

5 Aplicação do GFMM no BEM

Nesse capítulo os desenvolvimentos apresentados no capítulo 4 são aplicados ao BEM pela expansão das soluções fundamentais utilizadas nas integrações sobre os segmentos do contorno.

É apresentada a formulação das integrações para interpolações do tipo apresentado na eq. (2.24), onde todas as expressões a serem integradas são meramente polinomiais. Dessa forma, ao final do capítulo são desenvolvidas tabelas de integração genéricas – para elementos lineares, quadráticos e cúbicos –, e que são as mesmas para qualquer que seja a solução fundamental utilizada.

5.1. Implementação computacional

Em um algoritmo de simulação baseado no BEM, as integrações sobre os elementos do contorno são bastante custosas, pois em geral as soluções fundamentais apresentam alta complexidade e sua integração numérica deve ser implementada de modo a levar em conta as singularidades existentes.

Na expansão proposta na eq. (4.3), nota-se que o único termo que depende das coordenadas do elemento (z) é polinomial, pois é calculado segundo o vetor P apresentado na eq. (4.5).

Considere-se, por exemplo, um problema de potencial, em que as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são

$$H_{mn} = \int_{\Gamma} q_m^*(z - z_0) n(z) u_n(z) d\Gamma(z), \text{ e} \quad (5.1)$$

$$G_{mi} = \int_{\Gamma} u_m^*(z - z_0) t_i(z) d\Gamma(z), \quad (5.2)$$

onde u_m^* e q_m^* são as soluções fundamentais em termos de potencial e fluxo, respectivamente, para o problema de elasticidade em 2D escritas em termos de números complexos, n_k é o vetor unitário normal à superfície do contorno, Γ

representa o intervalo de integração sobre todo o elemento, u_n é o vetor de potenciais nodais, e t_l é o vetor de fluxos na superfície.

As integrações apresentadas nas eqs. (5.1) e (5.2), se consideradas num contexto de FMM, só serão desenvolvidas em situações em que o ponto fonte z_0 está fora (e distante) do elemento em questão – a definição de quão distantes os pontos fonte e campo devem estar um do outro é proposta para trabalhos futuros em que o autor pretende trabalhar. Neste caso, as matrizes não apresentam singularidade, e suas expansões segundo a eq. (4.3) são

$$H_{mn} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_m^*}{\partial n} u_n d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_m^*}{\partial z} n_k u_n d\Gamma,$$

$$H_{mn} = \int_{\Gamma} n(z) u_n \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{fac_{i-1}} P_{i-1}(z - z_{c^{n_c}}) \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{fac_{j-1}} P_{j-1}(z_{L^{n_L}} - z_{0_m}) Q_{i+j-1}(z_{c^{n_c}} - z_{L^{n_L}}) d\Gamma, \text{ e (5.3)}$$

$$G_{ml} = \frac{-1}{2\pi} \int_{\Gamma} t_l \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{fac_i} P_i(z - z_{c^{n_c}}) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{fac_j} P_j(z_{L^{n_L}} - z_{0_m}) Q_{i+j-1}(z_{c^{n_c}} - z_{L^{n_L}}) d\Gamma. \quad (5.4)$$

Nas equações acima, apenas o polinômio $P_i(z - z_{c^{n_c}})$, t_l , n_k , e u_{in} dependem de z , ou seja, devem ser integrados sobre o elemento. Dessa forma

$$H_{mn} = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{fac_{i-1}} \left(\sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{fac_{j-1}} P_{j-1}(z_{L^{n_L}} - z_{0_m}) Q_{i+j-1}(z_{c^{n_c}} - z_{L^{n_L}}) \right) \int_{\Gamma} P_{i-1}(z - z_{c^{n_c}}) n(z) u_n d\Gamma, \text{ e (5.5)}$$

$$G_{ml} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{fac_i} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{fac_j} P_j(z_{L^{n_L}} - z_{0_m}) Q_{i+j-1}(z_{c^{n_c}} - z_{L^{n_L}}) \right) \int_{\Gamma} P_i(z - z_{c^{n_c}}) t_l d\Gamma, \quad (5.6)$$

onde as únicas integrações a serem desenvolvidas são

$$\tilde{H}_{in} = \int_{\Gamma} P_{i-1}(z - z_{c^{n_c}}) n(z) u_n d\Gamma(z), \text{ e} \quad (5.7)$$

$$\tilde{G}_{jl} = \int_{\Gamma} P_j(z - z_{c^{n_c}}) t_l d\Gamma(z). \quad (5.8)$$

5.2. Integração no GFMM

Numa representação isoparamétrica, o vetor u (que para um problema de elasticidade, por exemplo, tem significado de deslocamentos nodais) é

representado pelas mesmas funções que definem a geometria do contorno. Essas funções têm suporte local e são definidas como

$$u(z) = u_n(z)d_n, \quad (5.9)$$

onde d_n são valores nodais de potencial. As funções de forma são então definidas em termos de uma coordenada paramétrica $\xi \in [0,1]$, podendo esse intervalo ser encontrado também na literatura como $[-1,1]$.

Como já mencionado, não há a necessidade de consideração de singularidades no presente desenvolvimento, pois eles somente ocorrem quando $z \rightarrow z_0$, e nos casos englobados nesse trabalho z é sempre distante de z_0 , caso contrário, a precisão do algoritmo é prejudicada sensivelmente.

Para os desenvolvimentos a seguir, as funções de forma usuais são substituídas por $t_l = t_l |J|_l / |J|$ (eq. (2.24)), onde $|J|_l$ é o valor do Jacobiano no ponto caracterizado pelo índice l . Dessa forma, o $|J|$ presente no quociente de t_{il} desaparece quando da multiplicação por $d\Gamma$, visto que $d\Gamma = |J|d\xi$. Isso faz com que o integrando da eq. (5.8) seja polinomial, e de fácil obtenção analítica no contexto do GFMM.

Numa implementação computacional, t_{il} é descrito pelas funções de forma $N_k(\xi)$. Utilizando os conceitos apresentados acima nas eqs. (5.7) e (5.8), obtém-se

$$\tilde{H}_{in} = \int_0^1 P_{i-1} (N_k(\xi)z_k - z_c) N'_l(\xi)z_l N_n(\xi)d\xi, \text{ e} \quad (5.10)$$

$$\tilde{G}_{jl} = \int_0^1 P_j (N_k(\xi)z_k - z_{c^{nc}}) N_l(\xi)d\xi. \quad (5.11)$$

Nessas equações, índices repetidos têm significado de somatório. Essas expressões são formadas apenas por polinômios e sua integração é independente da solução fundamental do problema, e pode ser calculada analiticamente.

Para fins práticos de implementação, tabelas de integração dependentes apenas das coordenadas nodais do elemento podem ser geradas, prescindindo assim da necessidade de realizar integração durante a execução do algoritmo do GFMM.

Para isso, introduzem-se as variáveis Δ_i , ilustradas na Figura 9, tal que

$$\Delta_i = z_i - z_c, \text{ com } i = 1 \dots oe + 1, \quad (5.12)$$

onde oe é a ordem do elemento considerado. No atual trabalho, oe pode ser igual a 1, 2, ou 3 para elementos lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente.

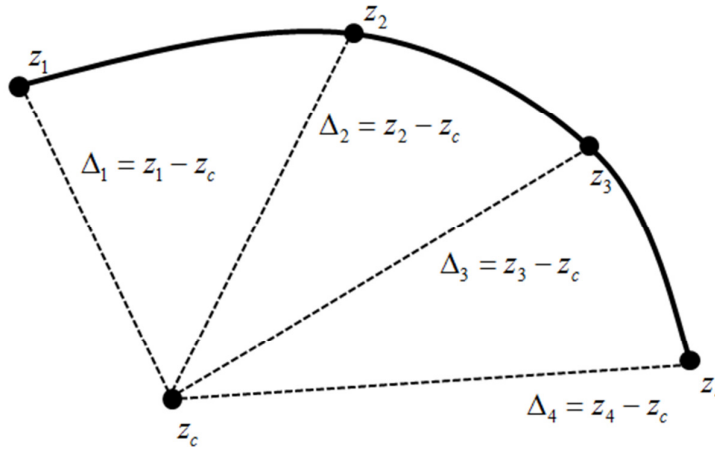


Figura 9 – Elemento isoparamétrico cúbico e o polo de expansão z_c .

5.2.1. Tabelas de integração para a matriz \mathbf{H}

Nesta seção são apresentados os procedimentos para a geração de tabelas de integração para a matriz \mathbf{H} que são totalmente independentes das soluções fundamentais. São considerados elementos lineares, quadráticos e cúbicos. Tais tabelas podem ser pré-calculadas, de forma que não há a necessidade do cálculo de integrais para elementos que estejam distantes do ponto fonte.

As funções de forma utilizadas, definidas no intervalo $[0,1]$, são

$$N_i^l = [-\xi + 1, \xi]$$

$$N_i^q = [2\xi^2 - 3\xi + 1, -4\xi^2 + 4\xi, 2\xi^2 - \xi] \quad , \quad (5.13)$$

$$N_i^c = \left[\frac{(-\xi + 1)(9\xi^2 - 1)}{16}, \frac{9}{16}(3\xi - 1)(\xi^2 - 1), \frac{9}{16}(3\xi + 1)(1 - \xi^2), \frac{(1 + \xi)(9\xi^2 - 1)}{16} \right]$$

onde os índices l , q e c significam linear, quadrático e cúbico, respectivamente, e suas derivadas são

$$N_i^{l'} = [-1, 1]$$

$$N_i^{q'} = [4\xi - 3, -8\xi + 4, 4\xi - 1] \quad . \quad (5.14)$$

$$N_i^{c'} = [-27\xi^2 + 18\xi + 1; 81\xi^2 - 18\xi - 27; -81\xi^2 - 18\xi + 27; 27\xi^2 + 18\xi - 1]$$

São apresentados a seguir os resultados da integração da eq. (5.10), para um elemento linear e uma expansão de três termos ($n = 3$)

$$\tilde{H}_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\Delta_1 + \Delta_2) & \frac{1}{2}(-\Delta_1 + \Delta_2) \\ \frac{1}{6}(-2\Delta_1^2 + \Delta_1\Delta_2 + \Delta_2^2) & \frac{1}{6}(-2\Delta_1^2 + \Delta_1\Delta_2 + \Delta_2^2) \\ \frac{1}{12}(-3\Delta_1^3 + \Delta_1^2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2^2 + \Delta_2^3) & \frac{1}{12}(-3\Delta_1^3 + \Delta_1^2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2^2 + \Delta_2^3) \\ \frac{1}{20}(-4\Delta_1^4 + \Delta_1^3\Delta_2 + \Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_1\Delta_2^3 + \Delta_2^4) & \frac{1}{20}(-4\Delta_1^4 + \Delta_1^3\Delta_2 + \Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_1\Delta_2^3 + \Delta_2^4) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Vale notar a simetria obtida através da definição de Δ_i , o que simplifica ainda mais os cálculos preliminares a serem desenvolvidos.

Os resultados para funções de forma quadráticas e cúbicas são apresentados no Apêndice.

5.2.2. Tabelas de integração para a matriz G

Para a integração da expressão apresentada na eq. (5.11) utiliza-se a mesma definição de funções de forma da eq. (5.13) também para elementos lineares, quadráticos e cúbicos.

Abaixo são apresentados os resultados da integração da eq. (5.11) também para uma expansão de 3 termos

$$\tilde{G}_{jl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}(2\Delta_1 + \Delta_2) & \frac{1}{6}(\Delta_1 + 2\Delta_2) \\ \frac{1}{12}(3\Delta_1^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2^2) & \frac{1}{12}(\Delta_1^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 3\Delta_2^2) \\ \frac{1}{20}(4\Delta_1^3 + 3\Delta_1^2\Delta_2 + 2\Delta_1\Delta_2^2 + \Delta_2^3) & \frac{1}{20}(\Delta_1^3 + 2\Delta_1^2\Delta_2 + 3\Delta_1\Delta_2^2 + 4\Delta_2^3) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Mais uma vez nota-se que há uma simetria entre os resultados, advinda da definição das variáveis Δ_i .

Os resultados para funções de forma quadráticas são apresentados no Apêndice 2.