

3 Modelo analítico 3D para corte em rocha

3.1 Cortador afiado a pressão atmosférica

No caso de um corte em três dimensões, o corte é caracterizado por uma orientação lateral, chamado de ângulo de saída lateral ou *siderake* e por uma orientação vertical, chamado de ângulo de ataque ou *backrake*. Quando o cortador é orientado lateralmente, surge uma nova componente de fricção, a fricção lateral. Com essa nova componente, espera-se que a energia específica resultante do corte seja maior, uma vez que agora é necessário vencer duas componentes de fricção.

As forças atuantes no cortador, medidas nas direções de movimento, podem ser escritas, em forma vetorial, segundo a Eq.(3.1).

$$[F] = \begin{bmatrix} F_c^H \\ F_c^V \\ F_c^S \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para o corte 3D, as forças tangencial, axial e radial podem ser transpostas para planos que tomam como referencia a face do cortador, conforme a Figura 3.1. Para isso, apenas é necessária a rotação do vetor força das coordenadas de movimento com relação aos ângulos *backrake* e *siderake*. As duas rotações podem ser escritas em forma matricial conforme as Eq.(3.2) e Eq.(3.3).

$$[rot_\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & & \sin \beta \\ & 1 & \\ -\sin \beta & & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[rot_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \\ \sin \theta & \cos \theta & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

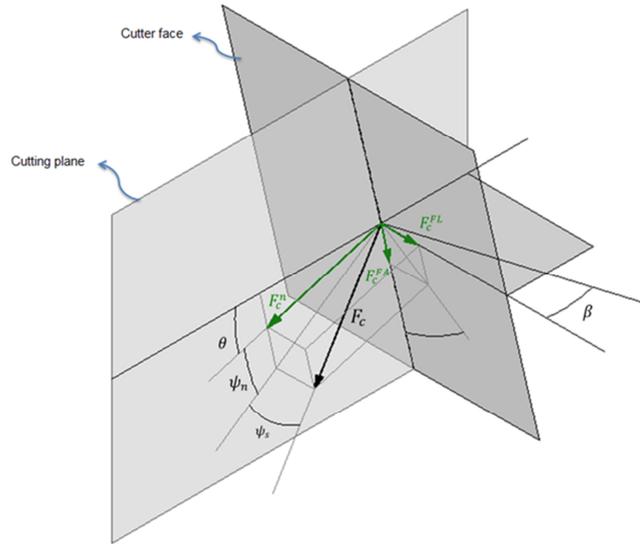


Figura 3.1: Esquema de forças 3D (forças normal, de fricção axial e de fricção lateral) para corte em rocha.

Assim, as forças no cortador nas coordenadas referentes a face do mesmo podem ser obtidas através do produto escalar das matrizes de rotação com o vetor força, segundo a Eq.(3.4).

$$[F] = [rot_{\theta}] \cdot [rot_{\beta}] \cdot \begin{bmatrix} F_c^N \\ F_c^{FA} \\ F_c^{FL} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Assim, tem-se que as forças referentes a face do cortador são:

$$F_c^N = F_c^H \cos \theta \cos \beta + F_c^V \sin \theta - F_c^S \cos \theta \sin \beta \quad (3.5)$$

$$F_c^{FA} = -F_c^H \sin \theta \cos \beta + F_c^V \cos \theta + F_c^S \sin \theta \sin \beta \quad (3.6)$$

$$F_c^{FL} = F_c^H \sin \beta + F_c^S \cos \beta \quad (3.7)$$

Porém, as forças radial e axial medidas no teste podem ser relacionadas com a força tangencial de corte por ângulos diretores, conforme:

$$F_c^V = F_c^H \tan \zeta_n \quad (3.8)$$

$$F_c^S = F_c^H \tan \zeta_s \quad (3.9)$$

Assim, podem-se escrever as forças referentes a face do cortador em função apenas da força horizontal conforme:

$$F_c^N = F_c^H \cos \theta [\cos \beta + \tan \zeta_n \tan \theta - \tan \zeta_s \sin \beta] \quad (3.10)$$

$$F_c^{FA} = -F_c^H \cos \theta [\tan \theta \cos \beta + \tan \zeta_n + \tan \zeta_s \tan \theta \sin \beta] \quad (3.11)$$

$$F_c^{FL} = F_c^H [\sin \beta + \tan \zeta_s \cos \beta] \quad (3.12)$$

De forma análoga a obtenção das Eq.(3.5), Eq.(3.6) e Eq.(3.7), as forças atuantes nas coordenadas de movimento podem ser obtidas por:

$$\begin{bmatrix} F_c^N \\ F_c^{FA} \\ F_c^{FL} \end{bmatrix} = ([rot_\theta] \cdot [rot_\beta])^{-1} \cdot [F] \quad (3.13)$$

Assim, pode-se obter que:

$$F_c^H = F_c^N \cos \theta \cos \beta - F_c^{FA} \sin \theta \cos \beta + F_c^{FL} \sin \beta \quad (3.14)$$

$$F_c^V = F_c^N \sin \theta + F_c^{FA} \cos \theta \quad (3.15)$$

$$F_c^S = -F_c^N \cos \theta \sin \beta + F_c^{FA} \sin \theta \sin \beta + F_c^{FL} \cos \beta \quad (3.16)$$

Sabe-se, também, que as forças de fricção lateral e axial podem ser relacionadas com a força normal ao cortador através de ângulos de fricção, conforme sugere a lei de fricção de Coulomb. Assim, partindo-se da Figura 3.1, as fricções se relacionam com a força normal segundo as Eq.(3.17) e Eq.(3.18).

$$F_c^{FA} = F_c^N \tan \psi_n \quad (3.17)$$

$$F_c^{FL} = F_c^N \frac{\tan \psi_s}{\cos \psi_n} \quad (3.18)$$

Pode-se, então, substituir as Eq.(3.17) e Eq.(3.18) nas Eq.(3.14), Eq.(3.15) e Eq.(3.16) para se obter a relação entre as forças tangencial, radial e axial e a força normal atuante no cortador, dados por:

$$F_c^H = F_c^N \frac{\cos \beta [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]}{\cos \psi_n} \quad (3.19)$$

$$F_c^V = F_c^N [\sin \theta + \tan \psi_n \cos \theta] \quad (3.20)$$

$$F_c^S = F_c^N \frac{\cos \beta [\tan \psi_s - \tan \beta \cos(\theta + \psi_n)]}{\cos \psi_n} \quad (3.21)$$

Assim, podem-se escrever as relações entre as forças radial e axial e a força tangencial, segundo:

$$F_c^V = F_c^H \frac{\sin(\theta + \psi_n)}{\cos(\theta + \psi_n) \cos \beta + \sin \beta \tan \psi_s} \quad (3.22)$$

$$F_c^S = F_c^H \frac{[\tan \psi_s - \tan \beta \cos(\theta + \psi_n)]}{[\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]} \quad (3.23)$$

Desta forma, podem-se escrever os ângulos de atrito na face do cortador, ψ_n e ψ_s , em função dos ângulos diretores das forças medidas no corte, ζ_n e ζ_s . Para tal, basta dividir as Eq.(3.11) e Eq.(3.12) pela Eq.(3.10), respectivamente.

$$\tan \psi_n = \frac{F_c^{FA}}{F_c^N} = \frac{-\tan \theta \cos \beta + \tan \zeta_n + \tan \zeta_s \tan \theta \sin \beta}{\cos \beta + \tan \zeta_n \tan \theta - \tan \zeta_s \sin \beta} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \tan \psi_s &= \frac{F_c^{FL}}{F_c^N} \\ &= \frac{(\sin \beta + \tan \zeta_s \cos \beta) \cos \psi_n}{\cos \theta [\cos \beta + \tan \zeta_n \tan \theta - \tan \zeta_s \sin \beta]} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Desta forma análoga, podem-se escrever os ângulos diretores das forças medidas no corte, ζ_n e ζ_s , em função dos ângulos de atrito na face do cortador, ψ_n e ψ_s . Para tal, basta dividir as Eq.(3.20) e Eq.(3.21) pela Eq.(3.19) respectivamente.

$$\tan \zeta_n = \frac{F_c^V}{F_c^H} = \frac{\sin(\theta + \psi_n)}{\cos \beta [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]} \quad (3.26)$$

$$\tan \zeta_s = \frac{F_c^S}{F_c^H} = \frac{\tan \psi_s - \tan \beta \cos(\theta + \psi_n)}{\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s} \quad (3.27)$$

Além disso, pode-se escrever a força resultante no cortador segundo:

$$F_c = \sqrt{(F_c^H)^2 + (F_c^V)^2 + (F_c^S)^2} \quad (3.28)$$

As forças de fricção lateral e axial podem ser relacionadas através do ângulo η , apresentado na Eq.(3.29). Uma vez que a fricção entre rocha e face do cortador é na mesma direção que o deslocamento do chip, porém apresentando sentido oposto ao deslocamento do mesmo, o ângulo η representa a trajetória do chip.

$$\tan \eta = \frac{F_c^{FL}}{F_c^{FA}} = \frac{\tan \psi_s}{\sin \psi_n} \quad (3.29)$$

Já a força total de fricção, F_c^F , pode, então, ser escrita como o módulo das forças de fricção radiais e axiais, como a Eq.(3.30). Essa força pode ser vista na Figura 3.2, representada, juntamente com a força normal ao cortador, em verde.

$$F_c^F = \sqrt{F_c^{FA^2} + F_c^{FL^2}} \quad (3.30)$$

Assumindo que a lei de fricção de Coulomb também é a lei que governa as forças de fricção na face do cortador, a força de fricção pode ser escrita como:

$$F_c^F = k_f F_c^N \quad (3.31)$$

Assim, pode-se estimar a constante de fricção, k_f , através da Eq.(3.32). Tal equação define o contato entre o material cortado e a face do cortador.

$$k_f = \frac{\sqrt{F_c^{FA^2} + F_c^{FL^2}}}{F_c^N} \quad (3.32)$$

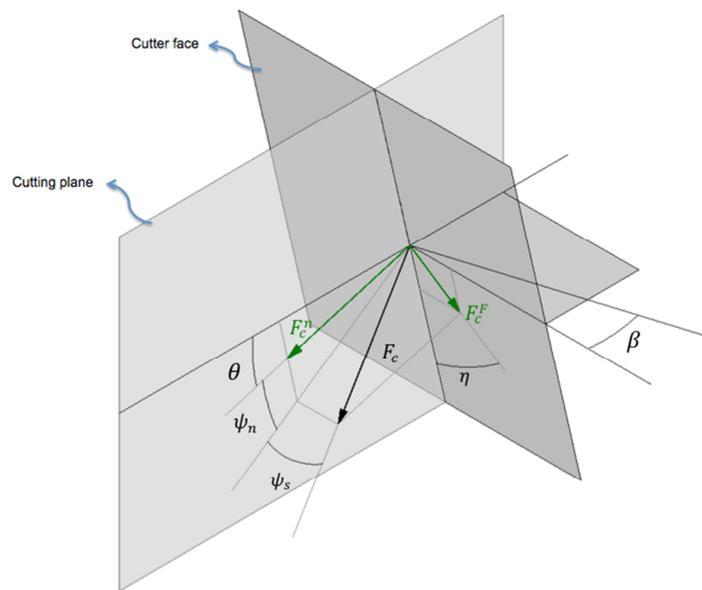


Figura 3.2: Esquema de forças 3D (forças normal, de fricção total) para corte em rocha.

O valor de k_f pode ser expresso, também, em função do ângulo de deslocamento do chip, η , e do ângulo de fricção axial, ψ_n , segundo:

$$k_f = \frac{\tan \psi_n}{\cos \eta} \quad (3.33)$$

Substituindo-se o valor do ângulo de trajetória do chip, η , obtido a partir da Eq.(3.29), pode-se chegar ao valor de k_f em função apenas dos ângulos de fricção lateral e axial, dada pela Eq.(3.34).

$$k_f = \tan \psi_n \sqrt{\frac{\tan^2 \psi_s}{\sin^2 \psi_n} + 1} \quad (3.34)$$

Assim, o corte em rocha tridimensional pode ser dividido em duas partes: uma componente de corte da rocha, representada pela força normal à face do cortador, e uma componente de fricção, representada pela força total de fricção, que é subdividida em fricções nas direções axial e lateral.

Até agora foi falado apenas das forças atuantes no cortador e suas relações. Para a análise de corte, entretanto, se está interessado em saber as componentes de forças de cisalhamento e forças normais atuantes no plano de falha da rocha. Para tal, pode-se tomar a Figura 3.3 como referência. Nesta figura, representadas em verde, têm-se as forças normal e cisalhante atuantes no plano de falha da rocha. Tais forças possuem direções representadas pelos cossenos diretores de α_n e α_s , que determinam a direção para onde a rocha falha. Para a análise de forças, pode-se traçar o esquema representado pela Figura 3.4.

Os valores das forças cisalhante e normal na falha da rocha podem ser escritos em função da força total resultante como:

$$F_r^S = F_c \left[\frac{\cos \psi_s \cos(\alpha_n + \theta + \psi_n)}{\cos \alpha_s} \right] \quad (3.35)$$

$$F_r^N = F_r^S \tan \alpha^* \quad (3.36)$$

Desta forma, pode-se descobrir o valor de α^* , ângulo que representa a relação entre as forças de cisalhamento e normal. Através da análise da Figura 3.4, pode-se escrever este ângulo por:

$$\tan \alpha^* = \frac{\cos \alpha_s \tan(\alpha_n + \theta + \psi_n)}{\cos \gamma} \quad (3.37)$$

Entretanto, deve-se notar que, caso $\gamma \neq 0$, a componente normal de corte estará inclinada em relação ao plano de falha. Em outras palavras, significa dizer que o plano de falha será inclinado em relação à base do cortador (*cutting edge*). Tal hipótese não pode ser possível, pois partiria do princípio de a falha da rocha

independência da região de contato rocha-cortador, ou seja, a falha adentraria a rocha intacta. Dito isso, pode-se afirmar que o ângulo $\gamma = 0$, e assim:

$$\tan \alpha^* = \cos \alpha_s \tan(\alpha_n + \theta + \psi_n) \quad (3.38)$$

Para a falha da rocha, assume-se o critério de falha de Mohr-Coulomb, representado pela Eq.(3.39). Assim, no plano de falha da rocha, as tensões cisalhante e normal podem ser representadas por:

$$\tau = \tau_0 + k\sigma \quad (3.39)$$

Sabendo-se que as tensões cisalhante e normal no plano da falha se relacionam pelo ângulo α^* , isto é, $\sigma = \tau \tan \alpha^*$, pode-se reescrever a Eq.(3.39), e assim obter resistência ao cisalhamento em função da coesão da rocha por:

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 - k \tan \alpha^*} \quad (3.40)$$

Substituindo-se o valor de $\tan \alpha^*$ da Eq.(3.38) na Eq.(3.40), tem-se:

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 - k \cos \alpha_s \tan(\alpha_n + \theta + \psi_n)} \quad (3.41)$$

Entretanto, sabe-se que a tensão de cisalhamento nada mais é que a força de cisalhamento dividida pela área de falha da rocha. Assim, tem-se:

$$F_r^s = \frac{\tau_0 A_r}{1 - k \cos \alpha_s \tan(\alpha_n + \theta + \psi_n)} \quad (3.42)$$

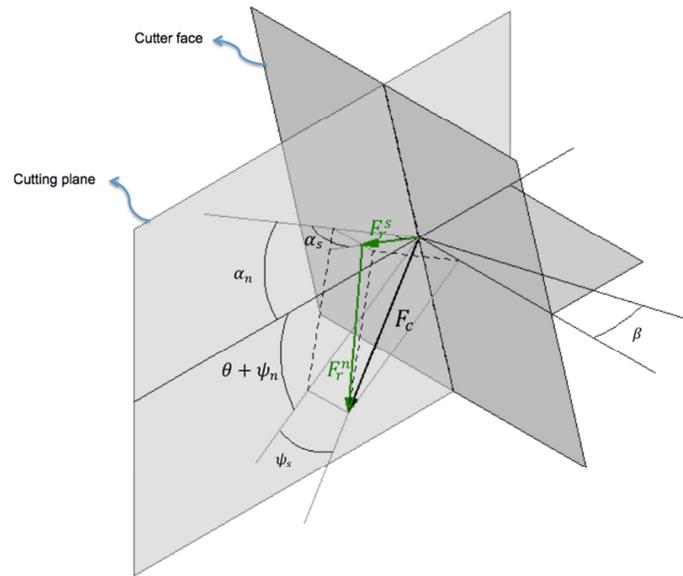


Figura 3.3: Esquema de forças 3D no plano de falha da rocha (forças normal e de cisalhamento).

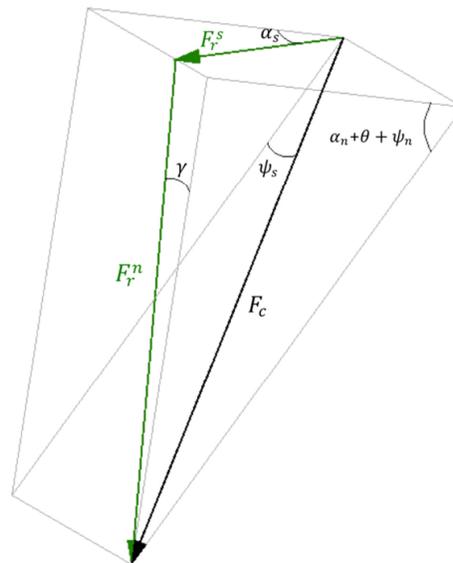


Figura 3.4: Diagrama de forças que atuam no plano de falha da rocha e suas relações com a força resultante de corte.

Como na indústria do petróleo comumente se fala em área transversal de corte, isto é, a projeção da área do cortador no plano normal à superfície da rocha, pode-se reescrever a área de falha da rocha segundo:

$$A_r = \frac{A_t}{\cos \beta \sin \alpha_n} \quad (3.43)$$

Assim, substituindo-se a Eq.(3.43) na Eq.(3.42), tem-se:

$$F_r^S = \frac{\tau_0 A_t}{\cos \beta \sin \alpha_n [1 - k \cos \alpha_s \tan(\alpha_n + \theta + \psi_n)]} \quad (3.44)$$

Todavia, o que se deseja saber não é a relação entre a força de cisalhamento e a coesão da rocha, mas a relação desta com a força medida durante o corte. Para tal, devemos relacionar a força de cisalhamento no plano de falha com as forças atuantes no cortador.

Primeiramente, deve-se definir a relação entre a força normal ao cortador e a força de resultante no cortador, segundo:

$$F_c^N = R_c \cos \psi_s \cos \psi_n \quad (3.45)$$

Utilizando-se as Eq.(3.35) e Eq.(3.45), pode-se obter a relação entre a força de cisalhamento na rocha e a força normal ao cortador, dada por:

$$F_c^N = \frac{F_r^S \cos \psi_n \cos \alpha_s}{\cos(\alpha_n + \theta + \psi_n)} \quad (3.46)$$

Substituindo-se a Eq.(3.46) na Eq.(3.19), pode-se obter a relação entre a força tangencial e a força de cisalhamento na rocha para um cortador afiado, conforme apresentada na Eq.(3.47).

$$F_c^H = F_r^S \frac{\cos \alpha_s \cos \beta [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]}{\cos(\alpha_n + \theta + \psi_n)} \quad (3.47)$$

Por fim, utilizando-se a Eq.(3.44) na Eq.(3.47), obtêm-se, então, a relação entre a força tangencial de corte e a coesão da rocha, dada por:

$$F_c^H = \frac{\tau_0 A_t \cos \alpha_s [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]}{\sin \alpha_n [\cos(\alpha_n + \theta + \psi_n) - k \cos \alpha_s \sin(\alpha_n + \theta + \psi_n)]} \quad (3.48)$$

Deve-se notar que, quando o corte é ortogonal para um cortador afiado, isto é, o *siderake* é zero ($\beta = 0$), o cisalhamento ocorre na direção do movimento. Neste caso, os ângulos de cisalhamento lateral e fricção lateral também serão zero ($\alpha_s = 0$ e $\psi_s = 0$). Assim, ao substituir os valores de $\beta = \psi_s = \alpha_s = 0$ na Eq.(3.48), esta se reduz a solução de Merchant para o corte ortogonal.

Embora se tenha a relação entre a força tangencial de corte e a coesão da rocha, sabe-se que a força tangencial dividida pela área transversal de corte nada mais é que a energia intrínseca da rocha. Assim, pode-se definir a energia intrínseca da rocha como:

$$\epsilon = \frac{\tau_0 \cos \alpha_s [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]}{\sin \alpha_n [\cos(\alpha_n + \theta + \psi_n) - k \cos \alpha_s \sin(\alpha_n + \theta + \psi_n)]} \quad (3.49)$$

3.2 Cortador afiado com pressão confinante e pressão de poros

Caso o corte esteja em um meio confinado, como ocorre no processo de perfuração de um poço, a coluna hidrostática faz pressão sobre o plano de falha da rocha que será cortada. Em contrapartida, a pressão de poros atuará de forma inversa, tendendo a reduzir os efeitos da pressão de fundo de poço. Para se estudar tal processo, deve-se, então, adicionar as componentes de pressão de fluido e de poros à Eq.(3.49).

As pressões confinantes e de poros são componentes que atuam perpendicularmente ao plano de falha, conforme pode ser visto simplificadaamente no diagrama 2D da Figura 3.5. A pressão confinante (em vermelho) atua comprimindo o material cortado sobre a zona de falha, aumentando a fricção entre as bandas de cisalhamento e a rocha intacta. Já a pressão de poros (em verde) atua em sentido oposto ao confinamento, aliviando a fricção entre o material cortado e material intacto.

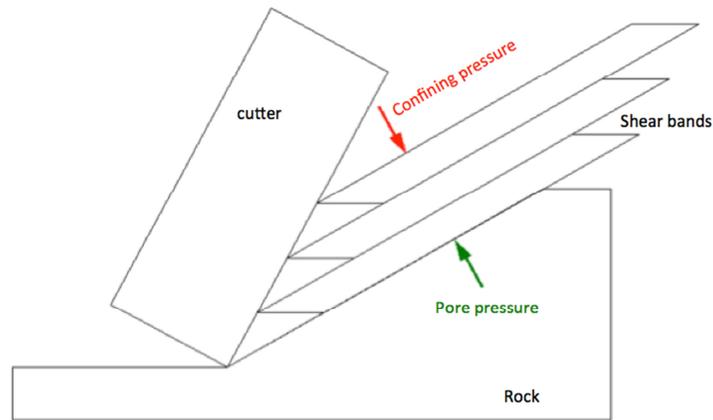


Figura 3.5: Representação 2D das direções da pressão de fundo de poço e pressão de poros atuantes na falha da rocha.

Nesse processo, então, a tensão de cisalhamento atuante na falha do material não será função apenas da tensão normal ao plano de falha, mas sim, função também do meio em qual ocorre o corte. Desta forma, pode-se reescrever a tensão cisalhante na lei de Mohr-Coulomb conforme:

$$\tau = \tau_0 + k(\sigma + P_b - P_p) \quad (3.50)$$

Conforme apresentado anteriormente, as tensões cisalhante e normal no plano de falha se relacionam pelo ângulo α^* . Desta forma, sabendo-se que $\sigma = \tau \tan \alpha^*$, pode-se chegar a:

$$\tau = \frac{\tau_0 + k(P_b - P_p)}{1 - k \tan \alpha^*} \quad (3.51)$$

Substituindo-se a Eq.(3.38) na Eq.(3.51), tem-se:

$$\tau = \frac{\tau_0 + k(P_b - P_p)}{1 - k \cos \alpha_s \tan(\alpha_n + \theta + \psi_n)} \quad (3.52)$$

Assim, para a solução de corte no caso de existir pressão de confinamento e pressão de poros, basta substituir a Eq.(3.40) pela Eq.(3.52) na solução de corte a

pressão atmosférica. Após tal substituição, não é difícil de chegar à solução da energia intrínseca para corte confinado, dado por:

$$\epsilon = \frac{[\tau_0 + k(P_b - P_p)] \cos \alpha_s [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]}{\sin \alpha_n [\cos(\alpha_n + \theta + \psi_n) - k \cos \alpha_s \sin(\alpha_n + \theta + \psi_n)]} \quad (3.53)$$

3.3 Cortador desgastado

Caso o cortador esteja desgastado, a célula de carga passará a medir o somatório de forças atuantes o cortador. Em outras palavras, os sensores medirão as forças resultantes atuantes no cortador somadas às forças resultantes no desgaste. Assim, pode-se reescrever a Eq.(3.1) acrescentando as forças no desgaste. Vale lembrar que a resultante de força no desgaste só possui componentes tangencial e axial. Isso se deve ao fato da fricção só ocorrer na direção do movimento.

$$[F] = \begin{bmatrix} F_c^H + F_w^H \\ F_c^V + F_w^V \\ F_c^S \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Sabendo-se que o vetor força nada mais é que o somatório das forças nas componentes tangencial, axial e radial, pode-se separar cada componente do somatório conforme:

$$\sum F^H = F_c^H + F_w^H \quad (3.55)$$

$$\sum F^V = F_c^V + F_w^V \quad (3.56)$$

$$\sum F^S = F_c^S \quad (3.57)$$

No contato da zona desgastada, pode-se assumir uma fricção representada pela lei de Coulomb, isto é, em que a força de fricção tangencial é uma função da força normal atuante no desgaste. Desta forma, pode-se escrever:

$$F_w^H = k_w F_w^V \quad (3.58)$$

Substituindo-se a Eq.(3.58) nas Eq.(3.55), Eq.(3.56) e Eq.(3.57), tem-se, então:

$$\sum F^H = F_c^H + k_w F_w^V \quad (3.59)$$

$$\sum F^V = F_c^V + F_w^V \quad (3.60)$$

$$\sum F^S = F_c^S \quad (3.61)$$

Além disso, pode-se escrever a força resultante no desgaste segundo:

$$R_w = F_w^V \sqrt{(1 + k_w^2)} \quad (3.62)$$

Para a análise da energia mecânica específica necessária para se cortar a rocha, deve-se lembrar de que essa energia é caracterizada apenas pela componente tangencial de energia. Assim, dividindo-se a Eq.(3.59) em ambos os lados pela área transversal de corte, tem-se:

$$\frac{\sum F^H}{A_t} = \frac{F_c^H}{A_t} + \frac{k_w F_w^V}{A_t} \quad (3.63)$$

Vale ressaltar ainda que, a energia de corte, E , nada mais é que o somatório de forças tangenciais dividido pela área transversal de corte. Já a força tangencial no cortador dividida pela área transversal é equivalente a energia intrínseca da rocha, conforme apresentado anteriormente. Assim, após tais simplificações, pode-se escrever a Eq.(3.64).

$$E = \epsilon + k_w \frac{F_w^V}{A_t} \quad (3.64)$$

Partindo-se da Eq.(3.60), pode-se reescrever a Eq.(3.64), obtendo, assim:

$$E = \epsilon + k_w \frac{(\sum F^V - F_c^V)}{A_t} \quad (3.65)$$

Com base na relação entre a força vertical no cortador e a força horizontal no cortador (Eq.(3.22)), e sabendo-se que o somatório de forças verticais dividido pela área de corte nada mais é que a resistência a penetração, S , pode-se reescrever a Eq.(3.65) por:

$$E = \epsilon + k_w S - \frac{F_c^H}{A_t} k_w \left[\frac{\sin(\theta + \psi_n)}{\cos \beta [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]} \right] \quad (3.66)$$

Aonde, após simplificação, chega-se a Eq.(3.67).

$$E = \left[1 - k_w \frac{\sin(\theta + \psi_n)}{\cos \beta [\cos(\theta + \psi_n) + \tan \beta \tan \psi_s]} \right] \epsilon + k_w S \quad (3.67)$$

Conforme citado anteriormente, a constante de fricção no desgaste, k_w , é uma representação do ângulo de fricção interno da rocha. Isso se deve ao fato de que, geralmente, o contato entre rocha-desgaste é mais resistente que o contato rocha-rocha, conforme já citado.

3.4 Solução para o caso 3D

Algumas relações importantes foram apresentadas anteriormente para se chegar a um modelo analítico para o caso 3D de corte em rocha. Em um teste de *single-cutter* instrumentado, os valores de força tangencial, axial e lateral são mensurados a partir de uma célula de carga localizada acima do cortador. Além

disso, os valores de *siderake* e *backrake* são devidamente conhecidos, assim como a pressão de confinamento e pressão de poros.

A partir dos dados gerados pelo teste, podem-se obter os valores dos ângulos de fricção ψ_n e ψ_s , com base nas Eq.(3.17) e Eq.(3.18). Para tal, apenas é necessária a decomposição das forças medidas no corte em relação às coordenadas do cortador. Desta forma, as únicas variáveis do problema são os ângulos que definem a direção de falha da rocha, α_n e α_s .

Para se determinar tais ângulos, pode-se utilizar o princípio da mínima energia para o caso 3D. Neste caso, a diferença entre os casos 3D do 2D está na minimização da força horizontal de corte, que deverá ser feita com relação à ambos os ângulos de falha (lateral e normal), conforme:

$$\frac{\partial F_c^H}{\partial \alpha_n} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial F_c^H}{\partial \alpha_s} = 0 \quad (3.69)$$

Sabendo-se que a força de corte se dá pela Eq.(3.48), as Eq.(3.68) e Eq.(3.69) podem ser facilmente resolvidas através de softwares matemáticos. Resolvendo-se, primeiro, a Eq.(3.69) com relação ao ângulo lateral de falha, α_s , e depois a Eq.(3.68) com relação ao ângulo normal de falha, os ângulos de falha α_s e α_n podem ser escritos por:

$$\alpha_s = 0 \quad (3.70)$$

$$\alpha_n = -\frac{\ln(-e^{-2i\theta} \cdot e^{-2i\psi_n} \cdot e^{-2i\varphi})i}{4} \quad (3.71)$$

Com base nas soluções de α_s e α_n , pode-se verificar numericamente que as segundas derivadas da força de corte em função destes ângulos são, de fato, maiores que zero, indicando que as soluções são mínimas.

Com relação ao ângulo normal de falha, embora a expressão apresentada pela Eq.(3.71) pareça complicada, a mesma nada mais é que a solução para o caso

2D. Isso pode ser comprovado através da Figura 3.6, onde as soluções 2D e 3D são plotadas para diferentes valores de *backrake* e ângulo de fricção interno da rocha. Para tal análise, assumiu-se que os ângulos de fricção são dependentes apenas da orientação do cortador, conforme proposto por Coudyzer e Richard (2005) pelas Eq.(3.72) e Eq.(3.73).

$$\psi_n = 35^\circ - 0.8\theta \quad (3.72)$$

$$\psi_s = 1.2\beta \quad (3.73)$$

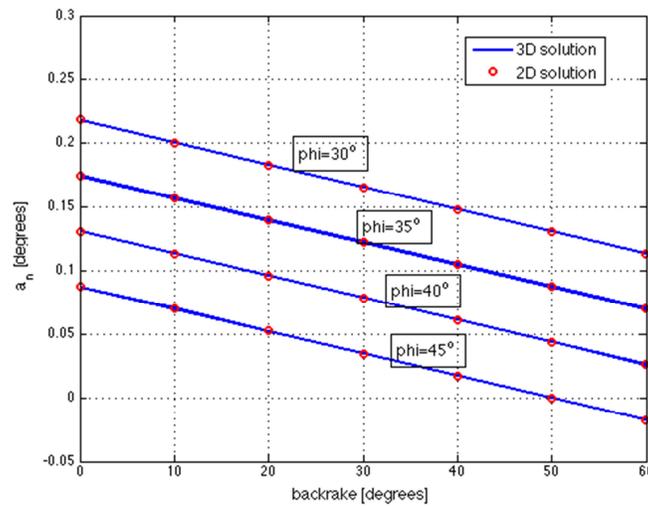


Figura 3.6: Comparação entre a solução 3D e a solução 2D do ângulo normal de falha para diferentes *backrakes* e diferentes ângulos de fricção interno da rocha.

Desta forma, os ângulos de falha da rocha podem ser definidos, então, pelas Eq.(3.74) e Eq.(3.75). A ideia de $\alpha_s = 0$ significa dizer que a falha da rocha assume direção conforme a Figura 3.7.

$$\alpha_s = 0 \quad (3.74)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{4} - \frac{(\theta + \psi_n + \varphi)}{2} \quad (3.75)$$

A validade do ângulo lateral de falha é corroborada com base em um experimento realizado em corte de Argilas. Tal experimento segue descrito no Apêndice II do presente trabalho. A escolha deste material se dá devido ao regime dúctil de falha, que se assemelha ao corte plástico em rochas, como apresentado por Cheatham e Daniels (1979),

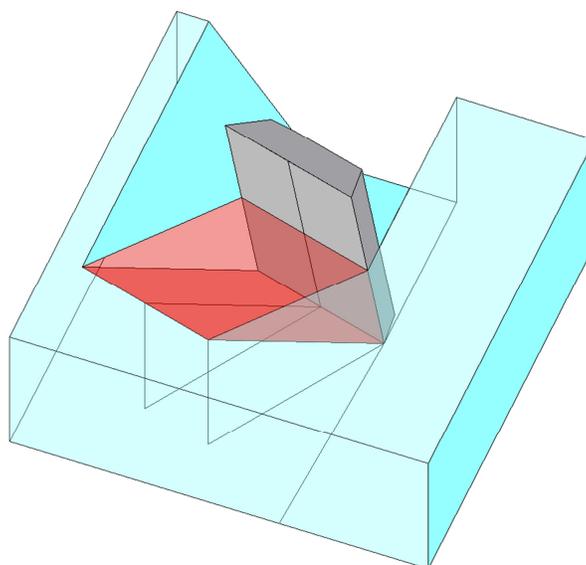


Figura 3.7: Representação do bloco falhado durante o corte oblíquo em rocha a partir das soluções analíticas.