

2 Método dos elementos de contorno (BEM)

Nesse capítulo apresenta-se uma breve revisão sobre o Método Consistente dos Elementos de Contorno (CBEM), (DUMONT, 2010a), o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (HBEM), (DUMONT, 1987), e por fim sobre o Método Expedido dos Elementos de Contorno (EBEM), (DUMONT e AGUILAR, 2012).

O CBEM apresenta pequena diferença conceitual com relação ao Método de Colocação dos Elementos de Contorno (BEM), (BREBBIA, 1978), quando faz uma consideração mais consistente das constantes de “corpo rígido” – o termo “corpo rígido” diz respeito aos deslocamentos que não provocam variação de energia interna no corpo, e vem dos problemas de elasticidade, de maior domínio do autor –, mas que resulta nas mesmas equações matriciais do CBEM.

A demonstração do método a seguir leva em conta um problema de elasticidade, mas pode ser generalizada de forma bastante simples para outros problemas, como de potencial.

2.1. Demonstração do BEM

Seja um corpo linear elástico, de contorno Γ e domínio Ω submetido a forças de superfície t_i , forças de corpo b_i e deslocamentos u_i (Figura 1), tal que a relação constitutiva

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}, \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas, tal que $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}$, e ε_{ij} o tensor de deformações.

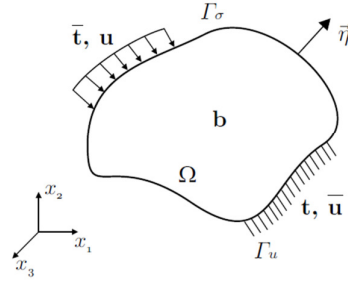


Figura 1 – Corpo elástico submetido a carregamentos. (OLIVEIRA, 2004)

Para pequenos deslocamentos, a relação entre deformações e deslocamentos é descrita por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } \Omega. \quad (2.2)$$

São conhecidas forças \bar{t}_i em Γ_σ , e deslocamentos \bar{u}_i em Γ_u , de forma que

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u, \quad (2.3)$$

sendo que $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Considerando a ausência de momentos de massa, as equações de equilíbrio desse corpo são

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \text{ em } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ em } \Omega, \text{ e} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_\sigma. \quad (2.6)$$

Tomando em conta as eqs. (2.5) e (2.2), a eq. (2.1) pode ser reescrita da forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}. \quad (2.7)$$

Seja ainda um campo de soluções fundamentais

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}u_{k,l}^* \quad (2.8)$$

que satisfazem a parte homogênea da eq. (2.4), mas que não necessariamente satisfazem as condições de contorno da eq. (2.6). Utilizando tal campo como função peso para uma formulação de resíduos ponderados das eqs. (2.4) e (2.6) tem-se

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ji,j} \delta u_i^* d\Omega - \int_{\Omega} b_i \delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}n_j - \bar{t}_i) \delta u_i^* d\Gamma = 0, \quad (2.9)$$

onde δ representa uma perturbação.

Integrando-se duas vezes por partes a equação acima, utilizando o teorema de Green sucessivas vezes e dado que $\sigma_{ji}\delta u_{i,j}^* = u_{k,l}C_{ijkl}\delta u_{i,j}^* = u_{k,l}\delta\sigma_{k,l}^*$, chega-se à expressão

$$\int_{\Gamma} \delta\sigma_{ji}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ji}^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^* d\Omega \quad (2.10)$$

As soluções fundamentais em termos de tensões, e deslocamentos – $\delta\sigma^*$ e δu^* , respectivamente – podem ser escritas em termos de parâmetros arbitrários de forças virtuais p_m^* como

$$\delta\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* \delta p_m^*, \text{ e} \quad (2.11)$$

$$\delta u_i^* = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) \delta p_m^*, \quad (2.12)$$

onde u_{is}^r correspondem aos n^r deslocamentos de corpo rígido, com $s=1\dots n^r$, C_{sm} são constantes arbitrárias e o índice m representa os pontos de aplicação e a direção de δp_m^* , ou seja, pode ser interpretado como pontos fonte.

A função σ_{ijm}^* , apresentada na eq. (2.11), pode ser convenientemente normalizada de modo que, para um certo domínio Ω_0 , que contém δp_m^* ,

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{jim,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_0} \sigma_{jim}^* n_j d\Gamma = -\delta_{im}, \quad (2.13)$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker e Γ_0 é o contorno de Ω_0 . Utilizando-se da eq.

(2.13), a integral $\int_{\Omega} \delta\sigma_{ji}^* u_i d\Omega$ da eq. (2.10) pode ser reescrita na forma

$$\int_{\Omega} \delta\sigma_{ji}^* u_i d\Omega = -u_m \delta p_m^*. \quad (2.14)$$

Aplicando as definições das eqs. (2.11), (2.12) e a igualdade da eq. (2.14) à eq. (2.10) obtém-se

$$u_m = \int_{\Omega} b_i \delta u_{im}^* d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} t_i \delta u_{im}^* d\Gamma + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_i u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right), \quad (2.15)$$

que é a identidade de Somigliana, exceto pelos termos multiplicados por C_{sm} . Tais termos são nulos para o caso de forças equilibradas, no entanto, quando há aproximação isso não é verdade, e os resultados apresentam erros proporcionais a C_{sm} .

Os termos multiplicados por C_{sm} na eq. (2.15) são, basicamente, a primeira diferença entre o CBEM e o BEM. Mais à frente, mas ainda nessa seção, é apresentada a segunda diferença, que diz respeito à eq. (2.24).

Sejam as aproximações de u_i e t_i no contorno Γ

$$u_i = u_{in} d_n, \text{ e} \quad (2.16)$$

$$t_i = t_{il} t_l, \quad (2.17)$$

onde d_n é o vetor de deslocamentos nodais, u_{in} são as funções de interpolação de d_n com suporte local, t_l são atributos das forças de superfície ligados ao vetor normal (n_i) à superfície, e t_{il} são as funções de interpolação de t_l com suporte local. Em geral, é utilizada uma formulação isoparamétrica, em que a geometria do contorno é descrita pelas mesmas funções u_{in} que descrevem os deslocamentos. Além disso, usam-se também as mesmas funções polinomiais para t_{il} e u_{in} .

Aplicando as aproximações introduzidas nas eqs. (2.16) e (2.17) à eq. (2.15) obtém-se

$$\left(\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n = \int_{\Omega} b_i \delta u_{im}^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_{il} t_l \delta u_{im}^* d\Gamma + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} t_l u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right), \quad (2.18)$$

que é a mesma expressão obtida no BEM, exceto pelos termos de deslocamentos de corpo rígido e que pode ser escrita de forma matricial como

$$\mathbf{Hd} = \mathbf{Gt} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.19)$$

onde

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma} t_{il} \delta u_{im}^* d\Gamma, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{b} = \int_{\Omega} b_i \delta u_{im}^* d\Omega, \text{ e} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} t_l u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right). \quad (2.23)$$

O termo $\boldsymbol{\varepsilon}$ corresponde aos resíduos devidos à magnitude dos deslocamentos de corpo rígido e à aproximação da solução fundamental, segundo a eq. (2.12), e ainda é dependente da aproximação da geometria do contorno simulado.

A interpolação das forças de superfície da eq. (2.17), podem ainda ser feitas como

$$t_i = \frac{|J|_{(em\ l)}}{|J|} u_{il} t_l, \quad (2.24)$$

onde u_{il} e t_l seguem as mesmas definições da eq. (2.17), $|J|$ é o jacobiano da transformação de coordenadas $d\Gamma = |J| d\xi$ para as integrações a serem desenvolvidas no contorno, e $|J|_{(em\ l)}$ é o jacobiano calculado no ponto l de aplicação de força.

A definição apresentada na eq. (2.24) leva à simplificação das integrais a serem calculadas, pois o termo $|J|^{-1}$, quando multiplicado pela transformação de coordenadas da integração desaparece. Esse aspecto faz com que uma integração em um contexto de Fast Multipole (Capítulo 5) torne-se essencialmente polinomial, tornando a integração analítica – e com isso a redução de erros devido a integrações numéricas, e do custo computacional – possível.

Para desenvolvimentos mais completos e discussões a respeito das propriedades espectrais das matrizes apresentadas na eq. (2.19) recomenda-se a leitura dos trabalhos de Oliveira (2004) e Dumont (2010a).

2.2. Método híbrido dos elementos de contorno

O HBEM, (DUMONT, 1987), difere do CBEM por partir de uma formulação de energia, ao invés de uma formulação de resíduos ponderados.

O desenvolvimento do método parte de uma formulação de energia potencial total. Sendo a eq. (2.3) válida,

$$-\pi_R(u_i^d, \sigma_{ij}^s) = \int_{\Omega} [U_0^C(\sigma_{ij}^s) + (\sigma_{ij,j}^s + b_i)u_i^d] d\Omega - \int_{\Gamma} u_i^d \sigma_{ij}^s n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} u_i^d \bar{t}_i d\Gamma + C = \text{estacionário}, \quad (2.25)$$

que é o potencial de Hellinger-Reissner, onde U_0^C é energia de deformação complementar e C é uma constante. A formulação depende apenas dos campos de tensão σ_{ij}^s e de deslocamentos u_i^d , onde o sobrescrito s indica um campo de tensões (*stress*) e d um campo de deslocamentos (*displacements*).

As definições apresentadas nas eqs. (2.1) a (2.7) também são utilizadas neste desenvolvimento. Sejam os campos de tensões σ_{ij}^s e deslocamentos u_i^d

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p, \quad (2.26)$$

$$u_i^d = u_i^* + u_i^p, \quad (2.27)$$

onde σ_{ij}^* e u_i^* são soluções fundamentais da eq. (2.4), e σ_{ij}^p e u_i^p são soluções particulares quaisquer. Utilizando as definições de σ_{ij}^* e u_i^* introduzidas nas eqs. (2.11) e (2.12), e a eq. (2.26), o potencial da eq. (2.25) torna-se

$$\pi_R(u_i^d, \sigma_{ij}^s) = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^s n_j - \bar{t}_i) u_i^d d\Gamma - \int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^s) d\Omega. \quad (2.28)$$

O termo $\int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^s) d\Omega$ pode ser escrito, com o uso da eq. (2.1), como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^s) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^s C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^s d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^s u_{i,j}^d d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^p) (u_{m,j}^* p_n^* + u_{is,j}^r C_{sn} p_n^* + u_{i,j}^p) d\Omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

Após integração por partes e aplicação do teorema de Green, chega-se à expressão para o termo da energia complementar de deformação presente na eq. (2.28):

$$\int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^s) d\Omega = \frac{1}{2} p_m^* \left(\int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* u_{in}^* n_j d\Gamma \right) p_n^* + p_m^* \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* u_i^p n_j d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^p u_{i,j}^p d\Omega, \quad (2.30)$$

que pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^s) d\Omega = \frac{1}{2} p_m^* F_{mn} p_n^* + p_m^* b_m + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^p u_{i,j}^p d\Omega \quad (2.31)$$

onde $F_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* u_{in}^* n_j d\Gamma$ e $b_m = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* u_i^p n_j d\Gamma$.

Já a integral no contorno da eq. (2.28) pode ser reescrita, utilizando-se das definições das eqs. (2.26), (2.16), e (2.11), na forma

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^s n_j - \bar{t}_i) u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \bar{t}_i u_{in}^n d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* p_m^* n_j u_{in}^n d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p n_j u_{in}^n d\Gamma, \quad (2.32)$$

ou

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^s n_j - \bar{t}_i) u_i d\Gamma = p_n d_n - H_{mn} p_m^* d_n - p_n^p d_n, \quad (2.33)$$

onde

$$\mathbf{H} = H_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j u_i^n d\Gamma, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{p} = p_n = \int_{\Gamma} \bar{t}_i u_{in}^n d\Gamma, \text{ e} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{p}^p = p_n^p = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p n_j u_{in}^n d\Gamma. \quad (2.36)$$

Reescrevendo o potencial de Hellinger-Reissner da eq. (2.28) utilizando as eqs (2.31) e (2.33), obtém-se

$$\pi_R(u_i, \sigma_{ij}) = p_n d_n - H_{nm} p_m^* d_n - p_n^p d_n - \frac{1}{2} p_m^* F_{nm} p_n^* - p_m^* b_m. \quad (2.37)$$

Em notação matricial, tem-se

$$\pi_R(u_i, \sigma_{ij}) = \mathbf{p}^{*T} \left(\frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{p}^* + \mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \right) + \mathbf{d}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p). \quad (2.38)$$

Aplicando uma variação ao potencial acima, que é estacionário, chega-se às duas equações que definem o HBEM:

$$\begin{cases} \mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^p \end{cases} \quad (2.39)$$

A matriz \mathbf{H} é a mesma definida na eq. (2.19) para o CBEM, e a matriz \mathbf{F} é simétrica por construção e é uma matriz de flexibilidade.

Para um desenvolvimento mais minucioso e para outras informações acerca do HBEM, recomenda-se a leitura do trabalho de Dumont (1987).

2.3. Método expedito dos elementos de contorno

O EBEM é uma combinação do BEM com o HBEM que busca uma maior eficiência de simulação, (DUMONT, 2010b) e (DUMONT e AGUILAR, 2012). A principal diferença do EBEM para os outros dois métodos é a forma como tensões e deslocamentos são calculados no domínio.

Apesar de menos preciso, o EBEM é computacionalmente mais eficiente que o BEM e o HBEM. Tal ganho de eficiência decorre do método quase prescindir de integrações (DUMONT e AGUILAR, 2012).

Nessa formulação, os campos de tensões e deslocamentos são definidos como nas eqs. (2.26) e (2.27), onde σ_{ij}^* e u_i^* são definidos como nas eqs. (2.11) e (2.12). Dessa forma, os resultados no domínio são calculados diretamente, sem a necessidade de utilizar a identidade de Somigliana, que é computacionalmente custosa por necessitar de várias integrações.

Utilizando as interpolações das eqs. (2.27) e (2.24), a eq. (2.19) pode ser reescrita, de forma aproximada, como

$$T_{lm}^* \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{in} d\Gamma \right) (d_n - d_n^p) \approx U_{nm}^* \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{in} d\Gamma \right) (t_l - t_l^p), \quad (2.40)$$

onde T_{lm}^* é a matriz de forças de superfície, e U_{nm}^* é a matriz de deslocamentos nodais calculados diretamente pela aplicação da solução fundamental.

A expressão acima define o Método Expedito dos elementos de Contorno (EBEM), e pode ser escrita em notação matricial na forma

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{U}^{*T} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p), \quad (2.41)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{T}^{*T} \mathbf{L}, \text{ e} \quad (2.42)$$

\mathbf{L} é a matriz definida por

$$\mathbf{L} = L_{lm} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{in} d\Gamma. \quad (2.43)$$

Os elementos das diagonais de $\tilde{\mathbf{H}}$ e \mathbf{U}^* são indefinidos, no entanto, podem ser calculados e é possível a demonstração de que eles são finitos. Dumont e Aguilar (2012) propõem um algoritmo para o cálculo de tais coeficientes, que se baseiam na devida consideração dos deslocamentos de corpo rígido no caso da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ e então o uso de uma formulação de mínimos quadrados para a obtenção dos coeficientes da matriz \mathbf{U}^* .

Dado um problema de condições de contorno mistas, pode-se utilizar a eq. (2.41) e após utilizar a identidade de Somigliana para obtenção de resultados em pontos internos. No entanto, utilizando-se as definições das eqs. (2.26) e (2.27), tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^p \\ \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^p \end{cases}, \quad (2.44)$$

que pode ser escrito ainda como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_N^T \\ \mathbf{U}_D^* \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_N - \mathbf{p}_N^p \\ \mathbf{d}_D - \mathbf{d}_D^p \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

onde os índices N e D definem se a condição de contorno é de Neumann, ou de Dirichlet, respectivamente. Após a solução da equação (2.45), calculam-se os parâmetros de forças e deslocamentos remanescentes através de

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_N \\ \mathbf{p}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_N^p \\ \mathbf{p}_D^p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_N^* \\ \tilde{\mathbf{H}}_D^T \end{bmatrix} \mathbf{p}^*. \quad (2.46)$$