4132)	0,7094 (6,0195)	0,6511 (6,2852)	0,6208 (1,7128)	0,6232 (2,7521)	0,7596 (2,3925)
0,0001 (2,60E-05)	0,1027 (1,66E-02)	0,0939 (3,23E-02)	0,0936 (2,86E-02)	0,40	0,3672 (0,1037)	0,3289 (0,2374)	0,3625 (0,1898)	1,3001 (0,0258)	0,8019 (0,0331)	0,5007 (0,0353)	0,1267 (3,8918)	0,4286 (4,9743)	0,5584 (4,9007)	0,5923 (1,5013)	0,6513 (2,2486)	0,7751 (1,9864)
0,0001 (2,62E-05)	0,1044 (1,71E-02)	0,1023 (3,50E-02)	0,1028 (2,97E-02)	0,70	0,6685 (0,0613)	0,6642 (0,1008)	0,6752 (0,0851)	1,2980 (0,0428)	0,8057 (0,0478)	0,5014 (0,0510)	0,1958 (3,5566)	0,3599 (3,8700)	0,5694 (3,6088)	0,5384 (1,3208)	0,7568 (1,5724)	0,6291 (1,4791)
0,0001 (2,42E-05)	0,1012 (1,60E-02)	0,1021 (2,16E-02)	0,1034 (2,24E-02)	0,90	0,8869 (0,0238)	0,8886 (0,0291)	0,8847 (0,0285)	1,2978 (0,1171)	0,8073 (0,1331)	0,5122 (0,1237)	0,7190 (3,6933)	0,3596 (3,2600)	1,1560 (3,6856)	0,3404 (1,1930)	0,6262 (1,2167)	0,5754 (1,2936)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.19 –Estimação Modelo 4 séries sintéticas, $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,01$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{1g} = \phi_{2g} = \phi_{3g} = 5,0$ ($g = 1, 2$)

σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta_1}^2$ real 0,01	$\sigma_{\eta_2}^2$ real 0,01	$\sigma_{\eta_3}^2$ real 0,01					B_1 real 1,3	B_1 real 0,7	B_1 real 0,5	ϕ_{11} real 5,0	ϕ_{12} real 5,0	ϕ_{21} real 5,0	ϕ_{22} real 5,0	ϕ_{31} real 5,0	ϕ_{32} real 5,0
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\phi}_{31}$	$\hat{\phi}_{32}$
0,0001 (1,14E-05)	0,0084 (3,35E-03)	0,0080 (6,80E-03)	0,0073 (6,54E-03)	0,10	0,0326 (0,2868)	0,0290 (0,4588)	0,0143 (0,5311)	1,3015 (0,0124)	0,7975 (0,0145)	0,4978 (0,0174)	5,2770 (2,7655)	5,8353 (4,6659)	5,5404 (5,2866)	5,3990 (1,8361)	5,7537 (2,9184)	5,6100 (3,0486)
0,0001 (1,13E-05)	0,0093 (3,40E-03)	0,0090 (6,82E-03)	0,0087 (6,77E-03)	0,40	0,3525 (0,1782)	0,2417 (0,3779)	0,2475 (0,4162)	1,3014 (0,0138)	0,7972 (0,0160)	0,4977 (0,0178)	5,3034 (2,1741)	6,5652 (4,2481)	6,1922 (4,8299)	5,4413 (1,6661)	6,3047 (3,3414)	6,2897 (3,5207)
0,0001 (1,20E-05)	0,0098 (3,22E-03)	0,0104 (5,84E-03)	0,0099 (5,57E-03)	0,70	0,6769 (0,0575)	0,6699 (0,0969)	0,6673 (0,1116)	1,2959 (0,0187)	0,8034 (0,0222)	0,5007 (0,0198)	5,4100 (1,6862)	5,3760 (1,7427)	5,4130 (2,0156)	5,2778 (0,9937)	5,5517 (1,8897)	5,5150 (1,7196)
0,0001 (1,03E-05)	0,0095 (1,90E-03)	0,0090 (2,82E-03)	0,0090 (3,13E-03)	0,90	0,8972 (0,0122)	0,8977 (0,0145)	0,8985 (0,0143)	1,2943 (0,0432)	0,8034 (0,0506)	0,4982 (0,0437)	5,0114 (0,9374)	5,1746 (1,0684)	5,2091 (1,2472)	5,1069 (0,5966)	5,0979 (0,7671)	5,0426 (0,7061)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

Tabela 4.20 –Estimação Modelo 4 séries sintéticas, $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,01$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$ e $\phi_{1g} = \phi_{2g} = \phi_{3g} = 0,5$ ($g = 1, 2$)

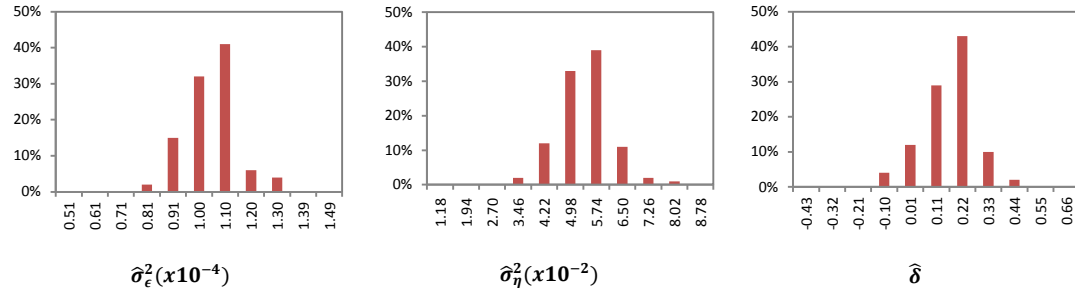
σ_ϵ^2 real 0,0001	$\sigma_{\eta_1}^2$ real 0,01	$\sigma_{\eta_2}^2$ real 0,01	$\sigma_{\eta_3}^2$ real 0,01					B_1 real 1,3	B_1 real 0,7	B_1 real 0,5	ϕ_{11} real 0,5	ϕ_{12} real 0,5	ϕ_{21} real 0,5	ϕ_{22} real 0,5	ϕ_{31} real 0,5	ϕ_{32} real 0,5
$\hat{\sigma}_\epsilon^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_1}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_2}^2$	$\hat{\sigma}_{\eta_3}^2$	δ_j real j=1,2,3	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\phi}_{31}$	$\hat{\phi}_{32}$
0,0001 (1,21E-05)	0,0088 (3,85E-03)	0,0077 (6,73E-03)	0,0076 (7,07E-03)	0,10	0,0262 (0,3346)	0,0969 (0,5329)	0,1289 (0,5442)	1,3013 (0,0118)	0,7981 (0,0150)	0,4989 (0,0165)	0,2808 (2,4166)	0,4852 (4,1692)	0,4042 (3,9434)	0,5803 (0,9823)	0,6729 (1,4585)	0,5698 (1,5272)
0,0001 (1,23E-05)	0,0099 (4,04E-03)	0,0088 (7,09E-03)	0,0084 (7,44E-03)	0,40	0,3106 (0,2555)	0,2441 (0,4940)	0,2657 (0,5130)	1,3013 (0,0130)	0,7979 (0,0161)	0,4989 (0,0169)	0,4028 (2,0128)	0,6382 (3,8167)	0,3609 (3,4949)	0,6207 (0,7847)	0,7573 (1,3596)	0,6874 (1,4831)
0,0001 (1,20E-05)	0,0109 (4,29E-03)	0,0120 (7,77E-03)	0,0109 (7,80E-03)	0,70	0,6458 (0,1203)	0,5616 (0,3081)	0,6250 (0,2713)	1,3019 (0,0175)	0,7974 (0,0213)	0,4997 (0,0209)	0,4438 (1,4344)	0,8453 (2,5713)	0,3862 (2,0970)	0,6244 (0,5458)	0,7576 (1,0840)	0,6866 (1,1300)
0,0001 (1,04E-05)	0,0104 (2,82E-03)	0,0118 (5,79E-03)	0,0107 (5,36E-03)	0,90	0,8806 (0,0324)	0,8676 (0,0640)	0,8810 (0,0559)	1,3043 (0,0405)	0,7947 (0,0463)	0,5013 (0,0426)	0,4123 (1,1591)	0,5796 (1,3734)	0,4461 (1,2754)	0,5997 (0,4573)	0,6863 (0,5779)	0,5785 (0,5490)

Desvios-padrão das estimativas entre parêntesis.

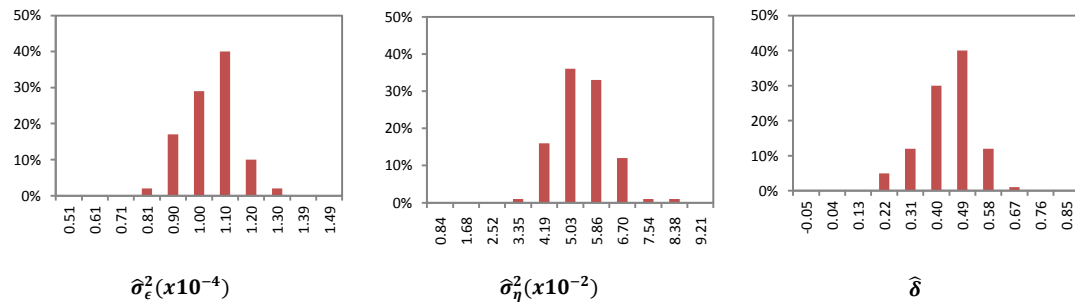
Apêndice 4.A

Figura 4.A.1 – Estimação Modelo 1 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$

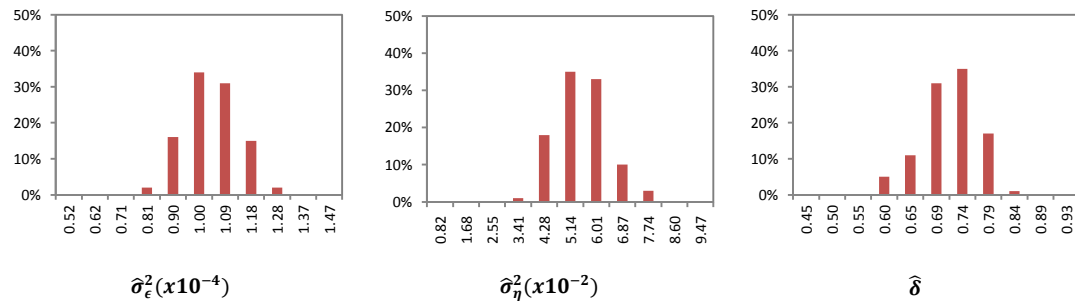
(a) Caso $\delta = 0,10$



(b) Caso $\delta = 0,40$



(c) Caso $\delta = 0,70$



(d) Caso $\delta = 0,90$

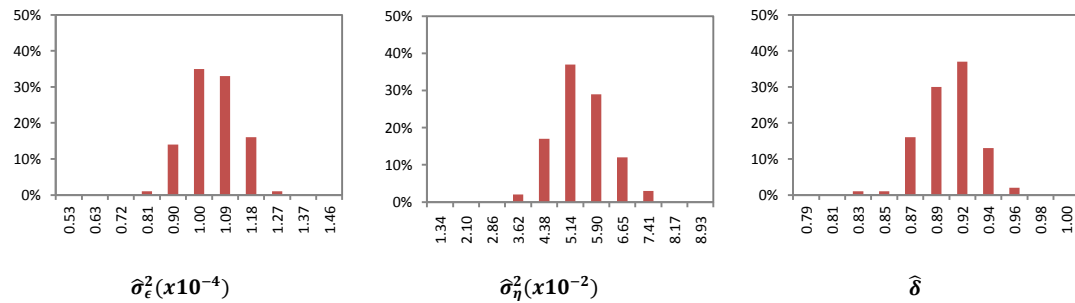
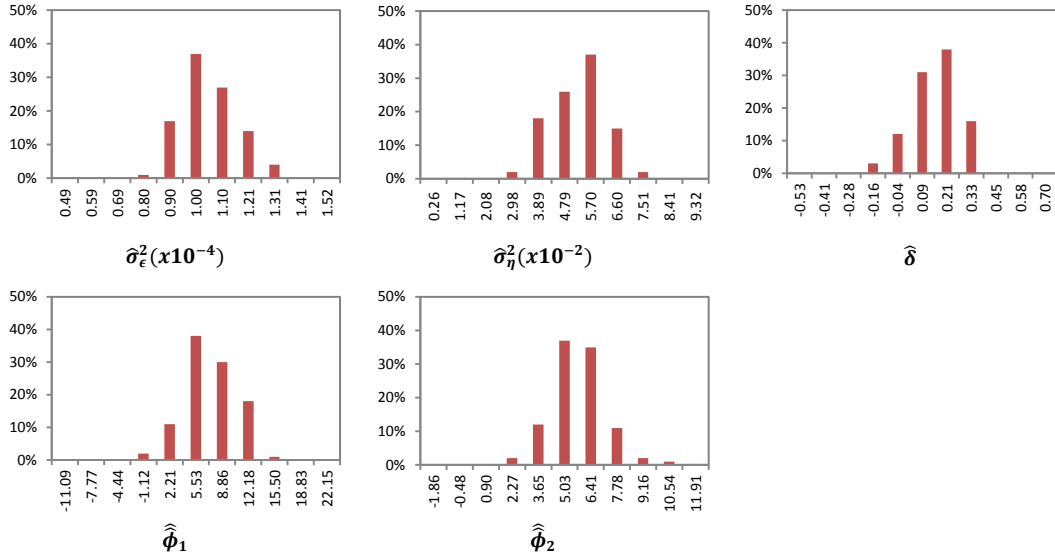
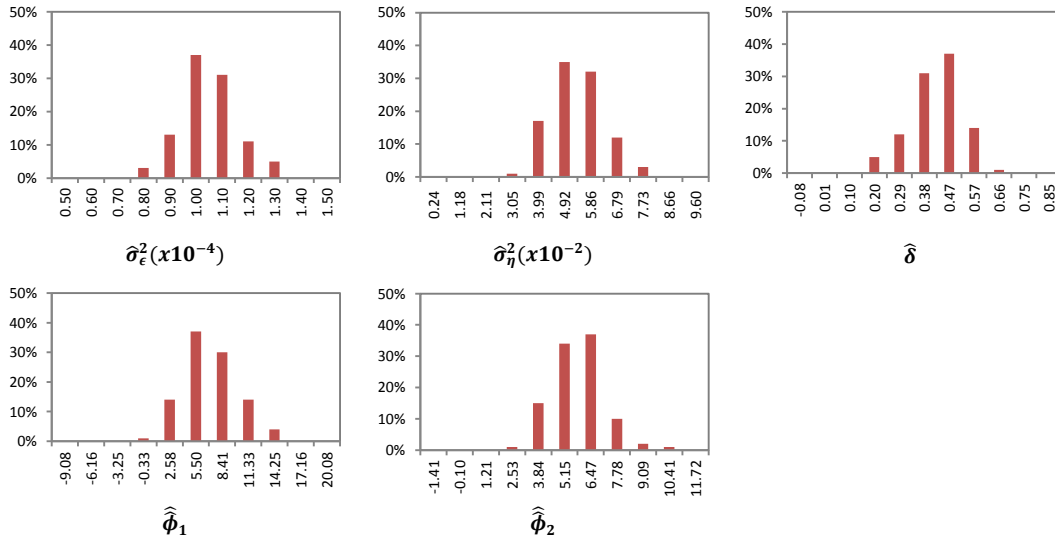


Figura 4.A.2 – Estimação Modelo 2 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_\eta^2 = 0,05$, $\phi_1 = 5,0$ e $\phi_2 = 5,0$

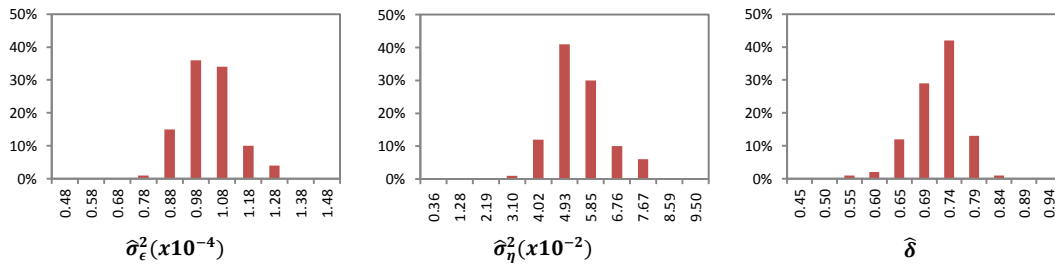
(a) Caso $\delta = 0,10$



(b) Caso $\delta = 0,40$



(c) Caso $\delta = 0,70$



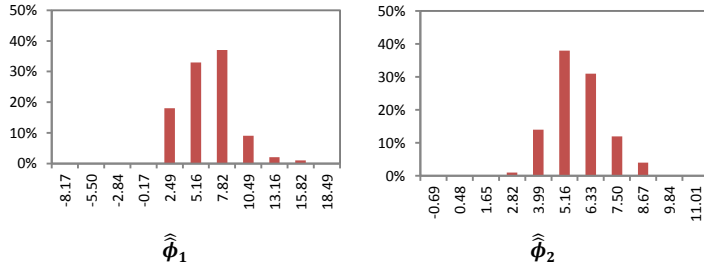
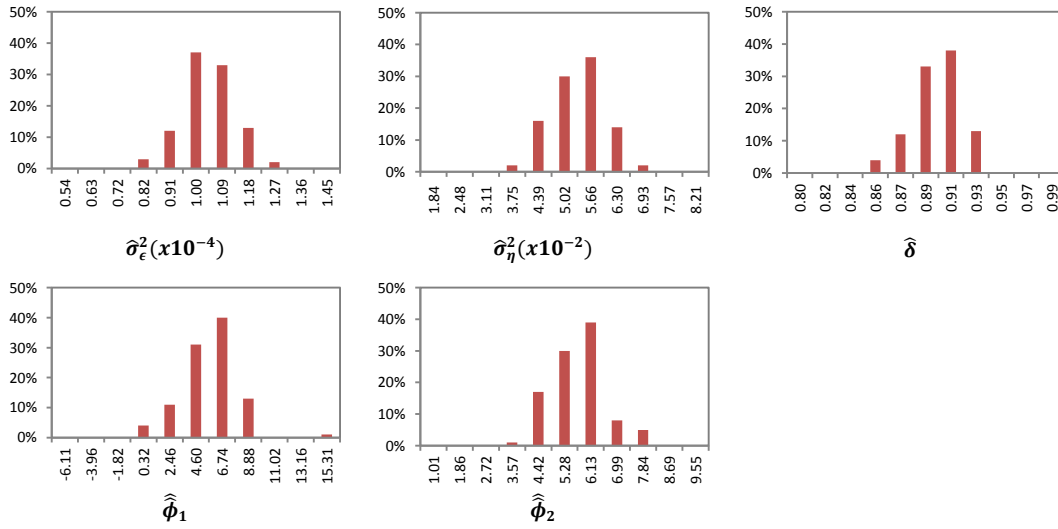
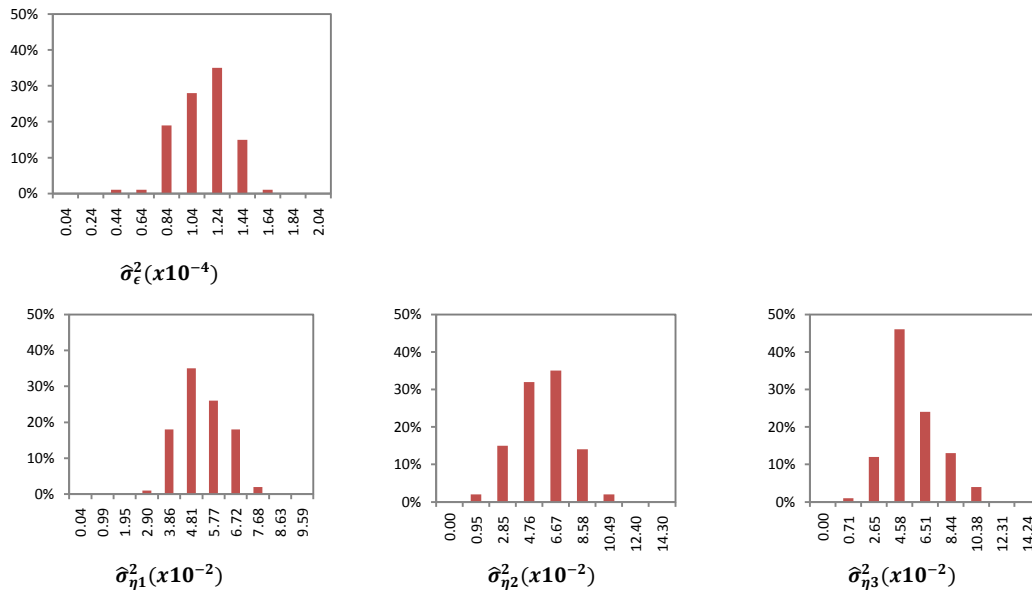
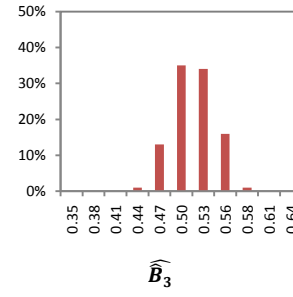
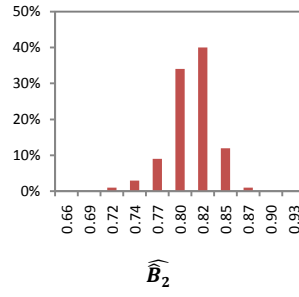
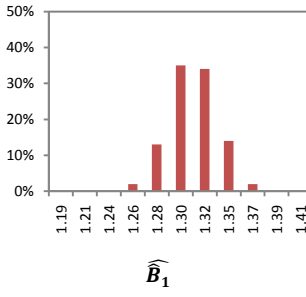
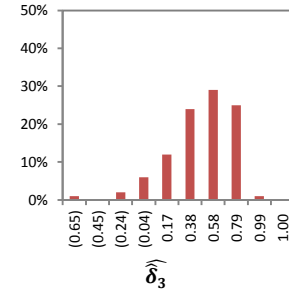
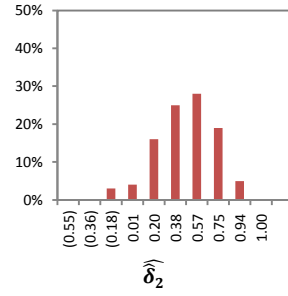
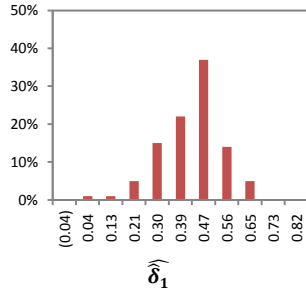
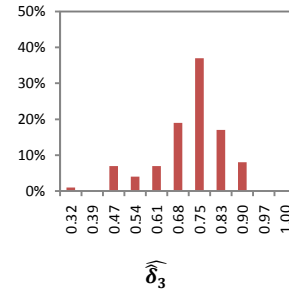
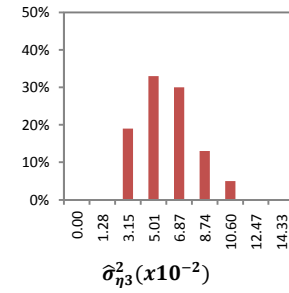
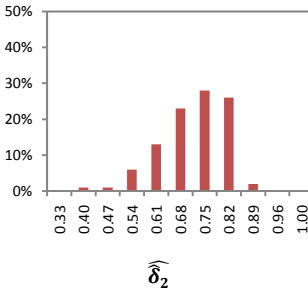
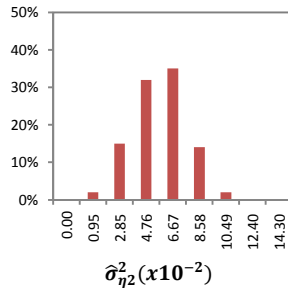
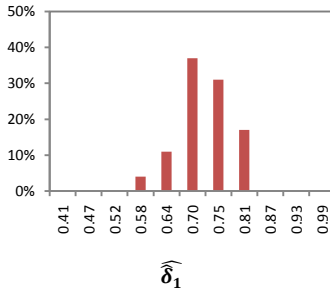
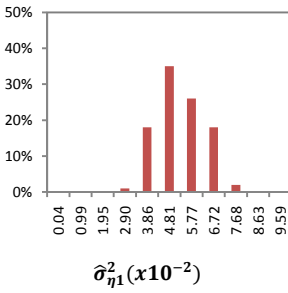
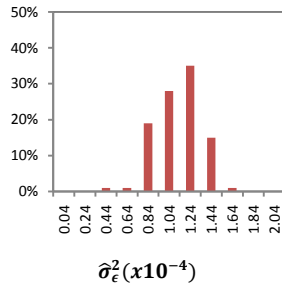
(d) Caso $\delta = 0,90$ 

Figura 4.A.3 – Estimação do Modelo 3 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta 1}^2 = \sigma_{\eta 2}^2 = \sigma_{\eta 3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$

(a) Caso $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,40$ 



(b) Caso $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$



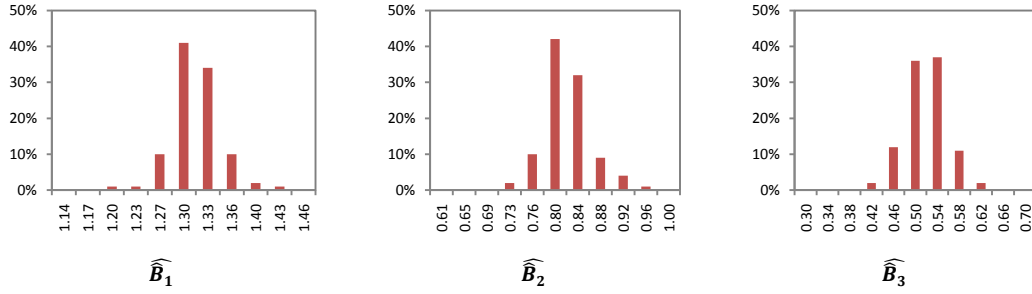
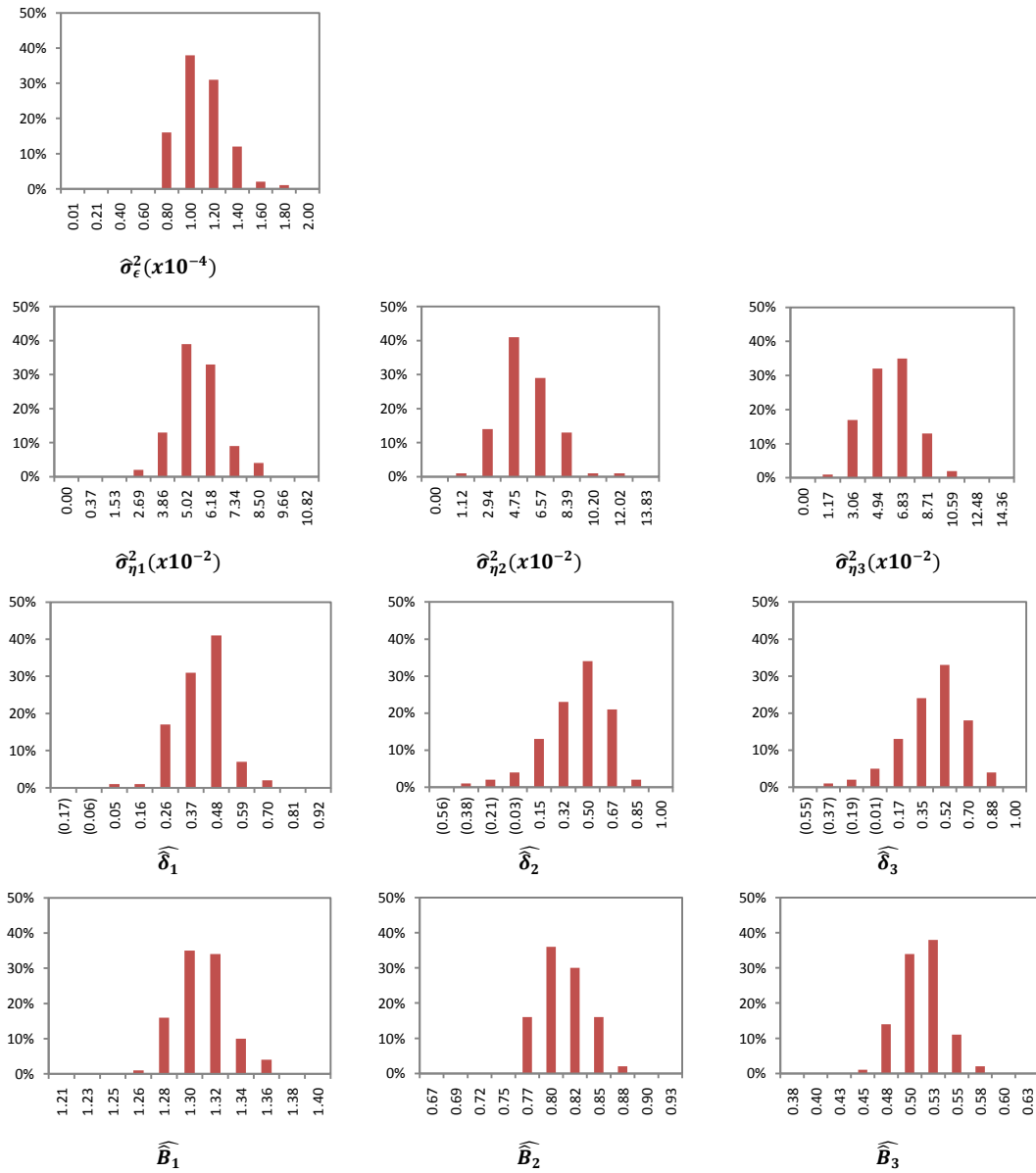
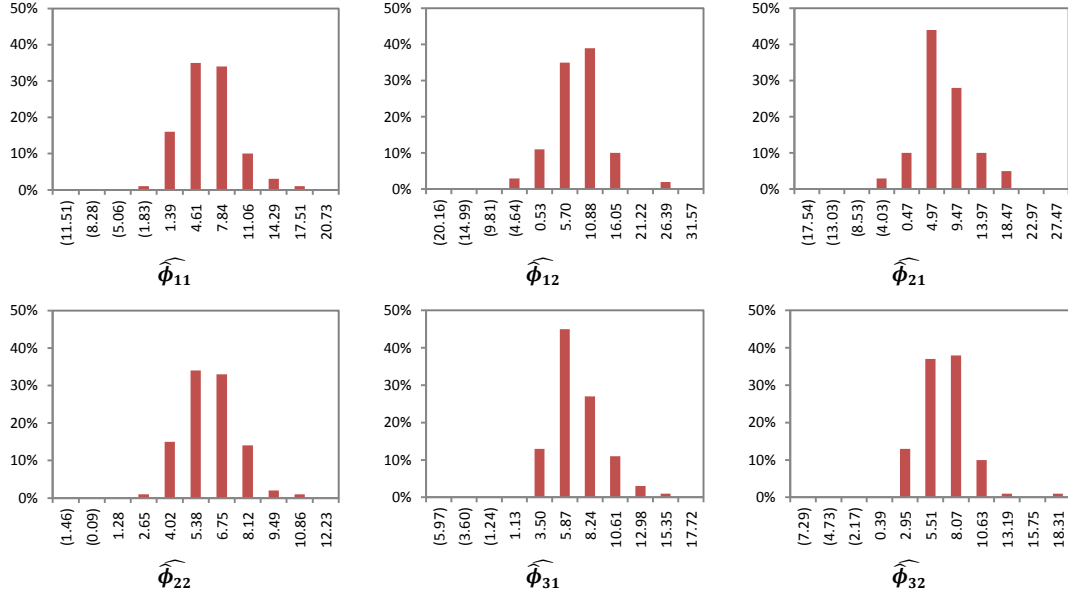


Figura 4.A.4 – Estimação do Modelo 4 para séries sintéticas com $\sigma_\epsilon^2 = 0,0001$, $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_3}^2 = 0,05$, $B_1 = 1,3$, $B_2 = 0,8$ e $B_3 = 0,5$, $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{21} = \phi_{22} = \phi_{31} = \phi_{32} = 5,0$

(a) Caso $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,40$





(b) Caso $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,70$

