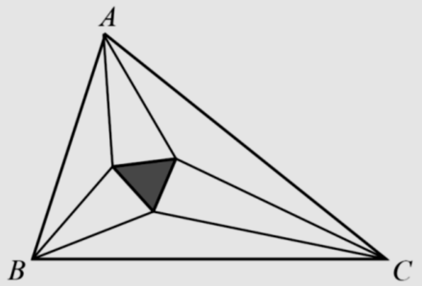
6
UMA QUESTÃO OLÍMPICA

Na 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) de 2012, foi proposta uma questão aos alunos de Nível 3 (Ensino Médio) envolvendo o Triângulo de Morley. O enunciado dava os esclarecimentos básicos a respeito da figura, cobrando aplicações de conceitos comumente trabalhados no Ensino Básico. Abaixo está a cópia fiel da questão da prova:

22) O *teorema de Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo ABC em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley de ABC*, como o que está destacado na figura a seguir:



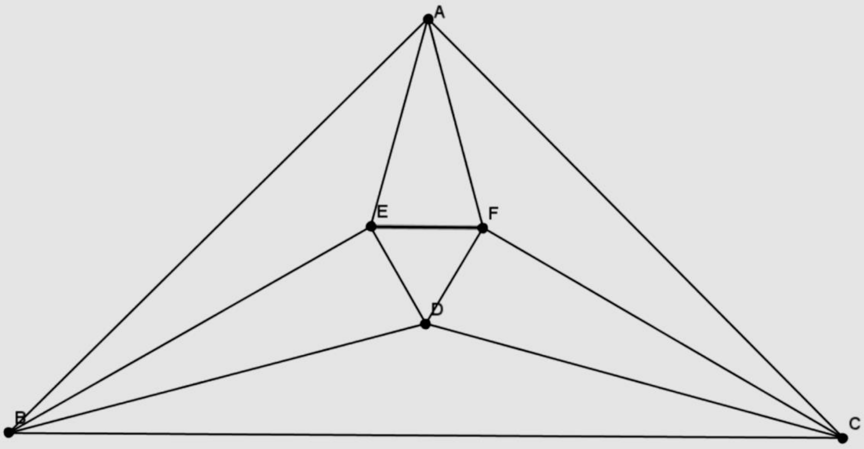
Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

A) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ **B)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{6}-2$
D) $2-\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

Figura 19: Teorema de Morley na OBM 2012.

A solução da banca valoriza aspectos fundamentais do pensar geométrico. Primeiramente, em se tratando de um triângulo retângulo isósceles, a simetria de alguns elementos é de grande importância. Além disso, os ângulos obtidos nas trissecções facilitam a aplicação de relações trigonométricas.

22) (A)



Pela simetria da figura, temos que $E\hat{D}B = F\hat{D}C$. Pelo Teorema de Morley, temos que $E\hat{D}F = 60°$. Além disso, $B\hat{D}C = 150°$, pois $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 15°$. Daí, teremos que $E\hat{D}B = 75°$, donde o triângulo *BED* é retângulo em *E*. A hipotenusa *BC* do triângulo *ABC* é igual a $2\sqrt{2}$. Traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles *BDC*, temos que $BD = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos 15°}$ e no triângulo *BED*, temos que $ED = BD \cdot \operatorname{sen} 15°$ e daí $ED = \sqrt{2}\tan 15° = \sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

Observação: Usando a fórmula $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, temos que

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \tan 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

Figura 20: Resolução da questão 22, nível 3, da OBM (1ª fase – 2012).

A resolução acima pode ter alguns passos suprimidos se for visualizada a congruência dos triângulos *BED* e *BDH*, determinado pela altura *DH*, traçada a partir do ponto ***D*** no triângulo *BDC* (pelo caso ALA[1]). A figura a seguir ilustra melhor a situação proposta.

[1] Um dos casos de congruência de triângulos é referenciado pela sigla ALA, significando que há nos triângulos considerados, um lado congruente entre dois ângulos respectivamente congruentes.

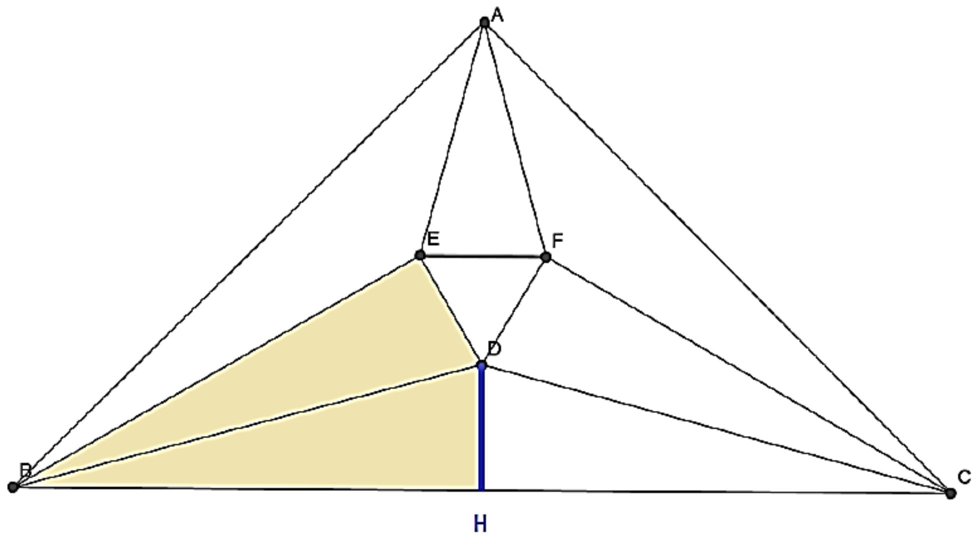


Figura 21: Triângulos *BDE* e *BHE* congruentes.

Essa intervenção permite concluir que $\overline{ED} = \overline{DH} = \sqrt{2}.\boldsymbol{tan}15°$. Daí segue a resolução da banca, inserindo o valor da tangente do ângulo de 15°.

Temas importantes da Matemática, que foram abordados em competições olímpicas, pouco conhecidos da maioria dos estudantes e professores, são costumeiramente tratados em publicações da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Confirmando essa observação, em 2013 foi publicada uma demonstração do Teorema de Morley em artigo da Revista EUREKA! Nº 37 e nele, além de ser ressaltada a beleza do teorema, a sua descoberta é considerada até certo ponto inusitada, pois já se esperava terem sido obtidos os resultados mais relevantes sobre triângulos há alguns séculos. [14]

Nesse artigo, os autores utilizaram a Trigonometria como principal recurso para a demonstração. Porém, citam a existência de muitas outras possibilidades de aplicação para esse fim. No capítulo seguinte há duas dessas demonstrações, nas quais se pretende utilizar conteúdos inerentes ao Ensino Básico, mas com um pouco mais de profundidade.