8
EXTENSÕES DO TEOREMA DE MORLEY

8.1. Em paralelogramos

Analogamente ao que acontece em triângulos, as trissetrizes adjacentes dos ângulos internos, podem formar, no interior de um paralelogramo, outro paralelogramo. A prova desse fato decorre da congruência dos triângulos de bases paralelas e congruentes, pelo caso ALA:

- $ABF \equiv CDH$, então $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BF} = \overline{DH}$ e $\overline{AF} = \overline{CH}$ e
- $ADG \equiv CBE$, então $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AG} = \overline{CE}$ e $\overline{DG} = \overline{BE}$.

Daí, como cada ângulo interno foi trissectado, por transitividade das medidas dos lados, decorrem as congruências, pelo caso LAL[1], dos triângulos:

- $BEF \equiv DGH$, então $\overline{BE} = \overline{DG}$, $\overline{BF} = \overline{DH}$ e $\overline{FE} = \overline{GH}$ e
- $AFG \equiv CHE$, então $\overline{AF} = \overline{CH}$, $\overline{AG} = \overline{CE}$ e $\overline{FG} = \overline{EH}$.

Como $\overline{FE} = \overline{GH}$ e $\overline{FG} = \overline{EH}$, o quadrilátero *EFGH* é um paralelogramo.

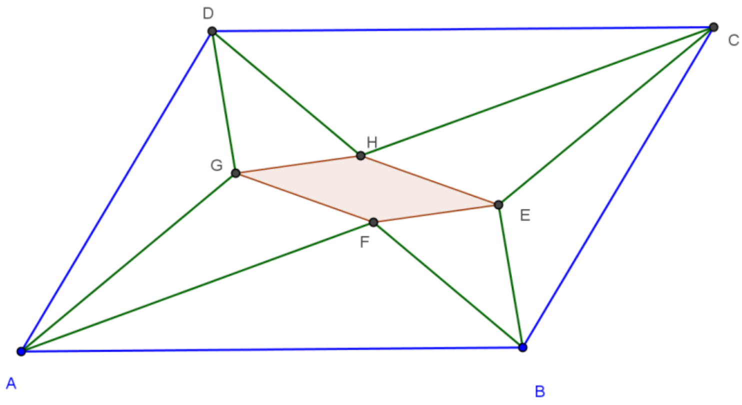

Figura 28: Teorema de Morley em um paralelogramo.

[1] Caso de congruência de triângulos, referenciado pela sigla LAL, significando que há nos triângulos considerados, um ângulo congruente entre dois lados respectivamente congruentes.

Para os diversos tipos de paralelogramos, o resultado pode ser um losango ou até mesmo um retângulo. As provas desses casos são similares à apresentada acima.

Se *ABCD* é retângulo, a trissecção gera ângulos de 30°. As trissetrizes adjacentes aos lados opostos são congruentes e formam quatro triângulos congruentes *ABF*, *BCE*, *CDH* e *ADG*. Consequentemente *EF* = *FG* = *GH* = *EH*, logo *EFGH* é losango.

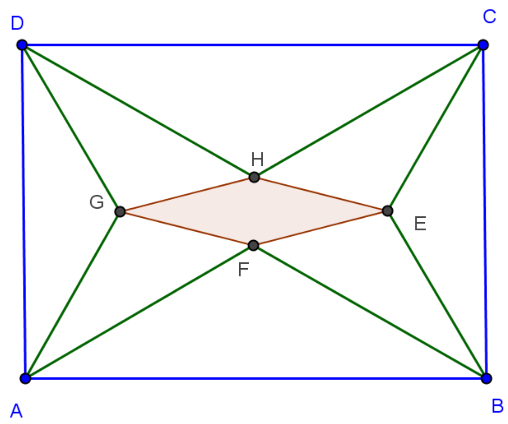

Figura 29: Losango formado pelas trissetrizes em um retângulo.

Por outro lado, se *ABCD* é losango, os quatro lados são bases dos triângulos congruentes formados com as trissetrizes a eles adjacentes (*ABF*, *BCE*, *CDH* e *ADG*). Além disso, as trissetrizes adjacentes ao mesmo vértice formam triângulos isósceles congruentes dois a dois (*AFG* com *CEH* e *BEF* com *DGH*). Mas, em cada vértice de *EFGH* são formados quatro ângulos com medidas respectivamente iguais às dos que se formam nos demais. Assim, *EFGH* é um quadrilátero equiângulo e, portanto, um retângulo. Vale notar que, no caso do quadrado, as trissetrizes adjacentes a cada lado se intersectam nos vértices de outro quadrado.

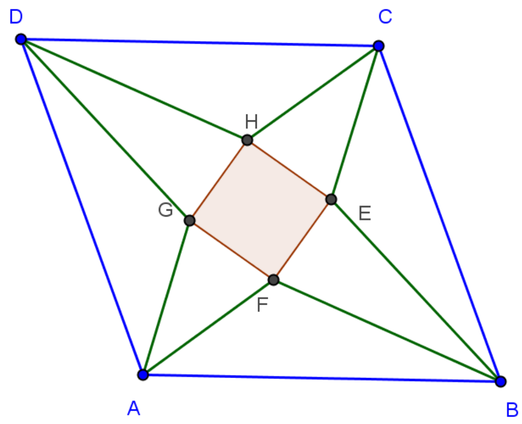

Figura 30: Retângulo formado pelas trissetrizes em um losango.

Em se tratando de paralelogramo, as trissetrizes não adjacentes ao mesmo lado, mas de vértices consecutivos, ainda assim seriam formados paralelogramos. A seguir aparece uma ilustração desse fato.

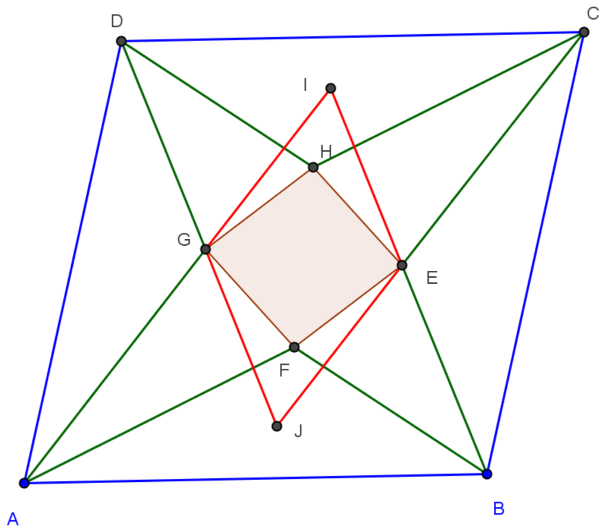

Figura 31: Paralelogramos formados por trissetrizes.

8.2. Em polígonos regulares

Além dessa generalização, quando são considerados polígonos regulares pode-se demonstrar o fato de as intersecções de trissetrizes dos ângulos internos formarem polígonos a eles semelhantes. O pentágono e o octógono ilustram bem esse fato.

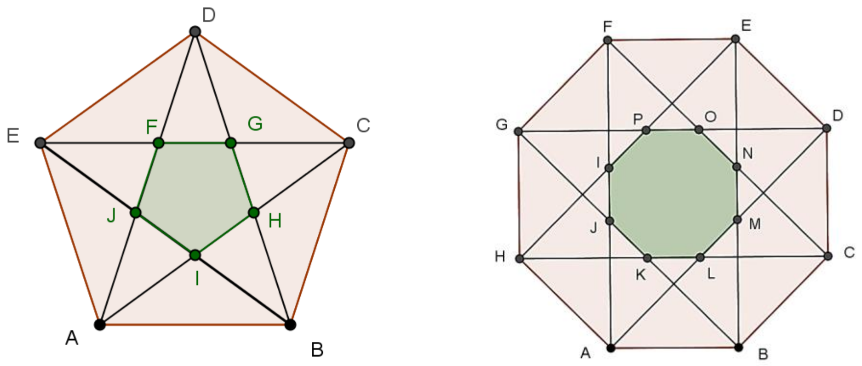

Figura 32: As trissetrizes no pentágono e no octógono.

8.3. Para as trissetrizes dos ângulos externos do triângulo

Quando são traçadas as trissetrizes dos ângulos externos de um triângulo, surgem novas configurações geométricas geradoras de triângulos equiláteros. A configuração mais simples se dá quando são tomados os pontos de intersecção das trissetrizes externas adjacentes a cada lado do triângulo original.

Na figura a seguir, aparece sobreposto ao triângulo original ***ABC***, o triângulo ***DEF*** cujos vértices são intersecções de trissetrizes externas adjacentes a cada lado. A construção no GeoGebra exibe os ângulos de 60° obtidos, mostrando que *DEF* é um triângulo equilátero.

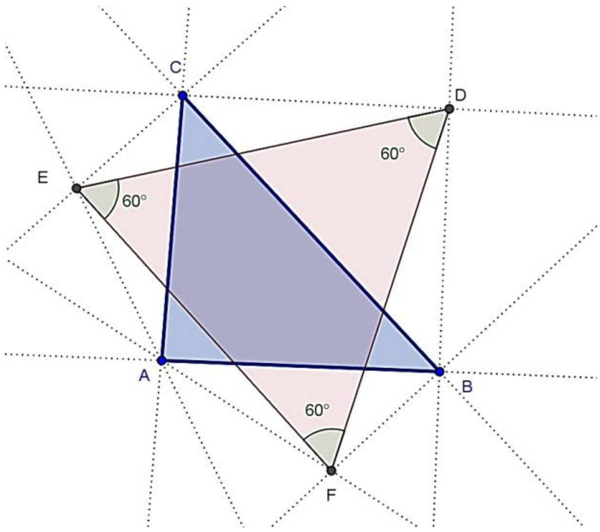

Figura 33: Triângulo de Morley com trissetrizes externas.

De forma surpreendente, combinando intersecções de trissetrizes internas e externas, outros triângulos equiláteros são determinados. Abaixo aparecem cinco triângulos equiláteros:

- ***DEF***, com vértices nas interseções de trissetrizes internas adjacentes a cada um dos lados;
- ***GHI***, com vértices nas interseções de trissetrizes externas adjacentes a cada um dos lados;
- ***GJK***, ***HLM*** e ***ION*** cada um deles com um vértice na intersecção de duas trissetrizes externas e outros dois nas intersecções de uma trissetriz interna com uma trissetriz externa.

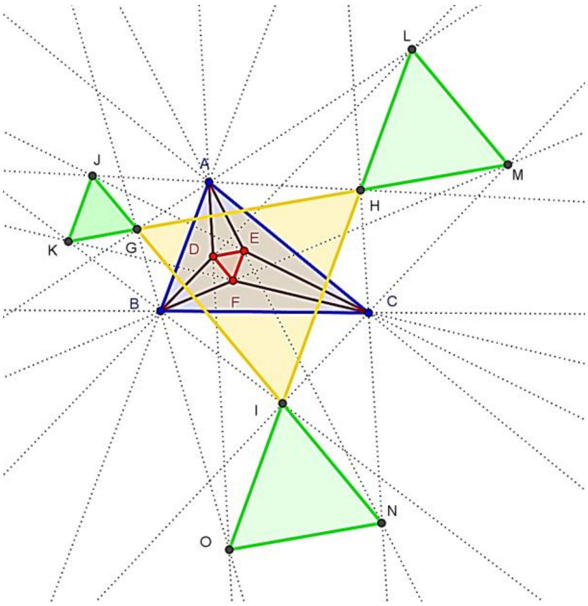

Figura 34: Cinco triângulos equiláteros formados por trissetrizes.

Para finalizar, vale o registro a respeito da referência de alguns matemáticos ao Teorema de Morley, como “O Milagre de Morley”. Não só pela construção improvável de triângulos equiláteros, ou mesmo pela impossibilidade da trissecção dos ângulos com régua não graduada e compasso, quanto mais pela riqueza matemática das demonstrações[2] ou aplicabilidade pedagógica, mas principalmente, pela beleza de todo esse conjunto.

[2] Em http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml há diversas demonstrações do Teorema de Morley, porém algumas são de frágil argumentação.