

4

FMM para soluções fundamentais genéricas definidas em

□

Neste capítulo é apresentada uma formulação genérica do FMM 2D, sendo esta aplicável a qualquer solução fundamental.

O desenvolvimento apresentado no capítulo 3 é válido apenas para problemas de potencial em 2D, e sua generalização para o caso 3D não parece necessitar de grandes alterações e será material de estudo para futuros trabalhos. No entanto, para problemas que tenham soluções fundamentais diferentes das apresentadas nas eqs. (3.2) e (3.3), todo o desenvolvimento dos *momentos* e *translações* deve ser refeito, e adaptado para a nova solução fundamental.

A formulação proposta a seguir visa evitar a necessidade de adaptações quando há mudança na natureza do problema a ser simulado. Isto é possível porque, ao longo de todo o desenvolvimento, é utilizada uma função genérica diferenciável.

4.1.

Definições básicas

$z - z_0$ = diferença entre o ponto fonte z_0 e o ponto campo z ;

z_c = ponto a partir do qual se desenvolve a expansão da solução fundamental em torno (próximo) do ponto campo. Também são introduzidas expansões em torno de polos mais distantes z_{c^k} , $k = 1, 2, \dots, n_c$ (onde, por definição $z_{c^0} \equiv z_c$).

z_L = ponto a partir do qual se desenvolve a expansão em torno do ponto fonte. Também são introduzidas expansões em torno de polos mais distantes z_{L^l} , $l = 1, 2, \dots, n_L$ (onde, por definição $z_{L^0} \equiv z_L$).

4.2. Expansão da solução fundamental

Seja a solução fundamental $f(z - z_0)$ definida em termos de números complexos em um espaço 2D. Sua expansão em torno de um certo ponto $z_{c^{n_c}}$ próximo ao ponto campo z e distante do ponto fonte z_0 é

$$f(z - z_0) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (z - z_{c^{n_c}})^i D^{(i)} f(z_{c^{n_c}} - z_0) + O(z - z_{c^{n_c}})^{n+1} \quad (4.1)$$

onde $D^{(0)} f(z_{c^{n_c}} - z_0) = f(z_{c^{n_c}} - z_0)$ e $D^{(i)} f(z) = \partial^i f(z) / \partial z^i$.

Nota-se na eq. (4.1) que, após a expansão, os termos que dependem do ponto campo e fonte estão separados, de forma que uma expansão em torno do ponto fonte agora é possível com total independência do ponto campo em questão. Tal expansão, que consiste em expandir os termos $D^{(i)} f(z_{c^{n_c}} - z_0)$ em torno de um novo polo $z_{L^{n_L}}$, próximo ao ponto fonte e distante do polo de expansão $z_{c^{n_c}}$, fornece:

$$f(z - z_0) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (z - z_{c^{n_c}})^i \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (z_{L^{n_L}} - z_0)^j D^{(i+j)} f(z_{c^{n_c}} - z_{L^{n_L}}) + O(z - z_{c^{n_c}})^{n+1} + O(z_{L^{n_L}} - z_0)^{n+1} \quad (4.2)$$

Na eq. (4.2) acima, vale notar que o erro associado às expansões desenvolvidas é proporcional à distância entre os pontos e seus polos de expansão, de forma que, para minimizar este erro, é necessário que os polos de expansão estejam o mais próximo possível dos pontos a que dizem respeito.

A forma truncada da eq. (4.2) é apresentada abaixo:

$$f(z - z_0) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{fac_i} P_i(z - z_{c^{n_c}}) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{fac_j} P_j(z_{L^{n_L}} - z_0) Q_{i+j-1}(z_{c^{n_c}} - z_{L^{n_L}}) \quad (4.3)$$

onde

$$fac = [0! \quad 1! \quad 2! \quad 3! \quad \dots] \quad (4.4)$$

$$P(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad z^3 \quad \dots] \quad (4.5)$$

$$Q(z) = [f(z) \quad \partial f(z) / \partial z \quad \partial^2 f(z) / \partial z^2 \quad \partial^3 f(z) / \partial z^3 \quad \dots] \quad (4.6)$$

Nas eqs. (4.2) e (4.3), os índices n_c e n_L dizem respeito aos mais altos níveis de expansão, de forma que sucessivas expansões podem ter sido realizadas

anteriormente, sendo estas expressões apenas aplicáveis aos níveis mais externos de expansão.

Ainda nas duas equações citadas, nota-se que o vetor Q apenas diz respeito aos polos de índice mais altos, de forma que nenhuma informação referente aos pontos campo ou fonte é necessária para o seu desenvolvimento. Tais informações são utilizadas apenas para o cálculo dos vetores P .

Vale notar ainda que os vetores P são totalmente independentes da solução fundamental, sendo apenas binômios referentes aos sucessivos polos de expansão.

4.3. Sucessivas expansões

No caso de sucessivas expansões, apenas o vetor P é expandido. Esta expansão tem a forma exata

$$P_i(z - z_{c,l}) = \sum_{j=1}^i C_{j,i+1-j} P_j(z - z_{c,l-1}) P_{i+1-j}(z_{c,l-1} - z_{c,l}) \quad (4.7)$$

onde C é a matriz de coeficientes, tal que $C_{ij} = 1$ para $i=1$, ou $j=1$, e $C_{ij} = C_{i-1,j} + C_{i,j-1}$, caso contrário.

Na eq. (4.7), $P_{i+1-j}(z_{c,l-1} - z_{c,l})$ é calculado como na eq. (4.5), e o vetor $P_j(z - z_{c,l-1})$ é calculado de forma recursiva de acordo com a eq. (4.7), de forma que os argumentos desta equação são sempre polos de níveis adjacentes. Caso tais argumentos sejam de polos não adjacentes, deve-se utilizar a eq. (4.7) recursivamente até que seja atingido o polo de índice zero (ou seja, ponto fonte ou campo).

4.4. Método Fast Multipole para uma função genérica (GFMM)

Baseado nas eqs. (4.3), e (4.7) podem-se desenvolver tantas expansões quanto se queira em torno dos pontos fonte e campo de forma a acelerar o cálculo das relações entre elementos para um programa de elementos de contorno.

No subtópico a seguir apresentam-se validações numéricas dos desenvolvimentos apresentados nos tópicos 4.2 e 4.3 para soluções fundamentais

de problemas de potencial e para a solução de tensão para uma semifratura elíptica.

4.4.1. Validação numérica

No BEM, para resolver o sistema de equações da eq. (3.1) de forma iterativa, é necessária a multiplicação da matriz \mathbf{A} por um vetor. Na forma convencional de desenvolvimento desse produto, obtém-se cada elemento da matriz e apenas então é efetuada a multiplicação pelo vetor. No FMM, as linhas da matriz já são multiplicadas pelo vetor quando é feito o desenvolvimento das expansões, de forma que após todas as expansões serem calculadas, o produto da matriz pelo vetor foi operado, sem a necessidade da montagem de toda a matriz \mathbf{A} .

Para efeito de validação numérica do algoritmo, criou-se uma árvore de pontos definidos em um sistema de coordenadas complexas com 35 pontos campo e 14 pontos fonte, obtendo-se assim uma matriz de dimensões 14×35 , onde cada linha é obtida pelo resultado da integração sobre cada ponto campo, sendo cada coluna referente a um ponto fonte.

Na Figura 4 abaixo, apresenta-se a distribuição de pontos, e todos os polos de expansão considerados. Também é ilustrada, através das linhas cheias, a árvore de expansões, que parte dos pontos até os polos de mais alto nível, que são conectados pela linha tracejada.

O vetor P apresentado na eq. (4.5) é calculado de forma independente da solução fundamental, assim como o vetor f_{ac} na eq. (4.4). E em ambos os exemplos numéricos apresentados abaixo é utilizada a mesma distribuição de pontos apresentada na Figura 4.

O Apêndice 1 apresenta o algoritmo utilizado para a obtenção dos resultados apresentados a seguir (em linguagem Maple®), assim como o arquivo de entrada com os dados da árvore de pontos e polos.

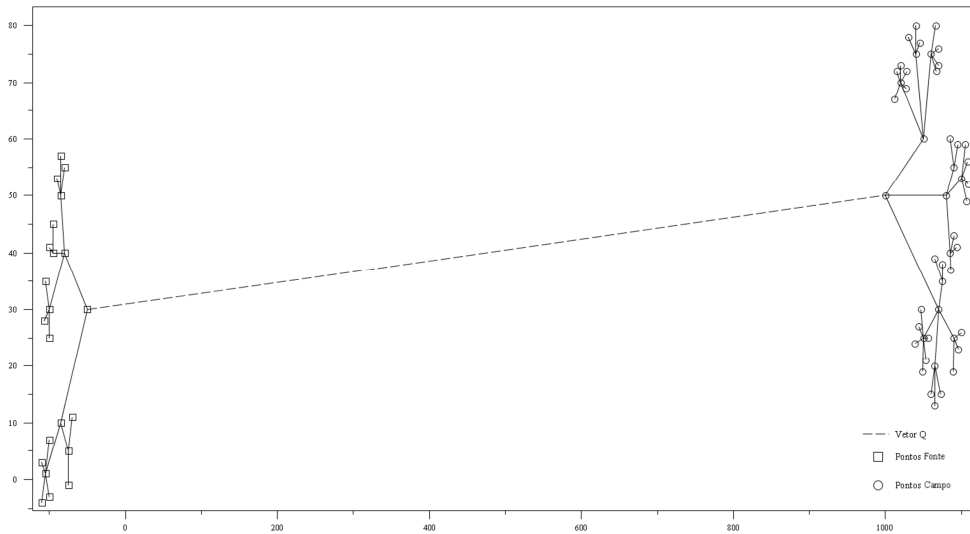


Figura 4 – Exemplo de árvore de pontos e expansões.

4.4.1.1.

Problema de potencial

Para um problema de potencial, a solução fundamental é

$$f(z) = -\frac{\ln(z - z_0)}{2\pi}. \quad (4.8)$$

Para esse problema, o vetor Q_{2n+1} , apresentado na eq. (4.6) é calculado, para uma expansão de 3 termos, como

$$Q = \left[\ln(z) \quad \frac{1}{z} \quad -\frac{1}{z^2} \quad \frac{2}{z^3} \quad -\frac{6}{z^4} \quad \frac{24}{z^5} \quad -\frac{120}{z^6} \right]. \quad (4.9)$$

Visto que para o exemplo em questão, existem 3 níveis de expansão, deve-se utilizar a eq. (4.7) para o cálculo das expansões intermediárias, fazendo com que a informação de todos os pontos campo seja transmitida para um único polo, o de ordem mais alta, no caso z_{c^3} . Procedese de forma análoga para a transmissão dos pontos fonte até o polo de ordem mais alta (z_{L^3}).

Após os procedimentos citados acima, é operada a eq. (4.3), com o resultado sendo o vetor produto da matriz de coeficientes pelo vetor de condições de contorno. Para este exemplo o número de termos utilizados na expansão foi $n = 5$.

Para efeito de validação, o resultado é comparado com o cálculo convencional, ou seja, para cada ponto fonte é calculado o valor de $f(z)$ em cada um dos pontos fonte. É calculada então a norma de erro.

Para o exemplo apresentado na Figura 4, a norma de erro de cada um dos elementos do vetor resultante é calculada segundo a equação acima e é apresentada abaixo na Figura 5.

Na Figura 5 – Erro do algoritmo proposto para problema de potencial, utilizando número variável de termos para a expansão (n), para os 14 pontos fonte da Figura 4. são apresentados os resultados de 7 simulações. Para cada uma das simulações utilizou-se um número diferente de termos para a expansão em série, variando de 1 ($n=1$) a 7 ($n=7$) termos.

Nota-se que com o aumento do número de termos na expansão em série, há uma diminuição sensível no erro calculado. Esta é uma característica importante e é mais bem explorada com a realização de um teste de convergência.

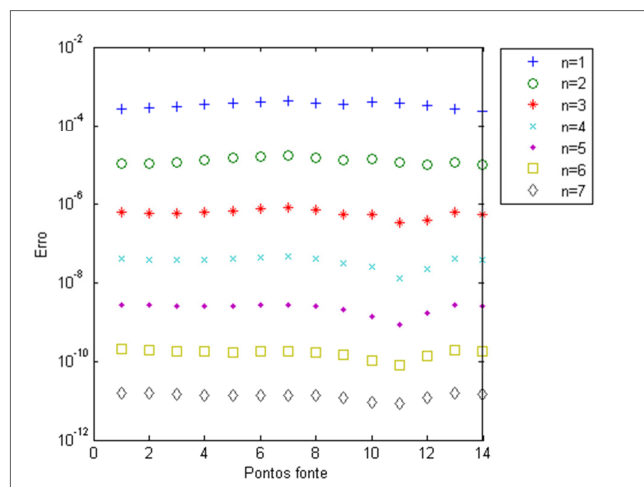


Figura 5 – Erro do algoritmo proposto para problema de potencial, utilizando número variável de termos para a expansão (n), para os 14 pontos fonte da Figura 4.

O estudo de convergência do erro para as 7 simulações apresentadas na Figura 5, é apresentado na Figura 6. Os dados desta são obtidos a partir da soma do erro dos 14 pontos fonte de cada simulação.

Vê-se que o algoritmo apresenta uma convergência com tendência linear bastante forte, o que é bastante interessante caso seja necessário determinar *a priori* quantos termos serão utilizados, de acordo com a precisão exigida em uma simulação.

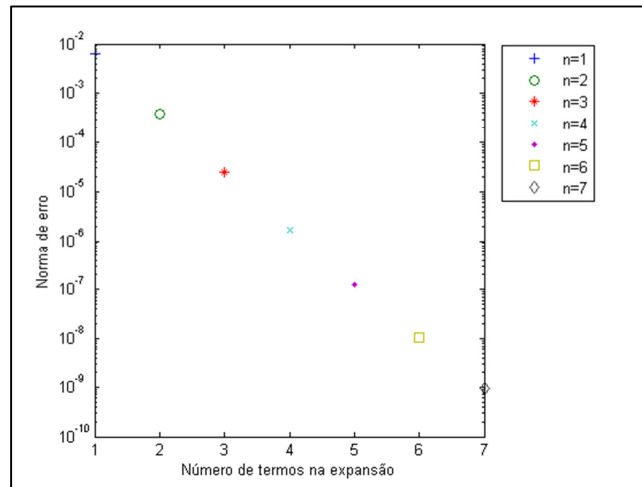


Figura 6 – Estudo de convergência para as simulações do problema de potencial.

4.4.1.2.

Problema de fratura utilizando funções de Westergaard

Para este problema – que utiliza uma função de tensão de Westergaard generalizada como solução fundamental para um problema de fratura – proposto por Dumont e Mamani (2011), a solução fundamental é:

$$f(z) = -\left(\frac{z}{4} + 1 - (1 - z^2)F\right), \quad (4.10)$$

onde $F = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{-z}\right) / \sqrt{1 - z^2}$. O vetor Q_{2n+1} para este problema é

$$Q(z) = \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{\pi z}{2} + 1 - (1 - z^2)F \quad Fz + \frac{1}{z} + \frac{\pi}{2} \quad \frac{F - 1/z^2}{1 - z^2} \quad \frac{3zF - (5z^2 - 2)/z^3}{(1 - z^2)^2} \right], \quad (4.11)$$

desenvolvido para uma expansão de $n = 2$ termos.

O algoritmo é executado de forma análoga ao apresentado no tópico 4.4.1.1 e os erros dos cálculos são apresentados na Figura 7. Mais uma vez observa-se a diminuição do erro com o aumento do número de termos na expansão em série, como no caso para o problema de potencial.

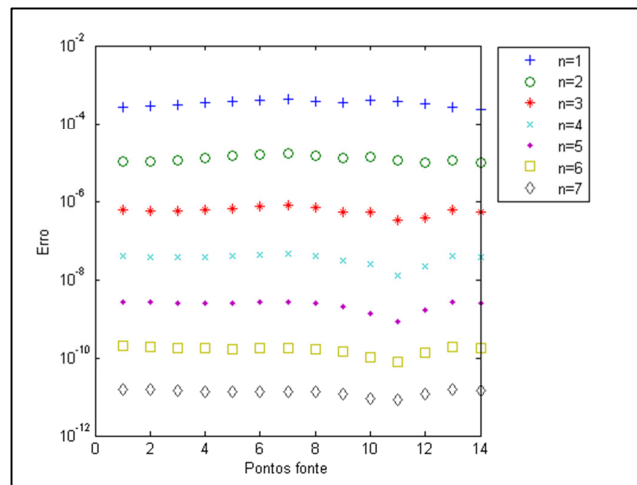


Figura 7 – Erro do algoritmo proposto para a função de Westergaard, utilizando número variável de termos para a expansão (n), para os 14 pontos fonte da Figura 4.

Também foi realizado o estudo de convergência para esta simulação. Ele é apresentado na Figura 8, e apresenta a mesma tendência linear que as simulações anteriores.

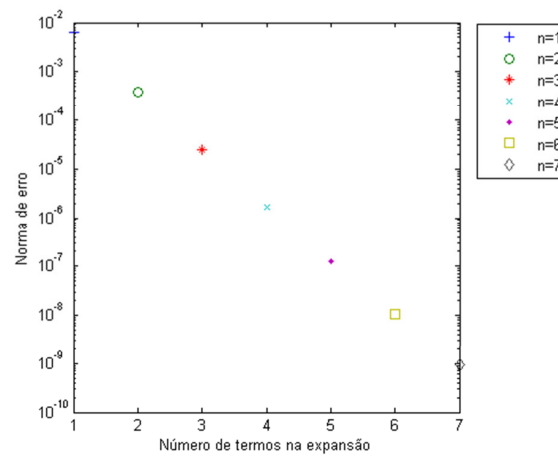


Figura 8 – Estudo de convergência para as simulações do problema de Westergaard.